

# Fluidodinamica

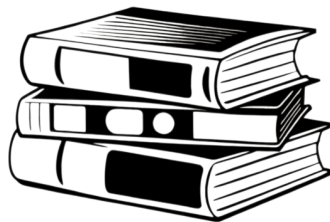
Teoria Parte 1

---

Universita degli studi Roma3

Docente: **Roberto Camussi**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



**NOTESTOBOOK**  
ELEVATE YOUR NOTES

[notestobook.it](http://notestobook.it)

Anno Accademico 2025/2026



# Indice

0.1	Fluidodinamica . . . . .	4
0.2	Il teorema di Crocco e la generazione di vorticità . . . . .	39
0.3	Il sistema completo delle equazioni di governo . . . . .	40
0.4	Adimensionalizzazione delle equazioni e teorema di Buckingham . . . . .	41
0.4.1	Variabili adimensionali e grandezze di riferimento . . . . .	41
0.4.2	Equazione di conservazione della massa in forma adimensionale . . . . .	42
0.4.3	Gruppi adimensionali legati alla compressibilità . . . . .	43
0.4.4	Il numero di Mach . . . . .	44
0.5	Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto . . . . .	46
0.6	Adimensionalizzazione dell'equazione di bilancio dell'energia . . . . .	46
0.7	Equazione di stato in forma adimensionale . . . . .	47
0.8	Sistema completo delle equazioni adimensionali . . . . .	48
0.9	Semplificazione per flussi incompressibili non viscosi . . . . .	48
0.9.1	Equazioni di Eulero per flusso incompressibile . . . . .	48
0.10	Similitudine dinamica e coefficienti aerodinamici . . . . .	49
0.11	Applicazioni: tubo di Pitot e fenomeni di vorticità . . . . .	50
0.11.1	Il tubo di Pitot . . . . .	50
0.11.2	Generazione di vorticità e downwash . . . . .	50
0.12	Introduzione del potenziale di velocità . . . . .	51
0.12.1	Equazione di Laplace e condizioni al contorno . . . . .	51

## 0.1 Fluidodinamica

Passaggio idrodinamica  $\rightarrow$  fluidodinamica  $\rightarrow$  entra in gioco la densità  $\rho$ .

Mentre nella idrodinamica si studiano principalmente fluidi, in particolare liquidi, con densità costante, nella fluidodinamica la densità varia.

Essendo  $\rho$  non costante,  $\rho$  sarà una nuova variabile  $\rightarrow$  avremo un'equazione aggiuntiva. Pertanto il sistema di equazioni avrà una nuova variabile con relativa equazione.

### Equazioni e variabili incontrate finora

- $u_1, u_2, u_3$  velocità (3 componenti)
- $p$  pressione
- Equazione della quantità di moto: equazione vettoriale  $\rightarrow$  3 equazioni scalari
- Equazione della massa: equazione di continuità (equazione scalare)

(4 variabili, 4 equazioni di governo)

Dovendo scrivere un'equazione per la densità si aggiunge però anche la variabile della temperatura:

$$\rho \rightarrow T$$

Alla fine dovrò aggiungere un totale di 2 equazioni al mio sistema di equazioni:

1. Equazione di stato (aggiungendo la densità al sistema si modificheranno anche le prime due equazioni)
2. Equazione dell'energia

Quindi nella fluidodinamica avremo:

- Nuove simbologie (tensori, gradienti di velocità, matrici)
- Nuove convenzioni legate alla fluidodinamica: notazione di Einstein, notazione matriciale
- Nuovo insieme di equazioni che sia valido in generale (anche quando la densità è considerata variabile)

Da cui discendono casi particolari e semplificazioni.

Nuovo sistema di equazioni  $\rightarrow$  6 equazioni e 6 incognite.

A questo sistema sarà possibile effettuare una semplificazione (di carattere generale) tramite l'individuazione del problema fisico da cui discende la adimensionalizzazione tramite teorema di Buckingham. Avremo quindi dei gruppi adimensionali da usare.

- Eö Ekert
- Pr Prandtl

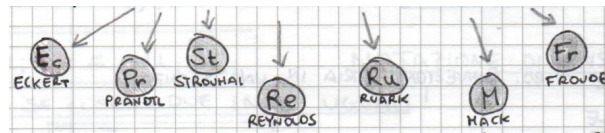


Figura 1: Diagram showing seven dimensionless numbers: Eötvös (Eö), Prandtl (Pr), Strouhal (St), Reynolds (Re), Ruck (Ru), Mach (M), and Froude (Fr). Arrows point from the text above to each number. Below the Mach number, an arrow points to a note about variable density flow.

- St Strohal
- Re Reynolds
- Ru Ruck
- M Mach
- Fr Froude

↔ tiene conto di un flusso a densità variabile

Dopo aver trovato i gruppi adimensionali si cercano le soluzioni asintotiche per  $\rightarrow \infty$  o  $\rightarrow 0$ .

L'idrodinamica è una semplificazione della fluidodinamica che è ottenuta facendo andare a 0 il numero di Mach, quindi  $M \rightarrow 0$ . Anche nel caso di fluidi non viscosi euleriani, in cui la viscosità non è importante, sono quelli per cui  $Re \rightarrow \infty$ ; nel caso di flussi Stokesiani  $Re \rightarrow 0$ .

### Alcune soluzioni asintotiche particolari

$Re \rightarrow \infty$

1. **Flussi potenziali**  $\rightarrow$  introduzione di nuova variabile  $\varphi$  (potenziale) che ci darà equazioni di governo nuove molto più semplici. Nessuna viscosità.
2. **Strato limite**  $\rightarrow$  l'ipotesi  $Re \rightarrow \infty$  ha come conseguenza il fatto che non è possibile ricalcolare l'effetto della forza viscosa (il modello  $Re \rightarrow \infty$  mi predice l'assenza di resistenza aerodinamica): paradosso di d'Alambert  $\rightarrow$  sotto l'ipotesi di modello a potenziale mi dà dei risultati che sotto certi aspetti sono fallimentari, cioè mi sono perso alcune informazioni fondamentali (es. resistenza aerodinamica). Con lo strato limite introduco anche l'effetto della viscosità.
3. **Flussi compressibili in condotto**  $\rightarrow$  studiati in condizioni subsoniche ( $M < 1$ ) e supersoniche ( $M > 1$ ), definendoli rispettivamente fluido subsonico e fluido supersonico tenendo conto delle variazioni di densità, studiando geometrie semplici in cui le equazioni saranno più semplici rispetto a geometrie generiche.

(Flusso indica fluido in moto)

### 3° Lezione fluidodinamica 26 Aprile

Pertanto la  $\rho$  sarà variabile e non più una costante.

$\rho$  è strettamente legata a pressione  $P$  e temperatura  $T \rightarrow \rho(P, T)$ .

Possiamo stabilire un rapporto tra le variazioni di  $P$  e  $T$  con  $\rho$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \rho \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha$$

### 1. Caso della pressione

In cui  $\alpha$  è il coefficiente di compressibilità [ $\text{Pa}^{-1}$ ] (compressibilità è un sinonimo).

$\alpha$  quantifica quanto è sensibile  $\rho$  da  $P$ .

- $\alpha$  acqua  $\sim 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
- $\alpha$  aria  $\sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$

(C'è grande differenza di ampiezza; in un gas piccole variazioni di pressione varia enormemente la densità.)

### 2. Caso della temperatura

$\beta$  = coefficiente di espansione termica

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta \rho$$

Il coefficiente  $\beta$  è sempre dimensionale [ $\frac{1}{\text{K}}$ ] (kelvin).

- Acqua  $\sim 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
- Aria  $\sim 10^{-2} \text{ K}^{-1}$

(Ciò che conta è la sensibilità che è di 2 ordini di grandezza differenti.)

Avremo quindi:

- $\rho(T, P) = \text{costante} \rightarrow$  flussi incompressibili (non dipende da  $T, \rho$ )
- $\rho(P) \rightarrow$  flusso barotropico
- $\rho(T) \rightarrow$  flusso termotropico  $\rightarrow$  es. convezione aria in una stanza
- $\rho(T, P) \rightarrow$  flusso compressibile

La relazione di stato la possiamo utilizzare in tutti i casi reali tranne alcuni in particolare (es. in condizioni di Mach  $> 10$ ):

$$\frac{P}{\rho} = \gamma RT$$

In cui in  $R$  ho le caratteristiche chimiche.

$1/\rho = V$  volume specifico.

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

$$R = 287 \frac{J}{Kg \cdot K}$$

per aria. Non mi porto dietro la costante universale.

Il termine conservazione si usa per egualizzare quantità a 0, bilancio per egualizzare i due membri.

Equazione di continuità o bilancio/conservazione della massa.

Si parte da principi primi ossia da un'evidenza fisica, di carattere lagrangiano, ossia volume materiale formato dalla stessa materia ma con volume variabile. Voglio passare però a un volume di controllo (altrimenti non ho necessità di un volume materiale).

Da principio primo (lagrangiano) → tesi: teorema di Reynolds → principio primo in ottica euleriana → forma integrale → va descritto in forma differenziale → applico il teorema di Green (da integrale di superficie passo a integrale di volume).

La forma integrale dà informazioni di carattere globale ma per studi di dettaglio necessito la forma differenziale.

Principio primo dice che la massa rimane costante.

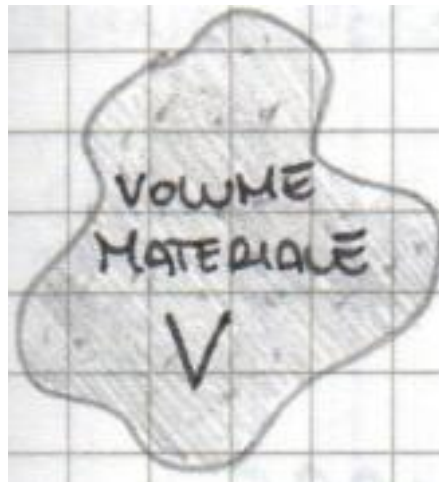


Figura 2: Diagram of a material volume (Volume Materiale) represented by a cloud-like shape with a checkmark inside.

Se ho  $\rho$  locale → conosco  $\rho$  di un preciso punto, integrando sul volume ottengo l'intera massa. Immagino  $\rho$  media.

$$M = \iiint_V \rho dV$$

Con il simbolo  $\frac{D}{Dt}$  si indica la derivata materiale/totale/sostanziale, diverso da  $\frac{d}{dt}$  o  $\frac{\partial}{\partial t}$  che indica la derivata rispetto al tempo.

Pertanto  $\frac{DM}{Dt} = 0$  e applico quindi il teorema di Reynolds:

$$0 = \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV \quad \begin{array}{l} \text{Da volume} \\ \text{materiale} \\ \text{passo a volume} \\ \text{di controllo} \\ \text{tramite Reynolds} \end{array} \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV + \iint_{S_0} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

(Volume di controllo; frontiera/superficie del volume di controllo)

Scrivere  $\vec{u}$  è equivalente sempre a un vettore.

$$\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 \quad (\text{prodotto scalare, notazione vettoriale})$$

$$\left. \begin{array}{l} u_i = \vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \\ n_i = \vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_3) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{In generale } u_i = \vec{u} \\ \text{(vettore)} \end{array} \quad (\text{notazione indiciale})$$

( $i = 1, 2, 3$ )

$$\sum u_i n_i = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

(Notazione di Einstein per indicare sommatoria. Vale solo se ci sono due indici uguali!)

$$\text{Da cui } \vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_i$$

Tornando al teorema di Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV + \iint_{S_0} \rho (u_i n_i) dS = 0$$

Applico teorema di Green che trasforma l'integrale di superficie tramite la divergenza (div), ma che usiamo con scrittura diversa.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

(Vettore con 3 componenti, forma vettoriale)

↓ In forma indiciale:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ora applico il teorema di Green ed effettuo la divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV + \iiint_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) dV = 0$$

È importante ricordare che gradiente  $\neq$  divergenza.

La divergenza si applica a vettori o a tensori diminuendo il grado: trasforma vettore in scalare.

$$\vec{a} \rightarrow \text{div}(\vec{a}) = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (\text{che ci dà scalare, forma vettoriale})$$

Il simbolo in forma indiciale della divergenza è:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad (\text{è una somma, notazione di Einstein, poiché somma di componenti con stesso indice})$$

Pertanto dobbiamo anche dire che:

$$\nabla \cdot \vec{a} \neq (\nabla \vec{a})$$

(divergenza  $\neq$  gradiente)

Quindi ho applicato Green e trasformato l'integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_0} \rho dV + \iiint_{V_0} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}$$

(Mi deve dare sempre uno scalare  $\leftrightarrow$  abbassa ordine: da vettore  $\vec{u}$  a scalare)

Data ora l'arbitrarietà del volume di controllo (ipotizzando che  $V_0$  non vari al tempo) elimino l'integrale e porto dentro la derivata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad *$$

Che posso riscrivere in forma indiciale come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0$$

(Equazione di bilancio della massa, equazione generale)

Se dimostriamo che  $\rho$  è costante, la prima derivata va via;  $\rho u_k$  porto fuori  $\rho$ :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

(Caso particolare di bilancio massa per fluidi incompressibili)

Un'altra maniera per descrivere il bilancio è con l'uso della derivata materiale.

La derivata materiale è un operatore:

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \bullet)$$

(con il prodotto scalare)

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bullet = u_1 \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \bullet}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \bullet}{\partial x_3} \quad (\text{forma vettoriale})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \bullet = u_k \frac{\partial \bullet}{\partial x_k} \quad (\text{forma indiciale con notazione di Einstein})$$

Quindi posso riscriverla tramite la notazione vettoriale di prima:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{da} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad *$$

(prodotto scalare; deve dare sempre uno scalare)

Quindi:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in cui} \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (\text{bilancio di quantità di massa, conservazione di massa})$$

Nel caso della conservazione della quantità di moto comparirà un integrale di superficie in cui apparirà il tensore delle tensioni:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

(è tensore simmetrico)

(Usato in idrodinamica)

↓ Che posso riscrivere in forma indiciale:

$$T_{ij} \quad (\text{forma indiciale per tensore})$$

( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ )

Mentre  $T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$  è la traccia della matrice o del tensore.

La divergenza applicata a un tensore ci darà un vettore (abbassa grado):

$$\nabla \cdot \underline{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$$

(forma indiciale; è sempre prodotto scalare)

Definiamo inoltre prodotto diadico o tensoriale:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \vec{a} \otimes \vec{b} \quad \text{o} \quad \vec{a} : \vec{b}$$

(senza puntino)

Che è diverso da  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ .

Il prodotto diadico lo abbiamo ritrovato nella quantità di moto:

$$\vec{\nabla} \vec{u} \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$$

(Gradiente di  $\vec{u}$  ci da matrice di 9 componenti; divergenza di  $\vec{u}$  ci da scalare)

Quindi  $\vec{\nabla} \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  (forma indiciale) è tensore ottenuto tramite gradiente.

Se scrivessi  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  avrei divergenza.

Quindi nella quantità di moto avremo:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \rightarrow \text{ci da vettore } \vec{u} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

## Lezione 28 Aprile

### Introduzione all'equazione della quantità di moto

Anche qui si partirà da un principio primo partendo da volume materiale.

Equazione massa (ripasso); non usiamo più  $V_0$  ma  $V$  per indicare volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Applicando il teorema di Gauss-Green otteniamo tramite divergenza ciò che passa per la superficie. La divergenza va applicata a tutto ciò che riguarda  $\vec{u}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

(divergenza)

Da cui tramite lo svolgimento della divergenza avrò:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in cui: } \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad (\text{forma vettoriale})$$

In generale:  $\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \bullet$  è la derivata totale.

Passiamo in forma indiciale (e con notazione di Einstein):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{forma indiciale})$$

Perché è una sommatoria posso portare fuori la  $\rho$ :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

In cui derivata totale in forma indiciale:



(forma vettoriale; forma indiciale)

Riscriviamo ora l'equazione differenziale (ipotizzando costanza di volume):

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} \quad (\text{forma vettoriale, o da 3 equazioni scalari})$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (T_{ik}) \quad (\text{forma indiciale})$$

( $i = 1, 2, 3$ ;  $j$  varia,  $i$  è fissa. Se cambio la lettera non cambia il senso, basta che non vari la prima cosa  $\vec{u}$ .)

Posso lavorare per svolgere la derivata del prodotto:

I membro:  $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \dots$

(Immagino  $\rho \vec{u}$  e  $\vec{u}$  suddivisi; gradiente; divergenza  $\nabla \cdot (\rho \vec{u})$ .)

Il risultato deve essere necessariamente un vettore!

Se mettiamo insieme  $\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u})$  in evidenza  $\frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\vec{u} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right]$$

(= 0 poiché è equazione di continuità di bilancio massa valida per tutti i fluidi)

Ricordando che:

Rimane:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \rightarrow \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = \rho \frac{D \vec{u}}{Dt}$$

(in cui  $\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ .)

$$\rho \frac{D \vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}$$

(Il tensore delle tensioni sforzi è una matrice  $3 \times 3$  con 9 componenti.  $\underline{\underline{T}}_{ij}$  è tensore simmetrico con 6 componenti indipendenti che sono incognite. Il sistema è chiuso quando ho tante equazioni quante incognite.)

$$\underline{\underline{T}}_{ij} \text{ lo scompongo in 2 contributi } (= \underline{\underline{\Phi}}_{ij} \text{ in idrodinamica } = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Phi}}^R)$$

(In idrodinamica le normali sono entranti, in fluidodinamica sono uscenti per definizione.)

(Rimane incognita: definita da velocità)

(Idrodinamica)

(Fluidodinamica)

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\sigma}}$$

(uscente)

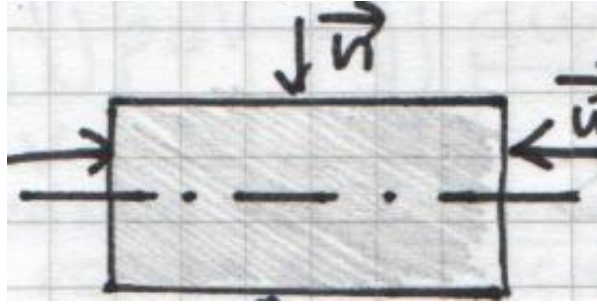


Figura 3: Diagram of a fluid element in hydrodynamics. A rectangular box represents the fluid element. A normal vector  $\underline{n}$  points downwards from the top face, and a velocity vector  $\underline{u}$  points to the right from the right face. Arrows indicate the flow direction.

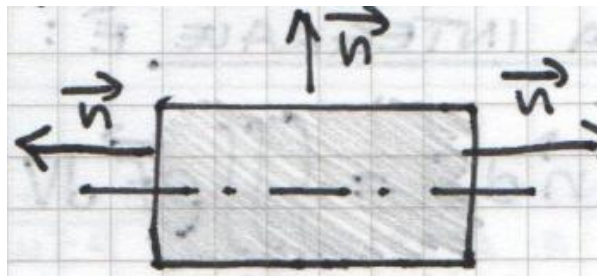


Figura 4: Diagram of a fluid element in fluid dynamics. A rectangular box represents the fluid element. A normal vector  $\underline{n}$  points upwards from the bottom face, and a velocity vector  $\underline{u}$  points to the right from the right face. Arrows indicate the flow direction.

Quindi:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

Posso inoltre indicare  $\underline{\underline{T}}$  come:  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$  (forma indiciale).

In cui  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ ;  $0$  se  $i \neq j$ :

$$\text{Delta di Kronecker} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se metto  $i, j$  come componente in  $\underline{\underline{T}}$  lo stesso vale in  $\delta_{ij}$  e per  $\sigma_{ij}$ .

Se effettuo la divergenza:

$$\nabla \cdot (-p\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij})$$

(Siccome è divergenza, l'indice è  $j$  perché levo  $i$  e lascio  $j$ .)

E rimane:  $= -\frac{\partial p}{\partial x_i}$

Dobbiamo eliminare incognite per aver introdotto tensore tensioni  $\mathbf{T}$ . Si basa sempre su principi primi:

$$T_{ij} = F(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{stato termodinamico})$$

Voglio capire dipendenza di  $T_{ij}$ . Ci si basa su supposizioni assiomatiche.

(Noll Walter → 1953 concetti base meccanica del continuo; Truesdell presento 3 assiomi delle relazioni costitutive)

### 3 assiomi

1. Indipendenza dal futuro: assioma che ci dice la situazione tensionale è determinata dal passato.
2. Effetto locale: ciò che accade a una particella è influenzato da ciò che sta intorno e non da ciò che sta lontano.
3. Principio di indipendenza dal sistema di riferimento: se  $T_{ij}$  è un tensore simmetrico, dipenderà solo da tensori della stessa natura (quindi simmetrici); non può dipendere da un vettore ma da una parte simmetrica di un vettore.

(Matrice simmetrica / anti simmetrica)

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (\text{idrodinamica})$$

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}} \quad (\text{fluidodinamica, forma vettoriale})$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{forma indiciale})$$

( $\mathbf{E}_{ij}$  (parte simmetrica);  $\mathbf{\Omega}_{ij}$  (parte anti simmetrica); noti come  $A_{ij}$  e  $D_{ij}$ )

Ciò che conta è la parte simmetrica, la parte anti simmetrica non ci interessa. Quindi:

$T_{ij} = F(\mathbf{E}_{ij}, \text{stato termodinamico}) \rightarrow$  varrà quando il fluido è in movimento;  
quando il fluido è fermo dipenderà solo dallo stato termodinamico

Quindi:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \text{in condizioni idrostatiche}$$

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mathbf{G}_{ij} \quad \text{in condizioni dinamiche}$$

(Aggiunti)

( $p$  non dipende da  $\mathbf{E}_{ij}$ ; è lo stato termodinamico che è legato a  $p$ . Quindi è la velocità a essere in relazione con  $\mathbf{G}_{ij}$ .)

Faccio lo sviluppo in serie:

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ij} + C\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} + D\cdots + E\cdots + \dots$$

(I ordine; II ordine)

Per la maggior parte delle applicazioni  $\epsilon_{ij}$  si ferma al I ordine quindi siamo in zona lineare (fluidi newtoniani).

## Lezione 29 Aprile

### Ripasso/sintesi ultimi concetti

Equazione quantità di moto:  $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{T}$ .

Dobbiamo aggiungere equazioni per chiudere il sistema:

$$T_{ij} = F(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{ sistema termodinamico})$$

(Fluido, fluidodinamica)

$$T_{ij} \leftrightarrow \Phi_{ij}$$

$\sigma_{ij} = G(\epsilon_{ij})$  è tensore degli sforzi residui

$$\sigma_{ij} \leftrightarrow \Phi_{ij}^R = \mathbb{W}_{ij}$$

$$\rightarrow T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} \leftrightarrow D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(La dipendenza da velocità è tutta in  $\sigma$ .)

Si fa sviluppo in serie di  $\sigma_{ij} = G(\epsilon_{ij})$  con ipotesi di fluidi newtoniani; vogliamo legame lineare tra  $\sigma$  e  $\epsilon$ :

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ij} + \dots$$

Per la maggioranza dei fluidi, avere legame lineare è lezione. Al posto di B e in tutti gli altri casi potrei avere:

$B\epsilon_{kk} \rightarrow$  darebbe tensore  $\epsilon_{ij}$  mentre  $\epsilon_{kk}$  si elimina.

Quindi:

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ij} \quad (\text{caso generico})$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} \quad (\text{caso incompressibile})$$

(Il meno lo perdiamo per la convenzione sulla notazione.)

$$2\mu = B$$

( $\rightarrow$  il 2 sta a semplificarci il termine  $\frac{1}{2}$  di  $\epsilon_{ij}$ ; è scelta tradizionale)

$$\rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Nel caso incompressibile manca il pezzo di A quindi l'informazione di compressibilità sta in A.

$A = 0$  se incompressibile

$A \neq 0$  se compressibile / A è proporzionale a divergenza di  $\vec{u}$ .

Poiché la divergenza di un fluido incompressibile è 0 avremo che:

$A = 2\lambda \nabla \cdot \vec{u}$  associamo un  $\lambda$ .

A è proprio la divergenza  $\vec{u}$  quindi a seconda di incompressibilità/compressibilità parleremo o meno.

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \dots \\ \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{traccia del tensore} = \text{tr}(\epsilon_{ij}) = \epsilon_{kk} = \sum \epsilon_{kk}$$

Quindi:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

(Relazione costitutiva fluidi compressibili e incompressibili.  $\leftrightarrow$  è un numero, non è una matrice)

### Definizione di pressione

Il termine con  $\lambda$  porta conseguenze con la pressione.

#### Caso fluido in quiete – caso statico

$$p = \frac{-\text{tr}(T_{ij})}{3}$$

(Il meno è dovuto alla normale; in idrodinamica era  $p = \frac{\text{tr}(T_{ij})}{3}$ .)

Quindi  $\epsilon_{ij} = 0$  poiché siamo in caso statico:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \rightarrow \text{tr}(T_{ij}) = -p \cdot 3 \rightarrow p = -\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3}$$

#### Caso incompressibile ma in moto

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (\text{non c'è } \epsilon_{kk})$$

$$\text{tr}(T_{ij}) = -p \cdot 3 + 2\mu\text{tr}(\epsilon_{ij})$$

(È la divergenza ma siamo in caso incompressibile quindi si annulla.)

$$p = -\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3}$$

**Caso compressibile (in moto)**

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + (\lambda\epsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

$$\text{tr}(T_{ij}) = -p \cdot 3 + (\lambda\epsilon_{kk}) \cdot 3 + 2\mu\text{tr}(\epsilon_{ij})$$

(Divido per 3 e cambio segno)

$$-\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3} = p - \lambda\epsilon_{kk} - \frac{2\mu\text{tr}(\epsilon_{ij})}{3} = p - \epsilon_{kk} \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right)$$

(Termine aggiunto che si porta dietro  $\epsilon_{kk}$  che è divergenza di  $\vec{u}$  che si annulla nel caso incompressibile.)

Per una grande quantità di fluidi “casualmente”:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

(Ipotesi di Stokes, una delle tante)

Valida per gas monoatomici a bassa densità e con l’aria. Se abbiamo gas complessi ci dobbiamo portare il termine quindi non è che fluido diventa incompressibile ma è solo perché  $\lambda = 2/3\mu$  che si semplifica.

$(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \rightarrow$  viscosità volumetrica o bulk viscosity.

Quindi, in generale, per noi la pressione è:

$$p = -\frac{\text{tr}(\tau_{ij})}{3}$$

Riscriviamo equazione della quantità di moto in forma indiciale con queste considerazioni:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

(Quantità di moto, forma indiciale)

( $\downarrow$  qualunque indice va bene basta che il primo sia congruente con il primo membro)

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Si dice che  $\delta_{ij}$  annulla l’indice  $j$ , sparisce e rimane  $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ .

$$\lambda \frac{\partial(\epsilon_{kk})}{\partial x_i} \begin{bmatrix} \lambda\epsilon_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\epsilon_{kk} \end{bmatrix}.$$

(Tralasciando  $\mu$ )

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(Il laplaciano)

Scambio le derivate, mi soffermo sul secondo termine:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{kk})$$

(Traccia  $\downarrow$ )

Che è uguale al termine di primo. In idrodinamica era 0 poiché la divergenza di  $\vec{u}$  è 0 per fluido incompressibile.

Quindi: Equazione di Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{kk})$$

(Forma indiciale; indice di Einstein non è tensore ma vettore; qualunque lettera basta non sia  $i$ .)

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

(Laplaciano di  $\vec{u}$ ;  $\epsilon_{kk}$ , forma vettoriale)

Equazione di Navier-Stokes:

- Ipotesi di Stokes: abbiamo eliminato  $\lambda$  solo per alcuni gas
- Fluidi newtoniani: i legami lineari tra sforzi e gradiente di velocità

$\nabla^2$  è operatore scalare = laplaciano:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

La non linearità sta nel termine convettivo della derivata materiale:

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

## Lezione 3 Maggio

Equazione di Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{forza di massa}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}_{\text{termini dissipativi laplaciano}}$$

(Che viene da  $\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ; che viene da parte sferica del tensore delle tensioni  $\nabla \cdot (-p\vec{I})$ .)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(-p\delta_{ij}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

(Il  $\delta_{ij}$  attacca l'indice che si ripete.)

Il termine che viene da parte sferica del tensore delle tensioni.

Termini dissipativi laplaciano:  $\sigma = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u})\vec{I}$  (parte simmetrica; tiene conto della ipotesi di Stokes).

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

$$\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = 0$$

(Bulk viscosity)

$$p = -\frac{\text{tr}(\underline{\underline{T}}_{ij})}{3}$$

Fluidi newtoniani  $\rightarrow$  rapporto  $\mu$  ed  $\lambda$  sono proporzionali.

Il laplaciano  $\nabla^2$  è operatore scalare che non cambia ordine della quantità su cui opera:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$\nabla \times \vec{u} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} (\vec{u}(x, y, z))$$

Riprendiamo la quantità di moto in relazione alla vorticità:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

(Rotore della vorticità)

È quindi funzione della posizione e del tempo. La vorticità è utilizzata per tenere conto di zona in cui c'è più variazione.

L'effetto della vorticità è sempre presente.

Se ho condotto a sezione arbitraria, le linee di corrente sono parallele.

(Linee di flusso di corrente; no vorticità.)

(Vorticità)

Definire un vortice è molto complicato. È zona in cui  $\vec{\omega}$  (vorticità)  $\neq 0$  ed è confinata in una precisa zona.

Vortice occupa volume nello spazio.



Figura 5: Diagram showing a rectangular duct with parallel lines representing streamlines. A vector arrow labeled  $\vec{u}$  indicates the flow direction.



Figura 6: Diagram showing a curved line with arrows indicating flow direction, representing a vortex or a region of rotation.

Kelvin ed Helmholtz studiarono i vortici e diedero proprietà sui vortici (teoremi) valide ancora oggi.

$\vec{u} \rightarrow$  linee di corrente ( $\vec{u}$  definito punto per punto)

$\vec{\omega} \rightarrow$  linee di vorticità ( $\vec{\omega}$  sempre tangente a linea di vorticità come la  $\vec{u}$  per linea di flusso/corrente)

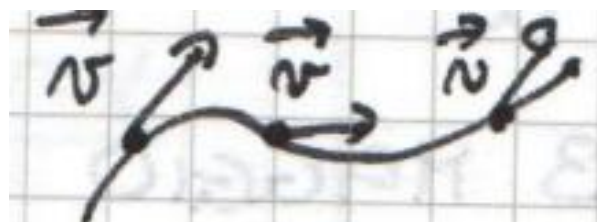


Figura 7: Diagram showing several small arrows representing vorticity vectors ( $\omega$ ) along a curved line.

Linea di vorticità.

Linea di corrente è in generale perpendicolare a linea di vorticità.

In un gorgo (es. laundino).

In generale, il vortice è l'insieme delle linee di vorticità.

Filetto vorticoso  $\rightarrow$  quando linea materiale è infinitesima  $\leftrightarrow$  superficie infinitesima.

Linea materiale è linea chiusa costituita sempre dalle stesse particelle. Vortice è insieme delle linee di vorticità che passano attraverso superficie della linea materiale.

Le linee di vorticità possono essere diverse ma hanno una certa coerenza.

L'intensità del vortice deve essere misurata di quanto girano le particelle.

Matematicamente usiamo il calcolo dell'integrale di linea della velocità o circuitazione.

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

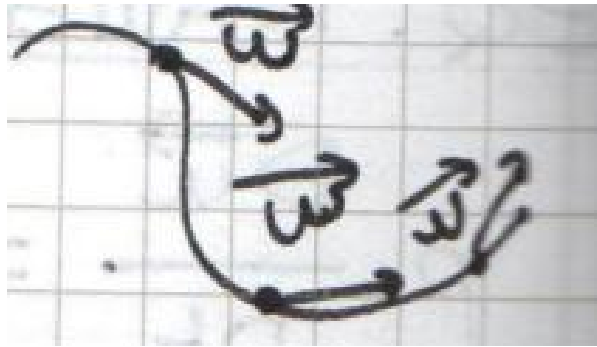


Figura 8: Diagram showing a closed loop with arrows representing vorticity vectors ( $\omega$ ) along its perimeter.

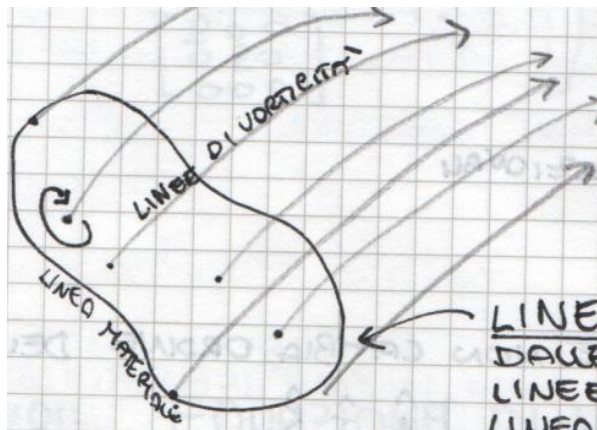


Figura 9: Diagram showing a closed loop labeled 'LINEA MATERIALE' with arrows representing 'LINEE DI VORTICITÀ' passing through its surface.

Prendo elemento della linea materiale, vedo quanto vale  $\vec{u}$  e calcolo ciò su tutta la linea.

↓ Tramite teorema di Stokes

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$

(prodotto scalare)

S è la superficie individuata da linea chiusa.

$\vec{n}$  è perpendicolare alla superficie.

$\vec{\nabla} \times \vec{u}$  è vorticità di  $\vec{u} = \vec{\omega}$ .

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$$

Se  $\vec{\omega} = 0 \rightarrow$  intensità  $\Gamma = 0$ .

Tutte queste considerazioni tridimensionali e fisiche furono fatte da Helmholtz.

Kelvin guardò solo il fenomeno in modo matematico.

Kelvin pose alcune ipotesi per giungere a considerazioni rilevanti:

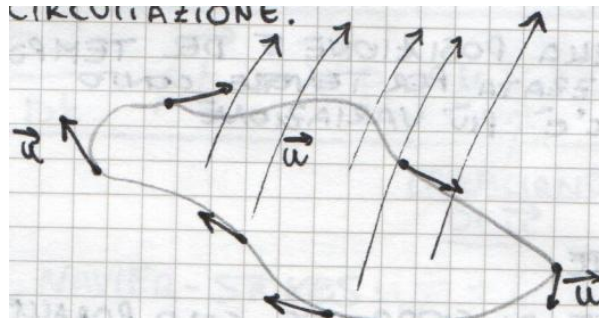


Figura 10: Diagram showing a closed loop with arrows representing velocity vectors ( $u$ ) and vorticity vectors ( $\omega$ ) along its path.

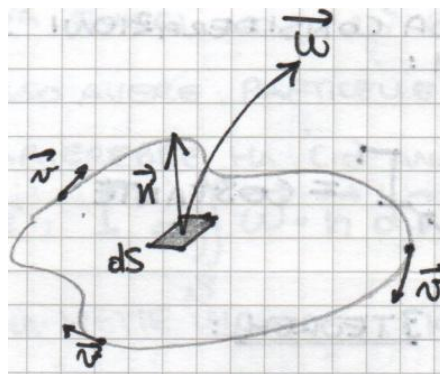


Figura 11: Diagram of a closed surface  $S$  with normal vector  $n$  and a vector  $u$ . A differential area element  $dS$  is shown on the surface. A vector  $w$  is shown as the cross product of  $u$  and  $n$ . A line integral path  $l$  is also indicated on the surface.

- $Re = \frac{\rho u L}{\eta} \rightarrow \infty$  (nei nostri casi se  $Re$  è grande, consideriamo il termine viscoso trascurabile, che non significa 0!)
- Forze di massa conservative cioè  $\vec{F} = -\nabla G$  (potenziale gravitazionale in questo caso; se  $\vec{F}$  è conservativo, rotore  $\vec{\omega} = 0$ )
- Flusso incompressibile  $\rightarrow \rho = \text{costante}$  (aveva anche considerato flusso barotropico cioè  $p(R)$  ma noi lo consideriamo incompressibile)

Se valgono tutte queste ipotesi:

$$\boxed{\Gamma = \text{costante}} \leftrightarrow \boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$$

La velocità sul dorso è maggiore poiché il fluido dovrà percorrere più spazio rispetto al flusso del ventre. Dal teorema di Bernoulli avremo che la pressione sarà maggiore sul ventre.

Se prendiamo linea materiale chiusa:

Se profilo non si muove:

$$\Gamma = 0 \quad \text{a } t = 0$$

Anche se in moto il termine  $\Gamma$  si annulla per la presenza di due termini opposti:

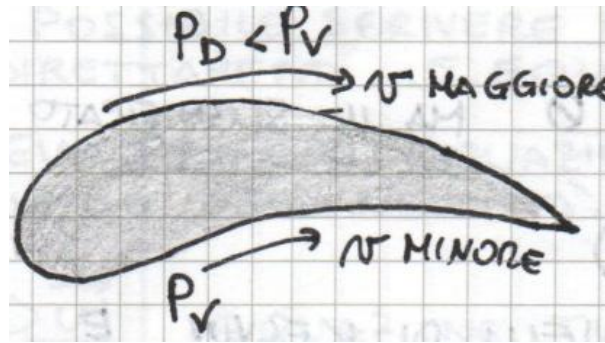


Figura 12: Diagram of a fluid flow profile. The pressure on the top surface is labeled  $P_D$  and is greater than  $P_V$  on the bottom surface. The flow velocity is labeled  $V$ .

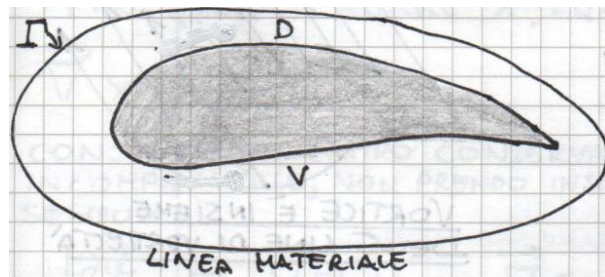


Figura 13: Diagram of a closed material line  $D$  moving with velocity  $V$ . The line is labeled LINEA MATERIALE.

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2$$

Tanto più è intenso  $\Gamma_2$  quanto è grande  $\Gamma_1$ .

Se siamo nell'aeroporto il  $\Gamma_2$  si chiama in gergo "vortice di aeroporto" altrimenti vortici di estremità.

Grazie alla viscosità questo vortice svanisce per diffusione  $\propto \nabla^2 \vec{\omega}$ .

Helmholtz partì da considerazioni di Kelvin ed estese il risultato al caso dei vortici:

Helmholtz definì 3 teoremi:

1. Se prendo altre linee materiali ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ ) si dimostra che tutte queste intensità sono uguali. L'intensità è quindi costante lungo il vortice (con ipotesi di Kelvin).

## Lezione Meccflu 5 Maggio

Definiamo la vorticità  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ .

Definiamo  $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{e}$  associata a linea materiale; per ogni elementino  $d\vec{e}$  faccio scalare alla  $\vec{u}$  corrispondente.

(Definito da vettore tangente)

$\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$  (tramite Stokes) da intensità integrale di superficie su superficie materiale.

Definiamo teorema di Kelvin come  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  sotto certe ipotesi che incontreremo anche nei flussi potenziali.

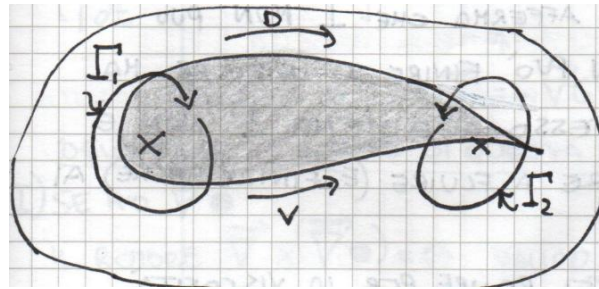


Figura 14: Diagram of a closed material line  $D$  moving with velocity  $V$ . Two vortices are shown inside the line, labeled  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ . Arrows indicate the direction of rotation for each vortex.

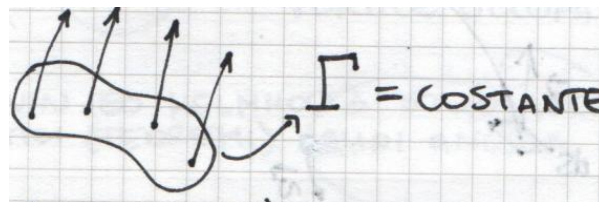


Figura 15: Diagram of a vortex line with arrows indicating circulation. The text next to it is  $\Gamma = \text{costante}$ .

Quindi  $\Gamma = \text{costante}$ .

Nella letteratura possiamo trovare anche  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  ma il significato è lo stesso (Kelvin si chiamava Thomson, è la stessa persona).

Teoremi di Helmholtz vennero prodotti dopo quelli di Kelvin e riguardano i vortici.

Kelvin da linea materiale  $\rightarrow$  Helmholtz a vortici da linea a 3D.

(Vortice è insieme delle linee di vorticità)

### 1. Primo teorema di Helmholtz

Afferma che  $\Gamma$  non può variare. Il vortice non può finire o iniziare ma solo chiudersi in se stesso altrimenti  $\Gamma$  non è uguale. Può però iniziare a fluire (e finire anche) ai confini del campo.

Nella realtà un vortice si rompe per la viscosità: ora la viscosità non la consideriamo. Il vortice può variare nella forma.

### 2. Secondo teorema di Helmholtz

Se una particella si trova nel vortice, non può uscire da questo, o una particella che si trova fuori non può entrare per definizione di linea materiale (non posso avere particelle in più o in meno). Se particella scappasse, la vorticità varierebbe ma ciò andrebbe contro il primo teorema di Helmholtz poiché:  $\Gamma = \oint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$ .

### 3. Terzo teorema di Helmholtz

Questo teorema mette insieme teorema di Kelvin e Helmholtz; intensità è costante nel tempo cioè:

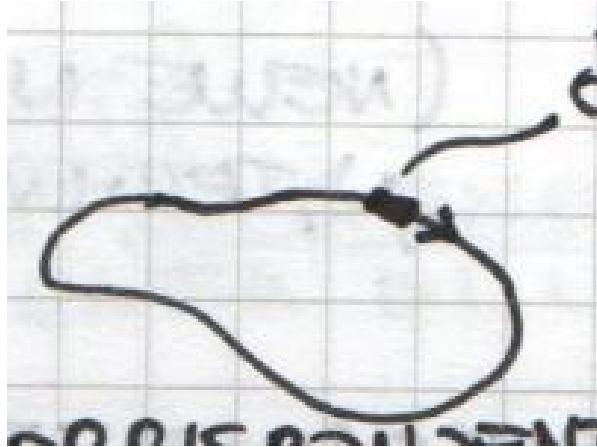


Figura 16: Diagram of a small element  $d\vec{e}$  on a material line, with a tangent vector  $d\vec{e}$ .

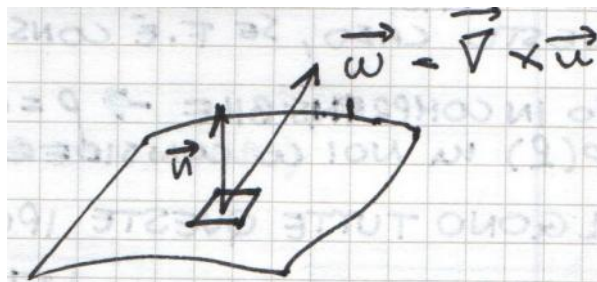


Figura 17: Diagram illustrating Stokes' theorem. It shows a surface  $S$  with a boundary line. A vector  $\vec{u}$  is shown at a point on the boundary, and the vorticity  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  is shown as a vector perpendicular to the surface.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \rightarrow \Gamma = \text{costante}$$

Formalmente è simile a quello di Kelvin ma Kelvin parla di linea materiale e non di vorticità. Con questi teoremi si spiegano i vortici di aeroporto, vortici di estremità o tornado. Per progettare devo avere la vorticità punto per punto e istante per istante.

$\vec{\omega}(x_i, t)$  mi serve quindi una trattazione differenziale.

La forma integrale mi dà informazioni generali.

Da le equazioni di governo nelle 6 variabili (3 componenti di velocità, densità, pressione, temperatura, le risolvo numericamente, mi calcolo velocità e uso il rotore).

È possibile scrivere direttamente la vorticità rispetto  $\vec{u}$ , quindi scrivo direttamente le equazioni con vorticità.

Devo trovare equazione di trasporto della vorticità che mi sostituisca quelle della velocità:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$$

(Equazione tipo quella di Navier-Stokes.)

→ Farò quindi il rotore dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\vec{\nabla} \times (\text{N.S.})$$

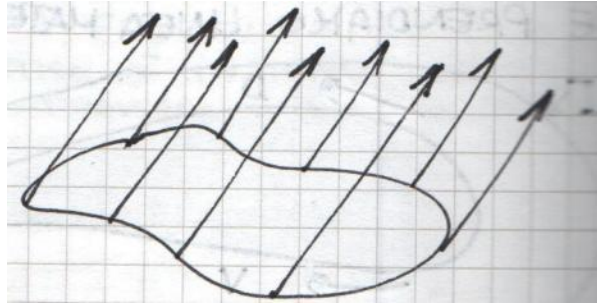


Figura 18: Diagram of a vortex line with arrows indicating circulation.

Consideriamo campo conservativo per l'equazione di massa e un fluido incompressibile; non prendo insomma le equazioni generali ma altre più semplici:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] = -\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} (+0)$$

(in cui  $\vec{f}_k = -\vec{\nabla} G$ )

Non c'è il termine  $\frac{\mu}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  ma anche se ci fosse si annullerebbe.

Non c'è poiché stiamo considerando un fluido incompressibile, pertanto annullandolo la densità rimane costante.

Devo fare il rotore di questa equazione:

I) Se ho  $\vec{\nabla} \bullet$ : il rotore  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \bullet) = 0$  valido per qualunque grandezza.

II) Se ho  $\vec{\nabla}^2$ : il rotore  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}^2 \bullet) = \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \times \bullet)$  solo se la grandezza è un vettore.

Quindi:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] = \vec{\nabla} \times \left[ -\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \right]$$

Considerando  $\rho = \text{costante}$  (se  $\rho$  non fosse costante sarebbe stato tutto diverso):

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = \mu \nabla^2 \vec{\omega}$$

(Lo sviluppo come:  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$ .)

Facendo i conti  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$ , con ipotesi di comprimibilità, rimangono 2 contributi:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} \right] = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

(Spostato al secondo membro)

Diviso tutto per  $\rho$ :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

(Equazione di trasporto della vorticità. Importante!)

In cui  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  è viscosità cinematica.

Per far comparire  $\frac{D}{Dt}$  non ho portato dentro il rotore!

$$\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} \neq \frac{D\vec{\omega}}{Dt}$$

Perché c'è termine non lineare  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  da cui invece escono due termini con cui trovo  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$ .

Interpretiamo fisicamente: la vorticità varia nello spazio e nel tempo a causa di due fattori:

- 1) Effetto di diffusione  $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$
- 2) Effetto  $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$

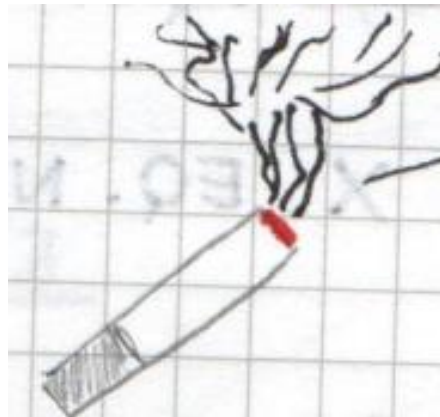


Figura 19: Diagram of a lit cigarette with smoke diffusing outwards. Si diffonde.

Se non fosse viscoso il vortice rimarrebbe.

$\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  è il vortex stretching (stiramento del vortice).

Fisicamente indica il fatto che la vorticità varia perché c'è campo di velocità non uniforme (se fosse costante il gradiente sarebbe nullo).

Prendiamo un condotto convergente:

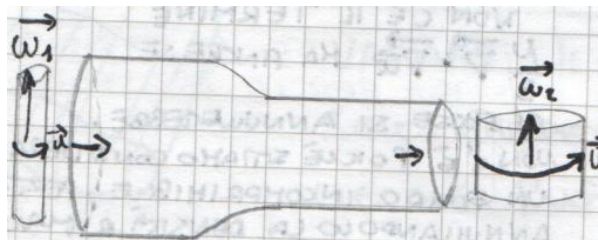


Figura 20: Diagram of a convergent duct with a vortex entering and stretching as it moves through the narrowing section.

Esiste un gradiente di velocità.

La vorticità sarà diversa in ingresso ed uscita.

Vortice che gira entrando verticalmente nel campo di moto sarà schiacciato.

Per Helmholtz, essendo formato dalle stesse particelle, in uscita sarà diverso.

→  $\vec{\omega}$  sarà più piccolo in uscita che in ingresso:  $\omega_2 < \omega_1$ .

Se adesso questa altra condizione:

$$\vec{\omega}_2 > \vec{\omega}_1$$

La vorticità varia non solo per effetto viscoso e di trasporto ma anche per il contributo della velocità.

Vortex stretching  $\rightarrow$  turbolenza.

Se il campo di moto (quindi  $\vec{u}$ ) è caotico, l'azione della velocità spezza i vortici più grandi in vortici sempre più piccoli.

Esempio: flusso turbolento.

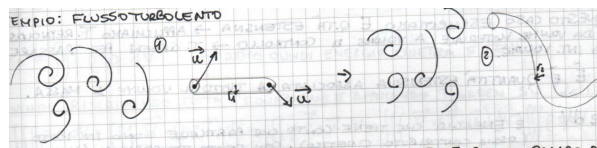


Figura 21: Diagram illustrating vortex stretching. It shows a large vortex (1) being stretched and broken into smaller vortices (2) by a velocity field ( $u$ ).

Quindi concentrandoci su sezioni di inizio e fine, per il campo di moto può variare la vorticità il vortice si deforma per evitare la parte finale si allontana; è quasi impossibile che trasli.

Se si allunga avremo che:  $\vec{\omega}_2 > \vec{\omega}_1$  e  $r_2 < r_1$ . È avvenuto trasferimento di energia.

Concentrandosi sempre sugli estremi, il vortice viene dissipato in calore.

Cascata di energia: è legata all'effetto del vortex stretching (Kolmogorov formalizzo questo meccanismo nel 1941).

Se ho vortice grande, a seconda dei casi, il vortice dura di più o meno (dura, no).

Se elimino  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$  (vortex stretching) ho dei vortici di scala grande che vengono dissipati in un tempo molto più lungo.

Se riscriviamo equazione in 2D:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + 0$$

(Si annulla)

Faremmo il prodotto tra velocità sul piano e vorticità perpendicolare.

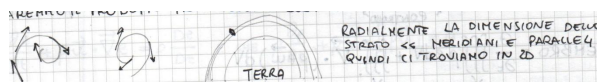


Figura 22: Diagram showing the Earth (Terra) with a vortex structure. Arrows indicate the velocity field and vorticity. Text explains that radially the dimension of the layer is much smaller than the meridians and parallels, thus finding it in 2D.

Un uragano se tocca la terra risente dell'effetto 3D attuando così il meccanismo del vortex stretching.

Su Giove il vortice sta sempre lì perché i tempi caratteristici di vita sono lunghi e non c'è nulla che lo può intaccare.

## Equazione di bilancio dell'energia

Lezione 6 maggio.

Si parte dalla I equazione della termodinamica:

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q$$

Il segno è generico. Nelle varie applicazioni può cambiare per  $L$  e  $Q$ . I segni verranno fuori esplicitando.

Lavoro (su terra)  $L \leftrightarrow L_M$  di massa;  $L_S$  di superficie.

Calore (su terra)  $Q \leftrightarrow$  prodotto scambiato, entropico, entalpico.

Anche in questo caso esplicitiamo e quantità estensiva  $\rightarrow$  applichiamo teorema di Reynolds per passare da volume materiale a volume di controllo  $\rightarrow$  teorema di Green per passare da integrale di superficie a integrale di volume.

(I membro)  $E$  è quantità estensiva associata a tutto il volume e massa:

$$E = \iiint_V \rho e dV$$

È energia che tiene conto che particelle sono in moto (ossia contributo cinetico), con certa temperatura (moto vibratorio molecolare).

(Materiale)

$$e = \frac{1}{2}u_i^2 + U \quad \text{in cui} \quad \frac{1}{2}u_i^2 = \frac{1}{2}u_i \cdot u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

(Energia interna)

Non c'è la massa  $m$  in  $\frac{1}{2}mu_i^2$  poiché  $E$  è quantità intensiva, è energia per unità di massa.

Energia interna:

$$dU = c_v dT$$

(Calore specifico a volume costante)

Mentre:

$dH = c_p dT$  è entalpia ma tiene conto sia di pressione che di energia interna puramente legata alla temperatura.

$$e = \frac{1}{2}u_i^2 + U$$

(Energia termo-cinetica  $\rightarrow$  energia in unità di massa)

$\frac{DE}{Dt}$  è equazione scalare e siamo ancora in ottica lagrangiana quindi con volume materiale.

Applico il teorema di Reynolds:

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \rho e \vec{u} \cdot \vec{n} dS \xrightarrow{\text{T. Green}} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) dV$$

(Controllo)

$$\text{I membro} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) dV$$

Analizziamo ora il secondo membro:

$$\text{II membro } L = L_M + L_S \quad (\text{potenza} = \vec{F} \cdot \vec{u})$$

(Potenza di massa; potenza di superficie)

L non è proprio lavoro ma potenza per omogeneità dell'equazione.

Quindi:

$$= \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iint_S (\vec{T} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$

(V e controllo)

Applico ora teorema di Green e prendo il I membro:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) dV + Q$$

Dobbiamo ora studiare il calore  $Q$  (altro modo in cui energia può variare):

$$Q \begin{cases} \nearrow \text{entrante} \\ \searrow \text{uscente} \end{cases}$$

$$\rightarrow Q = Q_S + Q_P$$

(Scambio; prodotto)

$$Q_S = - \iint_S \vec{K} \cdot \vec{n} dS$$

$$Q_P = \iiint_V \rho q dV$$

Avremo quindi energia cinetica e termica.

Quindi riscrivendo tutta l'equazione e applicando teorema di Green su  $Q_S$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) dV + \iiint_V \rho q dV - \iiint_V \nabla \cdot \vec{K} dV$$

### Equazione bilancio energia – forma integrale

Riscriviamo l'equazione in forma differenziale assumendo arbitrario il volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) = \rho q - \nabla \cdot \vec{K} + \rho \vec{F} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u})$$

### Equazione bilancio energia – forma differenziale

Posso ancora semplificare per far uscire la derivata materiale:

Vettore  $\vec{K}$  ha 3 componenti (3 nuove incognite  $K_1, K_2, K_3$ ), devo legare  $\vec{K}$  con quantità che già ho, in questo caso la temperatura. Svolgo le derivate dei prodotti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) = \dots \quad \text{ossia} \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) = \dots$$

Metto insieme  $\rho \vec{u}$  e  $e$  per  $\nabla \cdot (\rho e \vec{u})$  così da semplificarlo:

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla e + e \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \nabla \cdot [\rho e \vec{u}]$$

Quindi sapendo che:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla e = \rho \frac{De}{Dt} \quad \text{e che} \quad \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \nabla \cdot [\rho e \vec{u}] = 0$$

Avremo che:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) dV + \iiint_V \rho q dV - \iiint_V \nabla \cdot \vec{K} dV$$

(Equazione di bilancio energia con semplificazione I membro)

Adesso vediamo il II membro:

$\vec{K}$  va legato a quantità primitivo, in questo caso la temperatura  $T$ :

$$\vec{K} = -\lambda \nabla T$$

(Il meno è dovuto al fatto che la direzione del vettore flusso è opposta a direzione flusso.  $\lambda$  è conducibilità termica.)

La derivata è positiva se il calore scambiato è il gradiente di temperatura.

Quindi possiamo sostituire:

$$-\nabla \cdot \vec{K} = +\lambda \nabla \cdot (\nabla T)$$

Facciamolo con gli indici:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda \nabla^2 T$$

$$-\nabla \cdot \vec{K} = \lambda \nabla^2 T$$

Adesso analizziamo  $\vec{T} = -p\vec{I} + \vec{\sigma}$ .

Adesso facciamo tensore  $\vec{T}$  per  $\vec{u}$  e poi divergenza:

$$\nabla \cdot (-p\vec{I} \cdot \vec{u} + \vec{\sigma} \cdot \vec{u})$$

(forma vettoriale)

( $\vec{\sigma}$  lo possiamo anche esprimere ma non ci interessa ora):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (-p\delta_{ij}u_j + \sigma_{ij}u_j) = -p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}u_j) = -p(\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p$$

(Indice ripetuto mi dà sommatoria; indici devono essere uguali.)

Quindi mettendo insieme la semplificazione del II membro:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p(\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(In cui abbiamo; assumiamo a  $\mu \nabla^2 \vec{u}$  fa lo stesso effetto della viscosità.)

### Caso in cui equazione si semplifica: equazione di Bernoulli in forma generale

- Flusso incompressibile:  $\rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$  in particolare  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
- Fluido inviscido  $\mu = 0$  (effetti viscosi trascurabili)  $\rightarrow \vec{\sigma} = 0$
- $q = 0$  (no produzione di calore)
- $\lambda = 0$  (no scambio di calore) (flusso  $\neq 0$  non la conducibilità che è una proprietà)
- Forze di massa conservative:  $\rho \vec{f} = -\rho \nabla G$
- Flusso stazionario:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

L'equazione si semplifica notevolmente:

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla e = -\rho \vec{u} \cdot \nabla G - \vec{u} \cdot \nabla p$$

(Rimane solo termine convezione ma è prodotto scalare non cambia. Ho invertito.)

Divido tutto per  $\rho$ :

$$\vec{u} \cdot \nabla e = -\vec{u} \cdot \nabla G - \vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

(È l'entropia)

Porto tutto al primo membro:

$$\vec{u} \cdot \nabla e + \vec{u} \cdot \nabla G + \vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Esplicito e:

$$\vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2}u^2 + U + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

(H)

Posso riscriverlo in un modo più compatto:

$$\vec{u} \cdot \nabla H = 0$$

(H è entalpia totale ossia energia che tiene conto di tutte le altre energie che abbiamo preso in considerazione.)

### Teorema di Bernoulli

$$\vec{u} \cdot \nabla H = 0 \quad \text{Se } H = \text{costante}$$

Valido sotto una precisa serie di ipotesi; la somma di questi termini è costante. Rispetto a idrodinamico la U non compariva perché non erano tenuti in conto (anche se flusso è incompressibile).

Altra situazione in cui  $\vec{u} \cdot \nabla H = 0$  è quando  $\vec{u} \perp \nabla H$ :

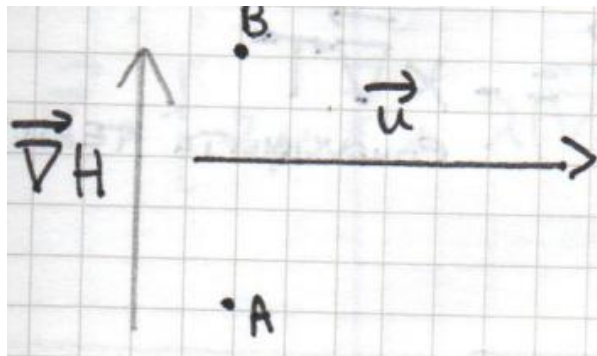


Figura 23: Diagram showing a velocity vector  $\vec{u}$  pointing right and a gradient vector  $\nabla H$  pointing up, indicating they are perpendicular.

$H_B \neq H_A$  perché il gradiente è perpendicolare ad  $\vec{u}$ . L'importante è che H vari con gradiente perpendicolare a velocità.

$H_A = H_B$  altrimenti avremmo gradiente parallelo ad  $\vec{u}$ .  $H_A \neq H_C$  perché  $\nabla \perp$  ad  $\vec{u}$ . Quindi H è costante lungo le linee di flusso/corrente.

(H = costante lungo le linee)

Ciò che si conserva è la distribuzione spaziale di H. Ogni linea ha la sua entalpia locale. L'energia si conserva lungo le linee. È flusso isoenergetico, ossia la quantità di entalpia non varia lungo le linee.

Se  $H_A = H_B = H_C \rightarrow$  flusso omoenergetico.

(Iso  $\rightarrow$  costanza su linea di flusso; omo  $\rightarrow$  costanza in tutto il flusso)

Equazione di energia è l'ultima equazione di governo:

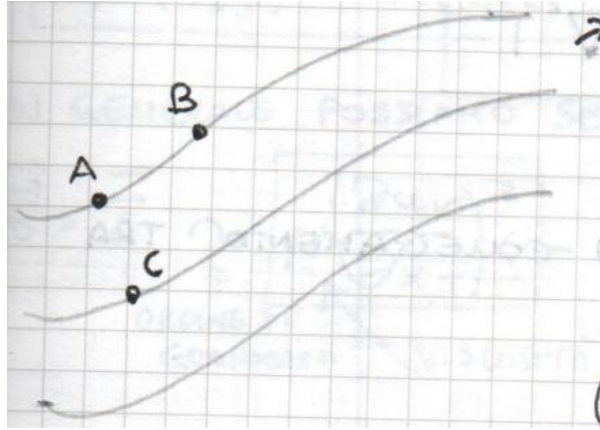


Figura 24: Diagram showing streamlines A, B, and C. Points A, B, and C are marked on these streamlines.

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q \quad (\text{equazione scalare})$$

Il punto di partenza è sempre principio primo:

$$E = \iiint_V \rho e \, dV = \frac{1}{2} u_i^2 + U \quad (\text{I principio termodinamica})$$

(In cui E è energia per unità di volume)

Per arrivare a definire l'equazione di bilancio dell'energia abbiamo applicato il teorema di Reynolds al principio primo, poi il teorema di Green per passare da integrali di superficie a integrali di volume ed infine, posta l'arbitrarietà del volume, trovata la forma differenziale; abbiamo inoltre manipolato la derivata per riscrivere il primo membro con  $\rho \frac{De}{Dt}$ .

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) + \rho q - \nabla \cdot \vec{K} \quad (\vec{K} = -\lambda \nabla T)$$

(Calore prodotto; calore scambiato; conducibilità termica)

Avremo:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p - p \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(Equazione bilancio energia)

Adesso semplifichiamo l'equazione in modo da avere un collegamento tra termine cinetico e temperatura. Voglio semplificare la parte di U.

Ricordando che  $e = U + \frac{1}{2} u_i^2$  e  $dU = c_v dT$ :

Cerco equazione per energia cinetica del tipo:

$$\frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt} \quad \text{da sottrarre a} \quad \frac{DU}{Dt} \quad (u_i du = \frac{du_i^2}{2})$$

Pertanto moltiplicherò l'equazione di Navier-Stokes per vettore  $\vec{u}$ , quindi:

$$\frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt} = (\text{N.S.}) \cdot \vec{u} \quad (\text{equazione scalare})$$

Quindi: moltiplichiamo scalarmente per  $\vec{u}$  l'equazione di N.S.

$$\left[ \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\rho \vec{F} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\sigma}}_{\nabla \cdot \vec{T}} \right] \cdot \vec{u} = \rho \frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma})$$

Il primo membro si dimostra che diventa quello che cerchiamo ( $u_i du = \frac{du_i^2}{2}$ ).

Adesso devo fare l'equazione  $\rho \frac{De}{Dt} = \dots$  e l'equazione  $\rho \frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt} = \dots$

Poiché  $U = e - \frac{1}{2}u_i^2$ :

Facendo i calcoli mi rimane:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} + (\vec{\sigma} \cdot \nabla \vec{u}) + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \vec{\sigma}) - \vec{u} \cdot \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(Ho svolto il prodotto tra derivate)

Sappiamo inoltre che il termine:

$$\vec{\sigma} \cdot (\nabla \vec{u}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}$$

(Matrice simmetrica; scomposto ci dà parte simmetrica e antisimmetrica quindi prendo solo parte simmetrica  $\vec{\epsilon}$  poiché  $\vec{\omega}$  si annulla con il prodotto scalare.)

Adesso sostituiamo al posto di  $\frac{DU}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt}$  in cui abbiamo effettuato il passaggio da derivata a derivata materiale in  $dU = c_v dT$  e in cui abbiamo considerato  $c_v$  costante:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(Questa equazione sta a significare: come varia nello spazio e nel tempo la temperatura varia per pressione (con  $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ ) c'è caso compressibile, termine di scambio di calore q, calore prodotto  $\rho q$  ed infine  $\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon}$  c'è la viscosità.)

Possiamo semplificarla ulteriormente:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} &= \left[ 2\mu \vec{\epsilon} + \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \vec{I} \right] \cdot \vec{\epsilon} = 2\mu \underbrace{E_{ij} E_{ij}}_{\text{forma indiciale}} + \lambda \underbrace{E_{kk}}_{\text{prodotto scalare}} \underbrace{E_{ij} E_{ij}}_{\text{ekk}} \\ &= 2\mu (E_{ij})^2 + \lambda (E_{kk})^2 = \sigma_{ij} E_{ij} \quad \text{in cui } E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

In generale possiamo semplificare questa espressione:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \sim \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)^2$$

(Ordine di grandezza; viscosità; gradiente di velocità; il prodotto dei tensori è legato a viscosità e velocità.)

Il calore cresce con gradiente di velocità. È termine che mi consuma energia cinetica convertendola in energia termica.

Vicino a un corpo c'è gradiente di velocità. La presenza del gradiente rende importante la temperatura, che quindi non va trascurata.

Portarsi dietro tutti questi termini non è buono.

Quindi:

$$\sigma_{ij} E_{ij} = \mu \phi^2$$

Lo riscriviamo così; non ci importa di  $\phi$ , ci deve solo par ricordare che c'è la velocità a influenzare il fenomeno.

Quindi: equazione energia in termini energia interna.

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \mu \phi^2 + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(Energia interna)

### Equazione bilancio energia tramite entalpia

In termodinamica abbiamo anche entalpia  $h$  (parente dell'energia interna; ha tiene conto anche della pressione):

$$h = U + p \underbrace{v}_{\text{volume specifico}} = U + \frac{p}{\rho}$$

(Pressione; volume specifico)

E  $dH = c_p dT$ .

Dobbiamo trovare un'equazione di bilancio tramite entalpia:

$$U = h - \frac{p}{\rho} \quad \text{e derivo:}$$

( $\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$  li trattiamo allo stesso modo)

$$dU = dh - d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho} dp + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

(In cui  $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$ )

Il differenziale diventa derivata materiale:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{DU}{Dt}$$

Quindi:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} + \mu \phi^2 + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

$$\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \rightarrow \rho \left( \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{u} \right) \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

(Equazione di conservazione della massa)

Quindi i due termini si elidono:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \phi^2 + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(II. Equazione energia in termini entalpia)

Equazione energia termica in termini di temperatura ricavata dall'entalpia e forma che si usa più frequentemente.

La pressione varia nello spazio ( $\frac{Dp}{Dt}$ ), c'è dissipazione di calore  $\mu \phi^2$ , produzione di calore  $\rho q$  e cambio calore  $\lambda \nabla^2 T$ .

Ora ricaviamo equazione analoga in termini di entropia (II principio termodinamica):

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

(Misura il grado di disordine del sistema)

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \mu \phi^2 + \rho q + \lambda \nabla^2 T$$

(III. Equazione energia in termini di entropia)

(Equazione di bilancio energia termica in termini di entropia)

L'unica differenza è che la pressione non fa variare l'entropia.

Dividendo tutto per  $\rho T$  (poiché solo variabili sempre positive) ottengo in particolari condizioni (cioè sotto alcune ipotesi, es. cambio di calore nullo, viscosità trascurabile):

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

Con ipotesi di stazionarietà notare:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \nabla S = 0$$

(Flusso isentropico  $\rightarrow$  entropia è costante lungo linee di flusso.)

Quindi si conserva:  $S_1, S_2, S_3$ .

Possiamo anche avere il caso di flusso omoentropico. Lungo tutte le linee (si mantiene costante ed uguale in ogni punto).

$$S_1 = S_2 = S_3$$

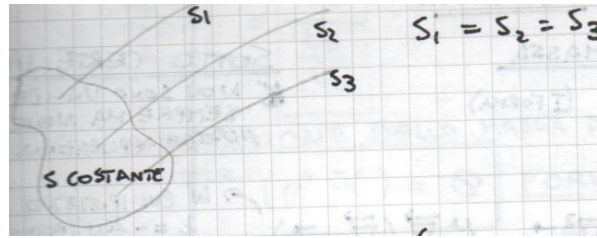


Figura 25: A diagram of a nozzle with a circular cross-section. Three lines are drawn through it, labeled  $S_1$ ,  $S_2$ , and  $S_3$ . The text “S COSTANTE” is written inside the nozzle, indicating that the entropy is constant along these lines.

## Teorema di Crocco

(Era un italiano)

Crocco dimostrò che sotto certe condizioni (alcune ipotesi di sopra) se abbiamo differenza di entropia tra linee allora abbiamo vorticità.

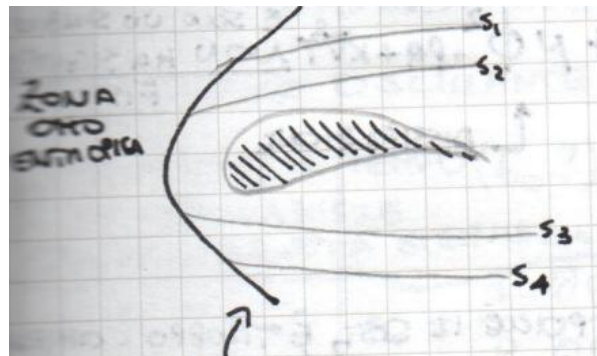


Figura 26: Diagram of a nozzle with entropy lines and a shock wave.

“latex

## 0.2 Il teorema di Crocco e la generazione di vorticità

Un risultato di grande rilevanza nella fluidodinamica compressibile è il **teorema di Crocco**<sup>1</sup>, il quale stabilisce un legame diretto tra gradienti di entropia e vorticità nel campo di moto. Sotto le ipotesi di flusso stazionario, adiabatico e privo di forze di massa non conservative, Crocco dimostrò che se tra le linee di corrente sussiste una differenza di entropia, allora il campo di moto possiede necessariamente vorticità.

**Applicazione al caso di un ugello con onda d’urto.** Si consideri un ugello convergente-divergente in cui il flusso a monte sia omoentropico, ossia con entropia uniforme su tutte le linee di corrente ( $S_1 = S_2 = S_3$ ). In presenza di un’onda d’urto all’interno dell’ugello, le diverse linee di corrente attraversano l’urto in punti differenti e subiscono variazioni di entropia diverse. A valle dell’urto, pertanto, le entropie sulle singole linee di corrente non sono più uguali tra loro.

<sup>1</sup>Luigi Crocco (1909–1986), ingegnere e fisico italiano, contribuì in modo fondamentale alla teoria dei flussi compressibili e alla propulsione.

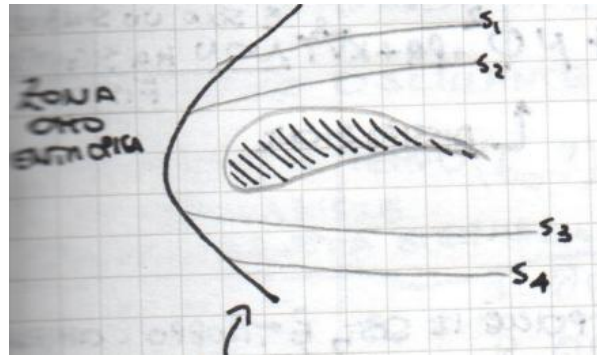


Figura 27: Ugello convergente-divergente con onda d'urto: a monte il flusso è omoentropico, ma a valle dell'urto le linee di corrente presentano entropie differenti.

Per il teorema di Crocco, la presenza di un gradiente di entropia implica l'esistenza di vorticità:

$$\vec{\nabla} S \neq \vec{0} \implies \vec{\omega} \neq \vec{0}. \quad (1)$$

Questo risultato è particolarmente significativo dal punto di vista applicativo: anche partendo da un flusso inizialmente irrotazionale e omoentropico, il passaggio attraverso un'onda d'urto — caratterizzata da una variazione improvvisa di pressione ed entropia — genera inevitabilmente vorticità a valle.

**Interpretazione fisica.** L'onda d'urto agisce come una sorgente di entropia e, di conseguenza, di vorticità. Poiché l'intensità dell'urto varia lungo la sua superficie (le linee di corrente lo attraversano con angoli e numeri di Mach locali differenti), ciascuna linea di corrente subisce un incremento di entropia diverso. Il gradiente trasversale di entropia così generato è, per il teorema di Crocco, indissolubilmente legato alla comparsa di moto rotazionale.

**Disuguaglianza di Clausius–Duhem.** Integrando l'equazione di bilancio dell'energia in forma entropica sull'intero volume di controllo  $V$ , nell'ipotesi di produzione volumetrica di calore  $\dot{q} \geq 0$ , si può dimostrare che<sup>2</sup>

$$\iiint_V T \frac{DS}{D\tau} dV \geq 0. \quad (2)$$

La variazione di entropia del sistema può dunque essere soltanto positiva o, al più, nulla: l'entropia non può mai diminuire in un processo reale. Questo vincolo termodinamico è alla base della irreversibilità associata alle onde d'urto e, più in generale, a tutti i fenomeni dissipativi.

### 0.3 Il sistema completo delle equazioni di governo

Raccogliamo ora il sistema completo di equazioni che governano il moto di un fluido viscoso compressibile. Le incognite del problema sono quattro campi: la velocità  $\vec{u}$ , la temperatura  $T$ , la pressione  $p$  e la densità  $\rho$ .

**Equazione di conservazione della massa (I forma).**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (3)$$

<sup>2</sup>Si tratta della forma integrale della disuguaglianza di Clausius–Duhem, che esprime il secondo principio della termodinamica per sistemi continui.

**Equazioni di Navier–Stokes.** Sotto l'ipotesi di Stokes<sup>3</sup> ( $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ ), le equazioni della quantità di moto assumono la forma:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}), \quad (4)$$

dove  $\vec{f}$  rappresenta la forza di massa per unità di massa e  $\mu$  è la viscosità dinamica.

**Equazione dell'energia in termini entalpici.**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + k \nabla^2 T, \quad (5)$$

in cui  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $k$  la conducibilità termica e  $\Phi$  la funzione di dissipazione viscosa<sup>4</sup>. Si noti che nella forma espansa la derivata sostanziale della pressione si scrive  $Dp/Dt = \partial p/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla p$ .

**Equazione di stato.** Per un gas ideale:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (6)$$

dove  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  per l'aria.

**Interpretazione fisica.** Il sistema (3)–(6) costituisce un insieme di equazioni alle derivate parziali non lineari e accoppiate. La non linearità risiede principalmente nei termini convettivi ( $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \nabla T$ ) e nell'accoppiamento tra campo di moto e campo termodinamico attraverso l'equazione di stato. In generale, la risoluzione diretta di questo sistema è estremamente complessa; per renderla trattabile si ricorre a semplificazioni basate sull'analisi dimensionale, che consente di identificare i termini trascurabili in funzione delle scale caratteristiche del problema.

## 0.4 Adimensionalizzazione delle equazioni e teorema di Buckingham

L'obiettivo dell'adimensionalizzazione è riscrivere le equazioni di governo in forma priva di dimensioni fisiche, così da poter confrontare termini di natura diversa e stabilire in modo oggettivo quali contributi siano trascurabili. Il fondamento teorico di questa procedura è il **teorema di Buckingham** (II), secondo il quale ogni relazione fisica tra  $n$  grandezze dimensionali che coinvolgono  $k$  dimensioni fondamentali indipendenti può essere espressa come relazione tra  $n - k$  gruppi adimensionali.

### 0.4.1 Variabili adimensionali e grandezze di riferimento

Si introducono le variabili adimensionali (indicate con asterisco) definite come rapporto tra la grandezza dimensionale e una corrispondente grandezza di riferimento:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{L_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}. \quad (7)$$

<sup>3</sup>L'ipotesi di Stokes stabilisce che il secondo coefficiente di viscosità  $\lambda$  sia legato alla viscosità dinamica  $\mu$  dalla relazione  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , il che equivale ad annullare la viscosità di volume. Tale ipotesi è ben verificata per i gas monoatomici e ragionevolmente accurata per l'aria.

<sup>4</sup>La funzione di dissipazione  $\Phi$  è definita come  $\Phi = 2\mu e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u})^2$ , dove  $e_{ij}$  è il tensore velocità di deformazione. Essa rappresenta il tasso di conversione irreversibile di energia meccanica in energia termica per effetto della viscosità.

La condizione fondamentale nella scelta delle grandezze di riferimento  $(u_0, T_0, p_0, \rho_0, L_0, t_0)$  è che ciascun rapporto  $A^*/A_0$  risulti dell'ordine dell'unità, ossia  $A^* = \mathcal{O}(1)$ . Ciò garantisce che i coefficienti adimensionali che emergono dalla procedura rappresentino effettivamente il peso relativo dei diversi fenomeni fisici.

**Scelta della lunghezza di riferimento.** La lunghezza  $L_0$  deve essere una scala caratteristica del problema: per un profilo alare si sceglie tipicamente la corda, per un condotto il diametro. Una scelta inadeguata (ad esempio la distanza Terra–Luna per un problema aerodinamico) produrrebbe variabili adimensionali di ordine molto diverso dall'unità, vanificando lo scopo dell'analisi.

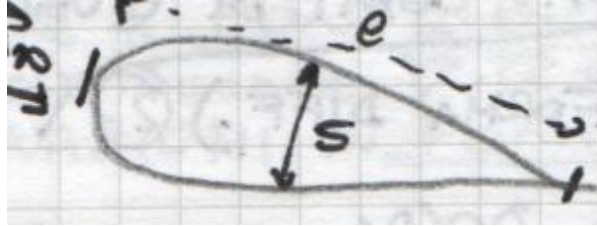


Figura 28: Profilo alare investito da una corrente di velocità  $\vec{u}_0$ : la lunghezza caratteristica  $L_0$  è scelta pari alla corda del profilo.

**Adimensionalizzazione dell'operatore nabla e della derivata temporale.** Sostituendo  $x_i = x_i^* L_0$  nell'operatore gradiente si ottiene:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{L_0} \vec{\nabla}^*, \quad \text{dove} \quad \vec{\nabla}^* = \left( \frac{\partial}{\partial x_1^*}, \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right). \quad (8)$$

Analogamente,  $t = t^* t_0$  implica  $\partial/\partial t = (1/t_0) \partial/\partial t^*$ . Si osservi che le grandezze di riferimento sono costanti e non variabili: le uniche quantità che variano nello spazio e nel tempo sono quelle contrassegnate dall'asterisco.

**Adimensionalizzazione delle componenti di velocità.** Ponendo  $u_i = u_i^* u_0$  si assume implicitamente che tutte e tre le componenti della velocità abbiano lo stesso ordine di grandezza  $u_0$ <sup>5</sup>:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}. \quad (9)$$

#### 0.4.2 Equazione di conservazione della massa in forma adimensionale

Sostituendo le variabili adimensionali nell'equazione (3):

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (10)$$

Dividendo per il coefficiente del secondo termine,  $\rho_0 u_0/L_0$ , si ottiene:

$$\frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (11)$$

<sup>5</sup>Questa assunzione non è sempre valida. Nel caso dello strato limite, ad esempio, la componente di velocità normale alla parete è molto più piccola di quella tangenziale, e si rende necessaria un'adimensionalizzazione differenziata.

Il secondo termine è ora privo di coefficienti e, per costruzione, di ordine  $\mathcal{O}(1)$ . Il coefficiente del primo termine definisce un gruppo adimensionale fondamentale.

**Il numero di Strouhal.** Si definisce il **numero di Strouhal**:

$$St = \frac{L_0}{t_0 u_0}, \quad (12)$$

che può essere interpretato come il rapporto tra il tempo caratteristico del flusso  $L_0/u_0$  (tempo impiegato da una particella fluida a percorrere la lunghezza  $L_0$  alla velocità  $u_0$ ) e il tempo caratteristico del fenomeno  $t_0$  (ad esempio il periodo di oscillazione di un profilo alare o di una pala rotorica).

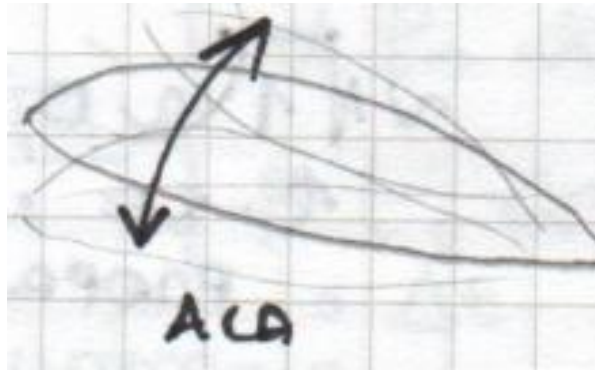


Figura 29: Profilo alare oscillante: il tempo caratteristico  $t_0$  è il periodo di oscillazione.

L'equazione di conservazione della massa in forma adimensionale si scrive dunque (omettendo d'ora in poi gli asterischi per alleggerire la notazione):

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (13)$$

**Interpretazione fisica e soluzione asintotica.** Quando  $St \rightarrow 0$  — ovvero quando il tempo caratteristico del fenomeno esterno  $t_0$  è molto più grande del tempo di transito  $L_0/u_0$  — il termine di derivata temporale diventa trascurabile rispetto al termine convettivo. In questo limite il flusso può essere considerato *stazionario*<sup>6</sup>. Viceversa, quando  $St = \mathcal{O}(1)$  o  $St \gg 1$ , gli effetti non stazionari sono rilevanti e non possono essere trascurati.

### 0.4.3 Gruppi adimensionali legati alla compressibilità

Per analizzare il ruolo della compressibilità, si consideri la densità come funzione della pressione  $P$  e della temperatura  $T$ :  $\rho = \rho(P, T)$ . Si definiscono i coefficienti<sup>7</sup>:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}. \quad (14)$$

La derivata sostanziale della densità si esprime allora come:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{DT}{Dt} = \alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt}. \quad (15)$$

<sup>6</sup>Si noti che la stazionarietà non è un'ipotesi *a priori*: essa emerge come soluzione asintotica dell'analisi dimensionale quando il numero di Strouhal è sufficientemente piccolo. In senso ingegneristico,  $St$  si considera "piccolo" quando è già di un ordine di grandezza inferiore all'unità.

<sup>7</sup>Il coefficiente  $\alpha$  è il coefficiente di compressibilità isoterma (diviso per  $\rho$ ), mentre  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione termica isobarica.

Sostituendo nell'equazione di conservazione della massa in seconda forma ( $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) si ottiene:

$$\alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (16)$$

Dall'adimensionalizzazione di questa equazione emergono due nuovi gruppi adimensionali:

- $\alpha P_0$ : se  $\alpha P_0 \ll 1$ , la densità non dipende significativamente dalla pressione e il flusso è detto **termotropico**, ossia  $\rho \approx \rho(T)$ ;
- $\beta \Delta T$ : se  $\beta \Delta T \ll 1$ , la densità non dipende significativamente dalla temperatura e il flusso è detto **barotropico**, ossia  $\rho \approx \rho(P)$ .

Si osservi che ciò che conta non è il valore dei singoli fattori  $\alpha$ ,  $P_0$ ,  $\beta$  o  $\Delta T$ , bensì il loro prodotto.

#### 0.4.4 Il numero di Mach

Il **numero di Mach** è il parametro adimensionale che caratterizza la compressibilità del flusso. Si definisce la velocità del suono  $c_0$  come la velocità con cui si propagano piccole perturbazioni di pressione in condizioni isoentropiche:

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S. \quad (17)$$

Per un gas ideale con rapporto dei calori specifici  $\gamma$ :

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T}. \quad (18)$$

A titolo di riferimento, per l'aria a temperatura ambiente  $c_0 \approx 340$  m/s, mentre per l'acqua  $c_0 \approx 1500$  m/s.

Il numero di Mach è definito come:

$$M = \frac{u_0}{c_0}, \quad (19)$$

ossia il rapporto tra la velocità caratteristica del flusso e la velocità del suono.

**Legame tra  $\alpha P_0$  e il numero di Mach.** Si può dimostrare che il gruppo  $\alpha P_0$  è direttamente legato al numero di Mach. Infatti:

$$\alpha P_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_0 P_0 = \frac{P_0}{\rho_0 c_0^2} = \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{u_0^2}{c_0^2} = M^2 \text{Ru}^{-1}, \quad (20)$$

dove si è introdotto il **numero di Ruark**<sup>8</sup>:

$$\text{Ru} = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0}. \quad (21)$$

Ponendo  $\text{Ru} = 1$  si ha semplicemente  $\alpha P_0 = M^2$ .

<sup>8</sup>Il numero di Ruark  $\text{Ru} = \rho_0 u_0^2 / p_0$  rappresenta il rapporto tra la pressione dinamica di riferimento e la pressione di riferimento. Nelle applicazioni fluidodinamiche standard si sceglie  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ , cosicché  $\text{Ru} = 1$ .

**Condizioni di incompressibilità.** Un flusso può essere considerato *incompressibile* quando entrambi i gruppi legati alla compressibilità sono trascurabili:

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 & \iff & M^2 \ll 1, \\ \beta \Delta T \ll 1. \end{cases} \quad (22)$$

La condizione  $M^2 \ll 1$  si traduce in pratica in  $M \lesssim 0,3^9$ .

**Classificazione dei regimi di flusso in base al numero di Mach.** Al di là della soglia di incompressibilità, il numero di Mach consente di classificare i regimi di flusso in categorie con comportamenti fisici qualitativamente diversi:

1. **Flussi subsonici:**  $0,3 < M \leq 0,8$ . I fenomeni fisici variano gradualmente con  $M$ ; un esperimento condotto a  $M = 0,6$  è rappresentativo anche di condizioni a  $M = 0,3$  o  $M = 0,8$ . La similitudine è relativamente agevole.
2. **Flussi transonici:**  $0,8 < M < 1,2$ . Piccole variazioni del numero di Mach producono cambiamenti significativi nel campo di moto (comparsa e spostamento di onde d'urto locali). In questo regime la similitudine sperimentale richiede che il Mach dell'esperimento sia esattamente uguale a quello reale<sup>10</sup>.
3. **Flussi supersonici:**  $1,2 < M \lesssim 4-5$ . La situazione fisica è nuovamente stabile rispetto a variazioni moderate di  $M$ ; è possibile condurre esperimenti a numeri di Mach leggermente diversi da quello reale ottenendo risultati rappresentativi.
4. **Flussi ipersonici:**  $M > 5$ . A numeri di Mach così elevati le temperature nel campo di moto possono raggiungere valori tali da provocare la ionizzazione del gas (formazione di plasma), modificando radicalmente le proprietà del fluido e le equazioni di governo.

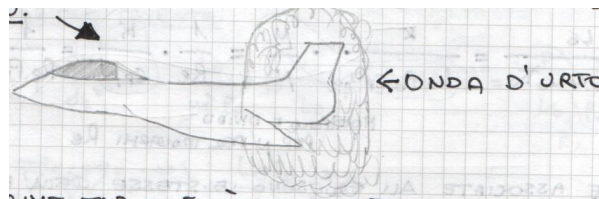


Figura 30: Flusso supersonico attorno a un corpo a cuneo: l'onda d'urto obliqua si origina dal bordo d'attacco.

**Mach e Reynolds: un'avvertenza.** Quando il numero di Mach è elevato, in genere anche il numero di Reynolds è grande, ma ciò non è sempre vero. Un esempio significativo è quello dei veicoli spaziali senza equipaggio (*Unmanned Space Vehicle*, USV) che operano ad alta quota: la velocità è elevata (Mach alto), ma la densità dell'aria è molto bassa, cosicché il numero di Reynolds risulta piccolo. In tali condizioni i fenomeni viscosi non possono essere trascurati nonostante l'elevato Mach.

<sup>9</sup>Il valore  $M \approx 0,3$  corrisponde a  $M^2 \approx 0,09$ , sufficientemente piccolo da rendere trascurabili gli effetti di compressibilità nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche.

<sup>10</sup>Nel regime transonico, fenomeni come la *bolla supersonica* — una regione locale in cui  $M > 1$  che si chiude con un'onda d'urto — sono estremamente sensibili al valore esatto di  $M$ . Boeing e Airbus hanno sviluppato profili supercritici appositamente progettati per ritardare o controllare la formazione di tali urti.

## 0.5 Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto

Si consideri l'equazione di Navier–Stokes (4) con  $\vec{f} = \vec{g}$  (forza di gravità):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}). \quad (23)$$

Sostituendo le variabili adimensionali e dividendo tutti i termini per  $\rho_0 u_0^2/L_0$  (forza di inerzia convettiva per unità di volume), si confronta ciascun contributo con le forze di inerzia. L'adimensionalizzazione del vettore gravità si effettua scrivendo  $\vec{g} = g \vec{g}^*$ , dove  $g = |\vec{g}|$  e  $\vec{g}^* = \vec{g}/g$  è il versore della gravità.

Dopo le sostituzioni e le semplificazioni, l'equazione della quantità di moto in forma adimensionale risulta<sup>11</sup>:

$$\boxed{\frac{1}{\text{St}} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\text{Ru}} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3\text{Re}} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{\text{Fr}} \rho \frac{\vec{g}}{g}}. \quad (24)$$

I gruppi adimensionali che compaiono sono:

**Numero di Reynolds.**

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu}, \quad (25)$$

rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi. Quando  $\text{Re} \rightarrow \infty$  i termini viscosi diventano trascurabili e si ottengono le *equazioni di Eulero* (flussi euleriani). Quando  $\text{Re} \rightarrow 0$  dominano le forze viscosi e si parla di *flussi stokesiani*.

**Numero di Froude.**

$$\text{Fr} = \frac{u_0^2}{g L_0}, \quad (26)$$

rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Quando  $\text{Fr} \rightarrow \infty$  le forze di massa sono trascurabili rispetto a quelle di inerzia; questo è il caso tipico dei problemi aerodinamici. Il numero di Froude diventa invece rilevante in idrodinamica (moto ondoso, carene navali).

## 0.6 Adimensionalizzazione dell'equazione di bilancio dell'energia

Si consideri l'equazione dell'energia in termini entalpici (5), trascurando la produzione volumetrica di calore ( $\dot{q} = 0$ )<sup>12</sup>:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \Phi + k \nabla^2 T. \quad (27)$$

Sostituendo le variabili adimensionali e dividendo per  $\rho_0 c_p u_0 T_0/L_0$ , si ottiene un nuovo gruppo adimensionale.

<sup>11</sup>Si omettono gli asterischi sulle variabili adimensionali per semplicità di notazione, come d'uso nella letteratura.

<sup>12</sup>La produzione di calore  $\dot{q}$  viene trascurata poiché la sua adimensionalizzazione richiederebbe l'introduzione di ulteriori grandezze di riferimento, complicando notevolmente l'analisi senza apportare benefici significativi nella maggior parte delle applicazioni aerodinamiche.

**Numero di Eckert.**

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_p T_0}, \quad (28)$$

che rappresenta il rapporto tra l'energia cinetica del flusso e l'energia termica. Per un gas ideale si può esprimere in funzione del numero di Mach:

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_p T_0} = \frac{u_0^2}{\frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0} = (\gamma - 1) \frac{u_0^2}{\gamma R T_0} = (\gamma - 1) M^2, \quad (29)$$

dove si è utilizzata la relazione  $c_p = \gamma R/(\gamma - 1)$ .

**Numero di Prandtl.** Dall'adimensionalizzazione del termine di conduzione termica  $k \nabla^2 T$  emerge il **numero di Prandtl**:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (30)$$

dove  $\nu = \mu/\rho$  è la viscosità cinematica e  $\kappa = k/(\rho c_p)$  è la diffusività termica. Il numero di Prandtl è una proprietà del fluido e non del flusso: non può quindi essere trattato come parametro asintotico<sup>13</sup>.

Il termine di conduzione contribuisce all'equazione con il fattore  $1/(\text{Re Pr})$ . Infatti:

$$k \nabla^2 T \rightarrow k \frac{T_0}{L_0^2} \xrightarrow{\text{diviso per } \rho_0 c_p u_0 T_0/L_0} \frac{k}{\rho_0 c_p u_0 L_0} = \frac{\mu}{\rho_0 u_0 L_0} \frac{k}{c_p \mu} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (31)$$

L'equazione di bilancio dell'energia in forma adimensionale risulta quindi:

$$\boxed{\frac{1}{\text{St}} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\text{Ec}}{\text{Ru St}} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\text{Ec}}{\text{Ru}} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \Phi + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T.} \quad (32)$$

**Interpretazione fisica.** Ciascun gruppo adimensionale nell'equazione (32) ha un significato preciso:  $1/\text{St}$  pesa la non stazionarietà termica;  $\text{Ec}/\text{Ru}$  quantifica l'importanza del lavoro di compressione rispetto al trasporto termico convettivo;  $\text{Ec}/\text{Re}$  misura il riscaldamento per dissipazione viscosa;  $1/(\text{Re Pr})$  rappresenta la diffusione termica. Le soluzioni asintotiche sono le stesse dell'equazione di conservazione della massa (stazionarietà per  $\text{St} \rightarrow 0$ ), con l'aggiunta che il numero di Prandtl, essendo proprietà del fluido, non ammette limiti asintotici.

## 0.7 Equazione di stato in forma adimensionale

L'equazione di stato per un gas ideale  $p/\rho = RT$  si adimensionalizza sostituendo le variabili adimensionali e moltiplicando opportunamente per  $u_0^2$ :

$$\frac{p_0 p^*}{\rho_0 \rho^* T_0 T^*} = R \implies \frac{p^*}{\rho^* T^*} = \frac{R \rho_0 T_0}{p_0}. \quad (33)$$

Esprimendo il membro destro in funzione dei gruppi adimensionali noti, e ricordando che  $c_0^2 = \gamma R T_0$ :

$$\frac{R \rho_0 T_0}{p_0} = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0} \frac{R T_0}{u_0^2} = \text{Ru} \frac{1}{\gamma M^2}, \quad (34)$$

da cui l'equazione di stato in forma adimensionale:

$$\boxed{\frac{p}{\rho T} = \frac{\text{Ru}}{\gamma M^2}.} \quad (35)$$

<sup>13</sup>Per l'aria a condizioni standard  $\text{Pr} \approx 0,71$ ; per l'acqua  $\text{Pr} \approx 7$ ; per i metalli liquidi  $\text{Pr} \ll 1$ .

## 0.8 Sistema completo delle equazioni adimensionali

Raccogliendo i risultati delle sezioni precedenti, il sistema completo delle equazioni di governo in forma adimensionale (omettendo gli asterischi) è:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{Ec}{Re} \Phi + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T, \quad (38)$$

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}. \quad (39)$$

Le cinque incognite sono  $\vec{u}$  (tre componenti),  $p$ ,  $\rho$  e  $T$ , per un totale di sei campi scalari legati da sei equazioni scalari (una dalla massa, tre dalla quantità di moto, una dall'energia, una dallo stato).

## 0.9 Semplificazione per flussi incompressibili non viscosi

Si consideri ora il caso, frequente nelle applicazioni aerodinamiche, in cui valgano le seguenti ipotesi:

- $Re \gg 1$  (forze viscosi trascurabili rispetto a quelle di inerzia);
- $Fr \gg 1$  (forze gravitazionali trascurabili);
- $M < 0,3$  e  $\beta \Delta T \ll 1$  (flusso incompressibile,  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ,  $\rho = \text{cost.}$ );
- $Ru = 1$  (pressione di riferimento pari alla pressione dinamica);
- $\dot{q} = 0$  e  $\vec{R} \cdot \vec{n} = 0$  (nessuna produzione di calore, nessun flusso termico alle pareti).

Poiché  $Ec = (\gamma - 1) M^2 \ll 1$ , l'equazione dell'energia si disaccoppia dal sistema: la temperatura non gioca un ruolo dinamico rilevante. Si eliminano pertanto l'equazione dell'energia e l'equazione di stato, riducendo il sistema alle sole equazioni di Eulero.

### 0.9.1 Equazioni di Eulero per flusso incompressibile

Le equazioni si riducono a:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p, \quad (41)$$

con quattro incognite: le tre componenti di  $\vec{u}$  e la pressione  $p$ . Il termine  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  è non lineare e costituisce la principale difficoltà nella risoluzione analitica del sistema.

## 0.10 Similitudine dinamica e coefficienti aerodinamici

La **similitudine dinamica** è la condizione che garantisce l'uguaglianza dei coefficienti di forza tra un modello (sperimentale o numerico) e la configurazione reale. Si definiscono i coefficienti aerodinamici adimensionali:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0}, \quad (42)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0}, \quad (43)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0 L_0}, \quad (44)$$

dove  $L$  è la portanza,  $D$  la resistenza,  $M$  il momento aerodinamico,  $S_0$  una superficie di riferimento (tipicamente la superficie alare o la corda al quadrato) e  $L_0$  una lunghezza di riferimento.

Se nell'esperimento si riproducono gli stessi numeri di Reynolds e di Mach della configurazione reale, i coefficienti aerodinamici risultano identici:

$$\text{Re}_E = \text{Re}_R \text{ e } M_E = M_R \implies C_{L,E} = C_{L,R}, \quad C_{D,E} = C_{D,R}, \quad C_{M,E} = C_{M,R}. \quad (45)$$

**Difficoltà pratiche della similitudine.** Mantenere simultaneamente  $\text{Re}$  e  $M$  uguali a quelli reali è in pratica molto difficile. Se per ragioni di spazio il modello in galleria del vento ha una corda  $L_E = L_R/2$ , per mantenere lo stesso Reynolds occorre raddoppiare la velocità ( $u_E = 2u_R$ ), il che modifica il numero di Mach. In generale, si privilegia il rispetto del Mach — soprattutto in regime transonico, dove piccole variazioni producono effetti macroscopici — accettando un Reynolds non perfettamente uguale a quello reale<sup>14</sup>.

### Osservazioni sui singoli gruppi adimensionali.

**Numero di Strouhal.** La stazionarietà del flusso non può essere assunta *a priori*: va verificata calcolando  $\text{St}$  e confrontandolo con l'unità.

**Numero di Froude.** Rilevante in campo idrodinamico (moto ondosso, carene); nell'esperimento deve essere rispettato lo stesso valore reale.

**Numero di Ruark.** Nelle applicazioni aerodinamiche standard  $\text{Ru} = 1$ ; in altri contesti (ad esempio nei fenomeni di cavitazione) assume valori diversi e prende il nome di *numero di cavitazione*.

**Resistenza di forma e transizione laminare-turbolento.** Per il numero di Reynolds esiste un intervallo in cui il coefficiente di resistenza di una sfera è pressoché costante. Al di là di una certa soglia critica di  $\text{Re}$ , la transizione dallo strato limite laminare a quello turbolento provoca

<sup>14</sup>In regime supersonico ( $M > 1,2$ ) è possibile condurre esperimenti a numeri di Mach leggermente diversi da quello reale, poiché i fenomeni fisici sono meno sensibili a piccole variazioni di  $M$ . In regime subsonico ( $0,3 < M < 0,8$ ) vale un ragionamento analogo.

un crollo della resistenza di forma<sup>15</sup>. La portanza è proporzionale all'angolo di incidenza (nel campo lineare della curva  $C_L-\alpha$ ).

## 0.11 Applicazioni: tubo di Pitot e fenomeni di vorticità

### 0.11.1 Il tubo di Pitot

Il **tubo di Pitot** è uno strumento utilizzato su veicoli e velivoli per la misura della velocità del flusso. Il principio di funzionamento si basa sul teorema di Bernoulli applicato lungo una linea di corrente.



Figura 31: Schema di un tubo di Pitot: nel punto  $A$  (apertura frontale) si misura la pressione totale, nel punto  $B$  (presa laterale) la pressione statica. A destra, distribuzione di pressione attorno a un profilo alare.

Nel punto  $A$ , situato all'apertura frontale del tubo dove il fluido viene portato a riposo, si misura la *pressione totale* (somma di pressione statica e pressione dinamica). Nel punto  $B$ , situato sulla parete laterale dove la velocità è tangente alla superficie e quindi la componente normale è nulla, si misura la sola *pressione statica*. Applicando il teorema di Bernoulli:

$$p_A = p_B + \frac{1}{2} \rho U^2, \quad (46)$$

da cui si ricava la velocità del flusso:

$$U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}. \quad (47)$$

### 0.11.2 Generazione di vorticità e downwash

Alle estremità delle ali di un velivolo, la differenza di pressione tra intradosso (alta pressione) e estradosso (bassa pressione) genera vortici di estremità. Questi vortici inducono una componente di velocità verso il basso a valle dell'ala, denominata **downwash**.

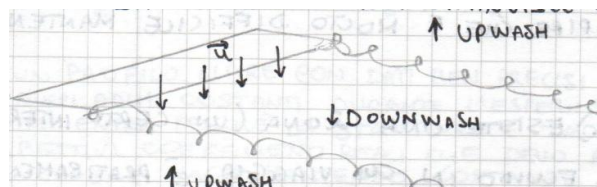


Figura 32: Vista in pianta di un'ala: l'*upwash* a monte e il *downwash* a valle sono generati dai vortici di estremità.

Il downwash riduce l'angolo di incidenza effettivo dell'ala, diminuendo la portanza e aumentando la resistenza (resistenza indotta). Per minimizzare questo effetto si adottano ali ad elevato

<sup>15</sup>Questo fenomeno è sfruttato nella pratica: le fossette sulla pallina da golf e i generatori di vortici (*vortex generators*) sulle ali degli aerei inducono artificialmente la transizione al regime turbolento, riducendo la resistenza di forma.

allungamento (rapporto apertura/corda), come negli alianti. Nei velivoli da trasporto, tuttavia, vincoli strutturali e operativi (installazione di motori, piloni, serbatoi) limitano l'allungamento raggiungibile.

In generale, nelle regioni ad alta pressione la vorticità è bassa, mentre nelle regioni a bassa pressione la vorticità è elevata. Quando la pressione locale scende al di sotto della tensione di vapore del liquido si verifica il fenomeno della **cavitazione**: si formano bolle di vapore che, collassando, possono provocare danni strutturali significativi.

## 0.12 Introduzione del potenziale di velocità

Per risolvere le equazioni di Eulero (40)–(41) si introduce un'ulteriore ipotesi: la **irrotazionalità** del campo di moto, ossia

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u} = \vec{0} \quad \forall \vec{x}, \forall t. \quad (48)$$

Si noti che la condizione deve valere in *ogni* punto del dominio e non soltanto localmente.

**Giustificazione tramite il teorema di Kelvin.** Il teorema di Kelvin garantisce che, sotto le ipotesi già adottate (fluido incompressibile, forze di massa conservative,  $Re \gg 1$ ), la circolazione  $\Gamma$  lungo qualsiasi curva materiale chiusa si conserva nel tempo:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \text{costante}. \quad (49)$$

Pertanto, se la vorticità è nulla ovunque all'istante iniziale  $t = 0$ , essa rimane nulla per tutti i tempi successivi:

$$\vec{\omega}(\vec{x}, 0) = \vec{0} \implies \vec{\omega}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad \forall t > 0. \quad (50)$$

È dunque sufficiente verificare l'irrotazionalità nelle condizioni iniziali.

**Definizione del potenziale di velocità.** Dal punto di vista matematico, se un campo vettoriale ha rotore identicamente nullo, esso è esprimibile come gradiente di un campo scalare. Esiste dunque una funzione  $\varphi(\vec{x}, t)$ , detta **potenziale di velocità**, tale che:

$$\vec{u} = \nabla \varphi. \quad (51)$$

Questa relazione è coerente con l'ipotesi di irrotazionalità, poiché il rotore di un gradiente è identicamente nullo:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \vec{0}. \quad (52)$$

Inoltre, la divergenza del gradiente restituisce il laplaciano:

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}. \quad (53)$$

### 0.12.1 Equazione di Laplace e condizioni al contorno

Sostituendo  $\vec{u} = \nabla \varphi$  nell'equazione di continuità  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  si ottiene l'**equazione di Laplace**:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}, \quad (54)$$

un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, ellittica, le cui proprietà matematiche sono ben note e per la quale esistono potenti metodi di risoluzione.

Il sistema da risolvere diventa (equazioni di Eulero in forma potenziale, II forma):

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0, \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p. \end{cases} \quad (55)$$

La prima equazione determina  $\varphi$  (e quindi  $\vec{u} = \nabla \varphi$ ); la seconda, che è il teorema di Bernoulli in forma differenziale, fornisce la pressione  $p$  una volta noto il campo di velocità.

**Condizioni al contorno.** L'equazione di Laplace richiede due condizioni al contorno:

1. **All'infinito:** il potenziale tende al valore indisturbato,  $\varphi \rightarrow \varphi_\infty(t)$ , che può dipendere dal tempo se il flusso non è stazionario ( $St \neq \infty$ ).
2. **Sulla superficie del corpo** (parete  $W$ ): si impone la condizione di *impermeabilità*, ossia la componente normale della velocità è nulla:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_W = 0, \quad (56)$$

dove  $\partial \varphi / \partial n = \nabla \varphi \cdot \vec{n}$  è la derivata del potenziale nella direzione normale alla superficie.

Si osservi che *non* si impone alcuna condizione sulla componente tangenziale della velocità alla parete: ciò è coerente con l'assenza di viscosità nel modello euleriano. In un flusso viscoso reale, la condizione di aderenza ( $\vec{u}|_W = \vec{0}$ ) richiederebbe il contributo dei termini viscosi, qui trascurati.

**Procedura risolutiva.** Una volta risolto il problema di Laplace con le condizioni al contorno assegnate, si determina  $\varphi(\vec{x}, t)$ . Da questo si calcola il campo di velocità  $\vec{u} = \nabla \varphi$  e, infine, la pressione tramite il teorema di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = \text{costante} \quad (\text{lungo una linea di corrente}), \quad (57)$$

dove la costante può essere valutata dalle condizioni all'infinito. Si noti che il teorema di Bernoulli è un'equazione *algebraica* e non differenziale, il che semplifica notevolmente il calcolo della pressione.

**Risoluzione dell'equazione di Laplace.** Per la risoluzione di  $\nabla^2 \varphi = 0$  esistono due approcci fondamentali:

- **Metodo diretto:** si risolve esplicitamente l'equazione differenziale nel dominio con le condizioni al contorno assegnate;
- **Metodo indiretto:** si costruisce la soluzione come sovrapposizione di soluzioni elementari note (sorgenti, pozzi, doppiette, vortici), sfruttando la linearità dell'equazione di Laplace.

““

Anche se partiamo da flusso omoentropico, le linee di corrente avranno differenti entropie da cui Crocco dimostrò che esiste vorticità.

$$\vec{\nabla} S \rightarrow \vec{\omega}$$

Onda d'urto dona a variazione improvvisa di pressione ed entropia.

Se facciamo l'integrale di tutta l'equazione III dell'energia (con entropia) considerando  $\rho q$  positivo, si può dimostrare che:

$$\iiint_V T \frac{DS}{D\tau} dV \geq 0$$

La variazione di entropia può essere solo positiva o rimane costante.

(Abbiamo diviso tutto per  $Q$ . Clausius-Duhem)

## Lezione fluidodinamica 13/5/16

Abbiamo raggiunto un sistema completo di equazioni.

### Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{I forma})$$

(Sotto certe ipotesi. Non sono valide sempre ma nuove applicazioni sì.)

### Equazione di Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

(In cui ipotesi di Stokes:  $\rho = -\frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$ )

### Equazione dell'energia (in termini di entalpia)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

(in cui  $\mu \nabla^2 \vec{u} = \rho \cdot \vec{f}$  è solo un simbolo e non ha significato fisico)

### Equazione di stato

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

(Dissipazione)

Negli altri casi queste equazioni sono molto difficili da risolvere perché il sistema è troppo complesso. Posso eliminare il contributo viscoso per certe applicazioni? ( $\mu \nabla^2 \vec{u}$  e  $\nabla \cdot \vec{u}$ ) Oppure posso considerare  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  in maniera scrivere le equazioni in forma adimensionale.

## Teorema di Buckingham

↓

Adimensionalizzazione → variabili indipendenti e dipendenti.

Devo fare in modo che tutte quantità in giro abbiano lo stesso ordine di grandezza. Ci sono molti, però, e ci ma li voglio separarli dalla loro natura così da confrontarli.

$$\vec{u}, T, p, \rho, x_i, t$$

(Equazioni dimensionali)

L'obiettivo della adimensionalizzazione è fare confronti tra termini di natura diversa in modo tale da trascurare i termini più piccoli.

(Dipendenti ↓ indipendenti)

$$\vec{u}^*, T^*, p^*, \rho^*, x_i^*, t^*$$

(Set di variabili adimensionali)

(Equazioni adimensionali)

$$A^* = \frac{A}{A_0}$$

Devo scegliere la grandezza di riferimento per ottenere la grandezza adimensionale  $A^*$ :

$$A = A^* A_0$$

La condizione necessaria è  $A/A_0$  deve essere quantità dell'ordine di 1 ossia 1 ordine di grandezza per scegliere quantità di riferimento.

### Es. equazione di massa in forma adimensionale

Da O(1) a O(8).

Forma dimensionale equazione di massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{I forma})$$

Sostituiamo  $A^* = A/A_0$  nuove varie grandezze:

$$\frac{\partial(\rho^* \rho_0)}{\partial(t^* t_0)} + \frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \rho_0 \vec{u}^* u_0) = 0$$

(\* → ordine di 1 (l'ho deciso io). Da Wikipedia. \* per ordine di grandezza è la classe di scala o grandezza di una quantità.)

Da cui:

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \left( \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \right) \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

(Coefficienti dimensionali. Non so qual è l'ordine.)

Adesso divido per  $\frac{\rho_0 u_0}{L_0}$  e ottengo così:

$$\frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

(O(1))

Il secondo termine significativamente dell'ordine di 1; non ho quantità che lo moltiplica. A seconda dell'ordine di così che rimane è possibile trascurarlo o se molto rilevante.

Definiamo numero di Strouhal:

$$St = \frac{L_0}{t_0 u_0} = \frac{t_0}{\frac{L_0}{u_0}}$$

(Soluzione asintotica)

- $St \rightarrow 0 \rightarrow$  flussi stazionari (il termine derivata nel tempo sparisce)

Da cui l'equazione della massa di prima diventa:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0 \quad (\text{forma adimensionale})$$

(Equazione di massa + numero di Strouhal (St) = forma adimensionale)

A priori non esistono flussi stazionari: si devono scegliere grandezze di riferimento e calcolare Strouhal. A seconda del valore rapisco se è stazionario o novo.  $t_0$  è tempo caratteristico fenomeno.

Un profilo oscillante.

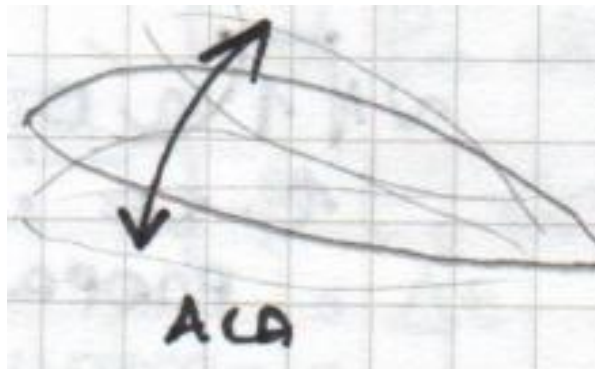


Figura 33: Diagram of an airfoil (ALA) oscillating in a fluid flow.

(Rotore)

È tempo che percorre particella a  $u_0$  in spazio.

Prenderemo il tempo ( $t_0$  ?) di oscillazione.

Stazionarietà significa che i due tempi debbano essere uguali in:

$$\rho(P, T) \quad \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

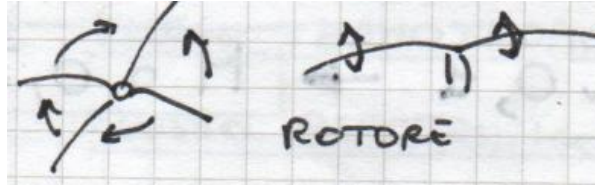


Figura 34: Diagram of a rotor blade oscillating in a fluid flow.

(Ordine di grandezza a fenomeno con tempo caratteristico più lento di quelli del fluido.)

Equazione di massa dimensionale:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{I forma differenziale})$$

Se abbiamo dipendenza da  $P$  e  $T$  allora: esprimo  $Dp/Dt$  che è derivata composta:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial P} \cdot \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{DT}{Dt} \quad \text{ma diventa:} \quad \frac{Dp}{Dt} = \alpha p \frac{DP}{Dt} + (-\beta p) \frac{DT}{Dt}$$

(Ricordando che  $dp = \frac{\partial p}{\partial P} dP + \frac{\partial p}{\partial T} dT$ )

Quindi riscrivendo l'equazione otteniamo (sostituendo  $\frac{Dp}{Dt}$  in):

$$\alpha p \frac{DP}{Dt} - \beta p \frac{DT}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{abbiamo 2 nuovi gruppi adimensionali})$$

(Per arrivare a  $P_0$  e  $\Delta t$  ma suiptata l'equazione. Dispense. Modo oggettivo per definire i flussi.)

$$\alpha P_0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{L_0}{t_0} = (1)$$

→ 2 gruppi adimensionali

→ Se  $\alpha P_0 \ll 1 \rightarrow \rho(T)$  (flusso termotropico)

$$\beta \Delta t \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{L_0}{t_0} = (1)$$

→ Se  $\beta \Delta t \ll 1 \rightarrow \rho(P)$  (flusso barotropico)

(Si scrive così e non  $t_0$  per convenzione. Non mi interessa quanto valgono rispettivamente  $\alpha, P_0, \beta$  o  $\Delta t$ : è il prodotto che conta.)

## Numero di Mach

Serve a capire se flusso compressibile o incompressibile.

$C_0$  = velocità del suono → velocità con cui si propagano perturbazioni → nel caso degli urti la variazione dell'entropia varia.

$$C_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

(Entropia costante. Isoentropica.)

Aria = 340 m/s. Acqua = 1500 m/s.

$$C_0^2 = \gamma RT \rightarrow C_0 = \sqrt{\gamma RT}$$

(È in un certo senso l'inverso della sensibilità della  $p$  su  $\rho$ : l'inverso è quindi l'opposto.)

$$M = \frac{u_0}{C_0}$$

(Velocità del flusso / velocità del suono.  $u_0$  = velocità del campo/flusso.)

$$R = 287 \frac{J}{\text{kg} \cdot K} \quad \text{per aria}$$

$$\alpha_0 P_0 = \frac{1}{P_0} \left( \frac{\partial P}{\partial P} \right) = \frac{P_0}{P_0} \cdot \frac{1}{C_0^2} \cdot \frac{u_0^2}{u_0^2} = \left( \frac{u_0^2}{C_0^2} \right) \left( \frac{P_0}{P_0 u_0^2} \right) = M^2 R_u^{-1}$$

$$R_u = \frac{P_0 u_0^2}{P_0}$$

(Pressione dinamica. Pressione di riferimento.)

$$\alpha_0 P_0 = M^2 R_u^{-1}$$

(Tutte e due quantità adimensionali. Il secondo è rapporto da  $P_0$  di riferimento e pressione dinamica.)

Nei nostri applicazioni fluidodinamiche consideriamo pressione dinamica = pressione di riferimento:

$$R_u = 1 \rightarrow M^2 = \alpha P_0$$

(In compressibilità)

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 \\ \beta \Delta t \ll 1 \end{cases}$$

Oppure

$$\begin{cases} M^2 \ll 1 \\ \beta \Delta t \ll 1 \end{cases}$$

$$M^2 \ll 1 \rightarrow M \approx 1 \rightarrow M \approx 0,3 \approx \sqrt{1} \approx 0,3$$

(Se non è proprio 1.)

Continuo (parte mancante che ha fatto parte di equazione di massa adimensionata).

Ho struttura alche con flusso ad una velocità che chiamo  $\vec{u}_0$  di modulo:

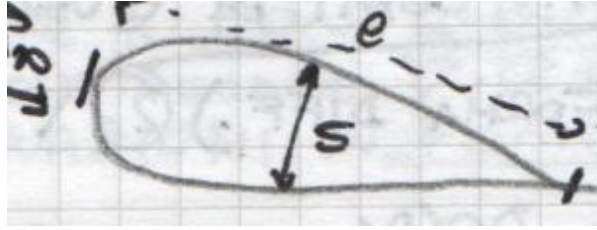


Figura 35: Diagram of a profile with a velocity vector  $u_0$  and a characteristic length scale  $l$ .

$$|\vec{u}_0| = u_0 \quad \vec{u}_0$$

Per adimensionalizzare lo spazio  $\vec{x}$  che cosa scelgo? Una lunghezza:

$$x_i^* = \frac{x_i}{L_0}$$

Come scelgo  $L_0$ ? Se non do informazioni, prendo  $L_0$  molto grande quindi  $x_i^*$  è piccolo (magari  $L_0 =$  distanza tra luna e terra) ma non ha senso. Se scegliesse un numero piccolo otterrei  $x_i^*$  troppo grande. Scegliamo una lunghezza caratteristica del profilo alche, ad esempio la corda. Stesso ragionamento per un tubo in cui scelgo il diametro del tubo.

Non considero produzione di calore poiché è complicato esprimere  $pq$  con grandezze di riferimento.

### Es. caso strato limite

Devo sostituire quindi:

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow u_i^* \\ x_i &\rightarrow x_i^* \\ t &\rightarrow t^* \end{aligned}$$

Da cui  $\rho = \rho_0 \rho^*$  e  $P = P_0 P^*$  (non è sempre valido).

$$u_i = u_i^* u_0 \rightarrow u_i^* = \frac{u_i}{u_0}$$

(Sto assumendo che tutte e tre le componenti hanno ordine 1.)

$$\begin{cases} u_1^* = \frac{u_1}{u_0} \\ u_2^* = \frac{u_2}{u_0} \\ u_3^* = \frac{u_3}{u_0} \end{cases} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Stesso ragionamento per  $x_i = x_i^* L_0$  assumendo  $x_i^* = \frac{x_i}{L_0}$  (uguale a sopra).

**Nota 1:**  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ .

Quando adimensionalizzo  $\vec{x}$ :  $\rightarrow \frac{1}{L_0} \left( \frac{\partial}{\partial x_1^*}, \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right) = \frac{1}{L_0} \vec{\nabla}^*$  (vettore con derivate adimensionali).

**Nota 2:**  $t = t^* t_0 \rightarrow \frac{d}{dt}$  (tutte le grandezze di riferimento sono costanti e non variabili; restano nel loro ordine di grandezza. Le variabili diventano quelle con l'asterisco).

$$\vec{u}, p, \rho, t \quad o(1)$$

**Equazione di conservazione della massa**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \rightarrow \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

(Come succede quando gruppo asintotico  $\rightarrow 0/0$ ? Cioè quando varia?)

**Soluzioni asintotiche**

$St \rightarrow 0$  stazionario.

$$\vec{u} = u_0 \vec{u}^*$$

$$\rho = \rho_0 \rho^*$$

- 2) Sostituzione
- 3) Dividiamo per alcune costanti così da avere un termine senza coefficiente di ordine di 1
- 4) Confrontare il rimanente per rapire la rilevanza

$$\underbrace{\frac{1}{St} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\rho \vec{u})}_{= 0} = 0$$

(È sempre importante scegliere grandezze di riferimento in modo corretto. Sono costanti, non sono variabili.)

A priori non esistono flussi stazionari. Devo studiare  $St$ .

$P(P.I.) \rightarrow$  incompressibilità.

Sono altre soluzioni asintotiche.

$$Re = 1$$

(Focus scelgo  $\rho_0 = \rho$  dinamica.)

$$M = \frac{u_0}{c_0} = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma RT}}$$

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 \rightarrow M^2 \ll 1 \rightarrow M \approx 0,3 & \text{poiché } M^2 \approx 1 \rightarrow \sqrt{M} \approx 0,3 \\ \beta t_0 \ll 1 \rightarrow \beta t_0 \ll 1 \end{cases}$$

Al di là della compressibilità, per  $M > 0,3$  si possono verificare situazioni specifiche:

1. Flussi subsonici  $M \leq 0,8$  ( $M > 1$   $M < 1$ ;  $0,3 < M < 0,8$ ;  $M \approx 0,9$ ;  $M \approx 0,9$ . Significa che se ho fenomeno fisico a  $M = 0,6$  è lo stesso di  $M = 0,3$  o  $M = 0,8$ . Quindi a livello sperimentale è meglio.)
2. Flussi transonici ( $0,8 < M < 1,2$ . Piccola variazione di Mach fa variare l'esperimento. Quindi il  $M$  va preso uguale.)
3. Flussi supersonici ( $M > 1,2$  e  $1,2 < M \leq 4 - 5$ . Come orma, la situazione fisica è stabile quindi posso usare  $M$  minori. Se  $M > 5 \rightarrow$  plasma (fluido ionizzato). Esiste però un limite superiore di 4,5 abbiamo flussi (ionizzazione del fluido  $\rightarrow$  atomi neutri diventano ioni e abbiamo)
4. Flussi ipersonici (quando il Mach è elevato va tenuto conto del numero di Reynolds.)

$$Re = \frac{u_0 \rho_0 L_0}{\mu}$$

(Flusso sonico:  $M = 1$ .)

Quando il Mach è grande in genere  $Re$  è grande: non è sempre vero.

Unmanned Air Vehicle (UAV)  $\rightarrow$  velocità bassa quota bassa.

Unmanned Space Vehicle (USV)  $\rightarrow$  velocità bassa quota alta.

$\rightarrow$  Mach elevato ma  $Re$  piccolo.

### Equazione di quantità di moto adimensionalizzata

Prendo equazione di Navier-Stokes e espando ma inserisco anche forza di massa al posto di  $f$ :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

(In cui  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ .)

Effettuo la sostituzione delle quantità dimensionali  $\rightarrow$  quantità adimensionali con coefficienti:

$$\frac{\rho_0 u_0}{t_0} \rho^* \frac{d\vec{u}^*}{dt^*} + \frac{u_0^2}{\rho_0 L_0} \rho^* \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = -\frac{\rho_0}{L_0} \nabla^* p^* + \mu \frac{u_0}{L_0^2} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{\mu}{3} \frac{u_0}{L_0} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*)$$

(Non toggo asterischi ma sono tutte grandezze adimensionali.  $\rightarrow \infty$  va inteso in senso ingegneristico: quando  $St$  è già di un ordine di grandezza superiore, significa che è flusso stazionario. Bocca supersonica è fenomeno che porta il Mach a valore maggiore ma tramite urto ritorna al Mach precedente. L'urto può essere determinato per gli aerei:  $M < 1 \rightarrow M = 1$   $M > 1 \rightarrow M = 0,9$ . Boeing e Airbus studiarono strutture che hanno permesso di evitare la formazione dell'urto.)

$$+ \rho_0 \left( \frac{\vec{g}}{g} \right) \vec{g} \cdot \vec{p} \quad \text{in cui } g = |\vec{g}| \quad \text{e } \vec{g} = g \vec{g}^* \quad \text{e } \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{g}$$

(Adimensionalizzare  $\vec{g} \rightarrow$  multiplico e divido per il modulo del vettore facendo apparire  $\vec{g}/g =$  versore di  $\vec{g} = \vec{g}^*$ .)

$\rho_0 \left( \frac{\vec{g}}{g} \right) \vec{g}^* = \frac{\vec{g}^* L_0 \rho_0}{u_0^2 \rho_0} \vec{p}$  in cui ho moltiplicato per  $\frac{L_0}{u_0^2 \rho_0}$  (o diviso per  $\frac{u_0^2 \rho_0}{L_0}$  per semplificare il termine completo)

(Moltiplico per  $\frac{L_0}{u_0^2 \rho_0}$  così da confrontare le forze con forza di inerzia  $\rightarrow$  dovrei dividere per  $\frac{u_0^2 \rho_0}{L_0}$ .)

Quindi l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 u_0}{St} \cdot \frac{L_0}{\rho_0 u_0} \cdot \vec{p} \cdot \frac{d\vec{u}^*}{dt} + \frac{L_0}{u_0^2 \rho_0} \cdot \rho_0 \frac{u_0^2}{L_0} \vec{p} \cdot \vec{u}^* \cdot \vec{\nabla}^* \vec{u}^* &= -\frac{\rho_0}{L_0} \cdot \frac{L_0}{\rho_0 u_0^2} \vec{\nabla}^* p^* + \rho_0 \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \frac{L_0}{L_0^2 u_0^2 \rho_0} \vec{\nabla}^* \vec{u}^* \\ &+ \frac{\mu}{3} \frac{u_0}{L_0} \cdot \frac{L_0}{u_0^2 \rho_0} \vec{\nabla}^* (\vec{\nabla}^* \cdot \vec{u}^*) + \frac{L_0 \rho_0}{u_0^2 \rho_0} g^* \vec{p} \\ \frac{1}{3Re} \text{ (numero di contrazione)} &= \frac{L_0}{u_0} \rho^* g^* g^* \rightarrow \frac{1}{Fr} \rho^* g^* \text{ (} Fr = \text{numero di Froude)} \end{aligned}$$

(Soluzione asintotica:  $Fr \rightarrow \infty$  forze di massa sono trascurabili.)

Quindi togliendo gli asterischi l'equazione diventa:

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g}$$

(Equazione quantità di moto adimensionalizzata.)

Quando  $Re \rightarrow \infty$  posso trascurare fenomeni viscosi  $\rightarrow$  equazione di Eulero (flussi euleriani).

Quando  $Re \rightarrow 0$  ho flussi Stokesiani con fenomeni viscosi rilevanti.

### Equazione bilancio di energia in forma adimensionale (in termini di Bernoulli)

Equazione in termini entalpici e non considero  $pq$ , cioè pongo  $pq = 0$  (no produzione calore) poiché complicherebbe l'equazione:

$$\underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T}_{\text{energia cinetica}} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \mu \phi^2 + k \nabla^2 T}_{\text{energia termica}} + 0$$

(in cui  $\rho c_p \frac{DT}{Dt}$  e  $\frac{DP}{Dt}$  è la risultato esteso per fare la adimensionalizzazione.)

1. Sostituisco
2. Divido per un dato termine. Ho due termini non-lineari e ma divido per il coefficiente legato alla temperatura e non alla pressione.

Così facendo trovo nuovo gruppo adimensionale:

Energia cinetica. Energia termica.

$$\frac{Ec}{\text{numero Eckert}} = \frac{\frac{u_0^2}{c_p T_0}}{\frac{u_0^2}{\gamma R T_0} (\gamma - 1)} = \frac{u_0^2}{\gamma R T_0} (\gamma - 1) = \frac{M^2 (\gamma - 1)}{\gamma R T_0}$$

(Ho diviso tutto per  $\frac{\rho_0 c_p u_0 T_0}{L_0}$ . In cui  $c_p$  l'ho espresso in modo diverso in funzione di  $R$ .)

Ottingo quindi:

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re} \phi^2 + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T$$

(Equazione bilancio energia adimensionalizzata in termini entalpici.)

$$\rho \rightarrow Ru$$

(Del tempo)  $\rightarrow St$

$$c_p T_0 \rightarrow Ec$$

$$\kappa \rightarrow Pr$$

In cui numero di Prandtl:

$$\Rightarrow Pr = \frac{c_p \mu}{\kappa}$$

(Spesso si fa. Moltiplico e divido per  $\rho$ .)

$\rightarrow \kappa$  (diffusività termica)

Conducibilità:

↓

$\kappa$

$$\frac{\kappa}{\rho c_p} = \frac{\kappa}{\rho c_p}$$

(Viscosità dinamica)

$\rho$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

(Diffusività.)

Mentre  $Re = \frac{\rho v l_0}{\mu}$ .

Analizziamo ultimo termine; studiamo come siamo arrivati a  $Pr$ :

$$\kappa \nabla^2 T \rightarrow \kappa \cdot \frac{T_0}{L_0^2} \cdot \frac{L_0}{\rho_0 c_p \mu_0 T_0} = \frac{\kappa}{L_0 \rho_0 c_p \mu_0} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\kappa}{c_p \mu} = \frac{1}{Re Pr}$$

(Da  $\nabla^2 T$ . Moltiplico e divido per  $\mu$  per trovarmi  $Re$ .)

Le soluzioni asintotiche associate all'equazione sono le stesse dell'equazione di conservazione della massa.

Il  $Pr$  non posso considerarlo asintotico poiché dipende da proprietà fluido. Quindi non posso farlo variare.

## Lezione fluido 19 maggio

Chiarimento su gruppi adimensionali, su equazioni, su vorticità e su teorema di Bernoulli. I grafici e immagini sono sulle dispense.

Tubo di Pitot: è strumento posizionato su veicoli o velivoli per il calcolo della velocità (l'effetto dell'alta velocità → pressione bassa).



Figura 36: Diagram of a Pitot tube and an airfoil showing pressure distribution.

Punto A avrà pressione totale (statica + dinamica) mentre in B avrà solo pressione statica poiché la velocità è perpendicolare (a prescindere dalla normale se entrante o uscente) da cui  $\omega = 0$ .

$$P + \underbrace{\frac{1}{2}\rho U^2}_B = \text{costante}$$

(A)

Quindi facendo  $P_A - P_B = \rho U^2$  da cui estrapolo  $U$ .

Generazione e trasporto di vorticità; teoremi su vorticità (von Karman, Helmholtz).

Downwash: sulle estremità delle ali si generano vortici che provocano questo effetto definito downwash.

Il downwash spinge l'aria verso il basso provocando un angolo di incidenza minore da cui la portanza diminuisce e maggiore è la resistenza dell'ala al moto.

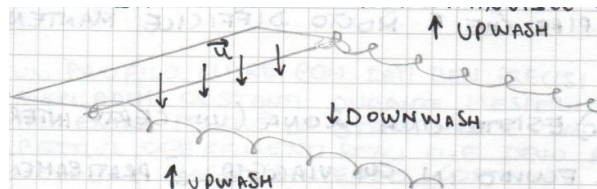


Figura 37: Diagram of an airfoil showing upwash and downwash.

Gli alianti hanno ali lunghe e strette per minimizzare la resistenza dell'aria.

Cioè non è possibile sugli aerei poiché su un'ala ci si mettono motori, missili o pod.

In generale:

- 1) Alta pressione → vorticità bassa
- 2) Bassa pressione → vorticità elevata

La cavitazione è il fenomeno per cui si creano bolle d'aria (in cui aria è compattata) che collassano provocando danni.

Numero di Mach: abbiamo flusso incompressibile se  $M \ll 0,3$  e  $\beta_T \ll 1$  oppure  $\alpha P_0 \ll 1$  e  $\beta_T \ll 1$ .

Fisicamente parlando, passando da Mach subsonico a supersonico si generano onde d'urto.

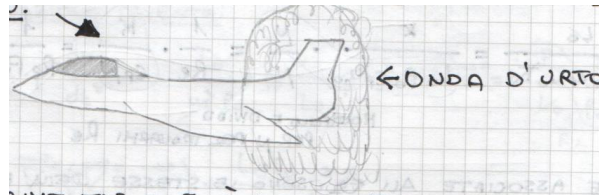


Figura 38: Diagram of a supersonic flow around a wedge, showing a shock wave labeled 'ONDA D'URTO'.

Nella sperimentazione è importante ricordare che sopra  $M > 1,2$  fisicamente i fenomeni a  $M$  supersonico possono essere studiati anche a  $M$  minore poiché riproducono le stesse condizioni. Sopra a  $M > 4$  ciò non è più vero; cambiano anche equazioni di governo.

## Numero di Reynolds $Re$

È il rapporto tra forza di inerzia e forza viscosa.

## Similitudine dinamica

È similitudine che mi garantisce di avere coefficienti di forza uguali. Durante un esperimento devo cercare di raggiungere  $Re$  e  $M$  della reale.

Es. Mach reale Mach esperimento:

$$M_R = 0,83 \rightarrow M_E = 0,83$$

In questo caso se cambio di poco il Mach cambia tutto quindi devo essere necessariamente uguali!

$$M_R = 1,6 \rightarrow M_E = 1,5$$

Oltre  $M > 1,2$  posso variare.

Stesso ragionamento valido per  $Re$  Reynolds.

In un esperimento mantenere allo stesso tempo i rapporti uguali tra i vari gruppi adimensionali è molto difficile.

Lunga corda. Es. se ho un'ala e ho  $L_R$  e per motivi di spazio non mi entra la struttura nella galleria del tempo allora decido di dividere la corda a metà:

$L_E = \frac{1}{2}L_R$  ma per mantenere lo stesso rapporto tra i modelli devo raddoppiare la velocità quindi da  $V_R$  arrivo a  $V_E = 2V_R$  da cui cambia anche il numero di Mach essendo  $M = \frac{V_0}{C_0}$  e quindi cambia tutto.

Tutti questi ragionamenti fanno capire che è molto difficile mantenere costanti i rapporti.

Nel caso di Reynolds (pag 162 dispense) esiste una zona (un certo intervallo) in cui la resistenza di una sfera al fluido in cui viaggia è praticamente costante (o quasi). La parte in cui il grafico crolla è dovuto alla transizione tra flusso laminare e flusso turbolento, quindi la resistenza crolla.

Proprio per questo motivo sulle ali degli aerei ci sono degli “spuntoni” che generano flusso turbolento per diminuire resistenza.

Anche la pallina da golf è creata per generare moto turbolento.

Si parla di resistenza di forma.

La portanza è  $\propto$  proporzionale ad angolo di incidenza.

### Numero di Strouhal $St$

A priori non posso dire flusso è stazionario. Va calcolato  $St$ .

### Numero di Froude $Fr$

Come nel caso di Strouhal, si deve rispettare lo stesso valore durante l’esperienza. È numero rilevante in campo idrodinamico.

### Numero di Rark $Ru$

Nelle nostre applicazioni,  $Ru = 1$  poiché  $p_0$  (di riferimento) = pressione dinamica =  $\rho_0 U^2$ . Ma in altre applicazioni non è 1. Per fenomeni di cavitazione assume un nome diverso (numero di cavitazione).

## Lezione 20 maggio

Similitudine dinamica: (il termine dinamico fa pensare a forze) la similitudine può essere effettuata sperimentalmente o numericamente.

Definiamo coefficienti di portanza ( $C_L$ ), di resistenza ( $C_D$ ) e di momento ( $C_M$ ) (rivedi primo capitolo dispense).

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_0 U^2 S_0}$$

(Coefficiente di portanza. Superficie di riferimento; va bene anche corda al quadrato. Tutti e 3 i coefficienti sono adimensionali.)

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_0 U^2 S_0}$$

(Coefficiente di resistenza)

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_0 U^2 S_0 L_0}$$

(Coefficiente di momento)

In un esperimento se riproduciamo Mach e Reynolds (con i ragionamenti fatti in precedenza) avremo gli stessi coefficienti della realtà. Quindi:

$$\text{Se } Re_E = Re_R \text{ e } M_E = M_R \rightarrow C_{L_E} = C_{L_R}, C_{D_E} = C_{D_R} \text{ e } C_{M_E} = C_{M_R}.$$

Ho un profilo alare con dati ben precisi ( $L_R, D_R, U_R$  ecc.) devo mantenere i gruppi adimensionali costanti durante l'esperimento: poiché nella galleria del vento non mi entra perché la struttura è troppo grande, avrò mi calcolo i rispettivi coefficienti reali che devo rispettare. A questo punto modifico Reynolds e Mach mantenendo costante i coefficienti: modificando  $Re$  ottengo facilmente un  $M$  grande, difficile da riprodurre (anche per il costo) da cui si modifica in genere  $M$  e si lascia  $Re$  non per forza uguale a quello reale (risenti la registrazione).

## Equazione di stato in forma adimensionale

$$P \sim nRT \rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho T} = R}$$

$$R = 287 \text{ J/kg K per aria}$$

Adimensionalizziamo senza usare gli asterischi:

$$\frac{P}{\rho T} = R \text{ in cui al posto di } \rho \rightarrow \rho^*, \quad p \rightarrow p^*, \text{ ecc.}$$

Da cui:

$$\left( \frac{P}{\rho T} \right) = \frac{R\rho_0 T_0}{\rho_0} \xrightarrow[\text{diviso per } \chi]{\text{multiplico } \rightarrow \epsilon} \frac{R\rho_0 T_0 \cdot \chi \cdot U_0^2}{\rho_0 \cdot \chi \cdot U_0^2}$$

(Tutto adimensionale.)

Ricordando che  $Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{\rho_0}$  e  $M = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma RT}}$  avremo:

$$\left( \frac{P}{\rho T} \right) = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{\chi} \cdot \frac{Ru}{1} = \frac{Ru}{\chi M^2} \rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho T} = \frac{Ru}{\chi M^2}}$$

(Equazione di stato in forma adimensionale.)

## Equazioni adimensionalizzate (sempre senza asterischi)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{eq. massa}) \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \vec{g} \quad (\text{eq. quantità di moto}) \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{Ec}{RuSt} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{Ec}{Re} \phi^2 + \frac{1}{RePr} \nabla^2 T \quad (\text{eq. bilancio energia termica in forma entalpica}) \\ \frac{P}{\rho T} = \frac{Ru}{\chi M^2} \quad (\text{eq. stato}) \end{array} \right.$$

Abbiamo 5 incognite ( $\vec{u}, p, \rho, T$ ) e dobbiamo semplificare l'equazione:

- Consideriamo  $Re$  grande (es  $10^4, 10^5$  o  $10^6$ ), matematicamente  $\rightarrow \infty$ 
  - Da cui  $\rho \sim 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$  quindi  $\rho$  trascurabile

- $Re = 1$
- Consideriamo  $M < 0,3$  (flusso incompressibile) e  $BT_0 \ll 1$  (quindi anche  $Ec \ll 1$  poiché legato a  $M^2$ ). Inoltre con  $BT_0 \ll 1$  anche la diffusività è trascurabile, cioè posso trascurare equazione energia poiché la  $T$  non gioca un ruolo importante.

- Possiamo quindi eliminare equazione di stato e equazione energia.

Poiché  $Re \rightarrow \infty$  (matematicamente, molto grande ingegneristicamente) trasuro il termine:

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \quad \text{nella equazione quantità di moto.}$$

(Cioè perché li sto confrontando con quantità di ordine 1.)

- Come ulteriore ipotesi considero  $Fv \rightarrow \infty$  (sempre matematicamente) quindi
- Le forze di massa non sono importanti (a meno che non ci occupiamo di moli ondosi, carene, ecc.) e poiché la densità è costante si elimina il termine stazionario:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{è in} \quad \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \quad \text{la } \rho \text{ porto fuori quindi } \rho = \text{costante}$$

Le equazioni diventano le seguenti:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

(Equazioni di Eulero, forma I. Equazione non lineare.)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p$$

E avremo 4 incognite  $(\vec{u}, p)$ .

Il termine  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  è non lineare: è il termine che crea problemi nella risoluzione a livello matematico.

Per risolvere questo problema introduco un nuovo concetto.

Potenziale  $\varphi$ : grandezza il cui gradiente è  $\vec{u}$ :  $\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$ .

È importante ricordare che  $\varphi \neq \phi^2$  anche se la lettera è la stessa.

Devo introdurre altra ipotesi per la risoluzione del problema tramite potenziale.

- Ipotesi di  $\vec{\omega} = \vec{0}$  così facendo rendo  $\vec{\nabla} \vec{u}$  non rilevante (viscosità trascurabile).  
È importante definire  $\vec{\omega} = \vec{0}$  in ogni punto e non solo in un punto, quindi:

$$\vec{\omega}(x_i, t) = \vec{0} \quad \text{quindi è } \vec{0} \text{ ovunque: vorticità nulla ovunque}$$

Ricordando il teorema di Kelvin, ci diceva che sotto ipotesi di:

- $Re$  grande (già ipotizzata)

- $\vec{F}$  conservativa
- Fluido incompressibile (ipotizzata con numero di Mach e  $\beta_0$ )  $\rightarrow \nabla \cdot \vec{u} = 0$

Allora avremo che:

$$\Gamma = \oint \vec{u} d\vec{l}^T \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S ((\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \underline{\text{costante}}$$

Quindi avendo ipotizzato  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , geque che essa si mantiene costante sempre quindi basterà possiamo affermare che:

$$\vec{\omega}(x_i, t) \rightarrow \vec{\omega}(x_i, 0) = \vec{0} \quad \text{è sufficiente che sia } \vec{0} \text{ ovunque e a } t = 0$$

Matematicamente se  $\vec{\omega} = \vec{0}$  posso introdurre  $\varphi$ : dato campo vettoriale  $\vec{u}$ :

$$\nabla \times \vec{u} = \vec{0} \quad \exists \varphi : \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Infatti avevamo visto come il rotore di un gradiente è nullo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi \equiv \vec{0} \quad \text{mentre} \quad \nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \nabla^2 \varphi$$

Quindi tramite il set di ipotesi (tra cui  $\vec{\omega}(x_i, 0) = \vec{0}$ ) avremo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{cases} \quad (\text{equazioni di Eulero con } \varphi \text{ (forma II)})$$

Tramite questa equazione posso trovarmi  $\vec{u}$  da  $\varphi \rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$ .

Quindi multiplico scalarmente  $\vec{n}$  al gradiente:

La condizione al contorno è richiesta solo per una componente:

$$\vec{u} = \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (\text{proiezione gradiente} \rightarrow \text{derivate calcolate lungo la direzione in cui abbiamo proiettato})$$

Quindi la derivata alla parete lungo  $n$ :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_W = 0$$

Mentre la  $\tau$  non la devo proiettare.

## Lezione fluidodinamica 24 maggio

### Sintesi: da equazioni adimensionali al potenziale

Ricapitolando le ipotesi che abbiamo fatto sul set di equazioni adimensionali:

- $Re \rightarrow \infty$
- $Fr \rightarrow \infty$
- $M \ll 0,3$  e  $\beta_0 \ll 1$  da cui  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  ossia fluido incompressibile
- $Ru = 1$
- $\rho q = 0$  } ma comunque non abbiamo
- $\vec{R} \cdot \vec{n} = 0$  } più equazioni di bilancio dell'energia
- $\vec{\omega}(x_i, t) = 0$

Il teorema di Kelvin garantisce la vorticità costante quindi è sempre nulla in questo caso. Abbiamo poi introdotto il potenziale  $\varphi$ .

$$\vec{u} = \nabla\varphi \quad (\text{ricordando che } \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u})$$

Quest'ultima trattazione è puramente matematica poiché  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$  da cui posso esprimere  $\vec{u}$  come gradiente di qualcosa.

Così facendo ottengo  $\nabla^2\varphi = 0$  equazione di Laplace (equazione differenziale di 2° ordine).

A questo punto devo porre le condizioni al contorno  $\rightarrow$  una all'infinito e una sul corpo.

Quella all'infinito indica che il potenziale rimane indisturbato, lontano dal corpo.

Quella sul corpo si interpreta come condizione di impermeabilità: la componente normale sul corpo deve essere = 0 da cui:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_W = 0 \quad (\text{calcolata sulla parete (wall)})$$

Non posso imporre che la componente tangenziale = 0 costringendo il flusso ad essere influenzato da termini viscosi.

Ricordiamo che se  $\tau \neq \infty$ , non abbiamo imposto che il flusso sia stazionario  $\rightarrow \varphi_\infty(t)$ .

Con tutte queste (ipotesi e condizioni) può essere risolto il sistema.

Riusciamo a trovare  $\varphi(x_i, t)$ .

Trovato  $\varphi \rightarrow$  calcolo  $\vec{\nabla}\varphi = \vec{u} \rightarrow$  uso Bernoulli per trovare  $P$  (è equazione algebrica e non differenziale).

$$P + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{costante} \quad (\text{dove costante può essere valore all'infinito})$$

(Ricordare che negli integrali del profilo alcune sulle dispense va tutto  $\tau$ .)

### Risoluzione potenziale $\varphi$

A questo punto devo sviluppare  $\nabla^2\varphi$ ; ci sono due metodi:

Il metodo diretto è quello più matematico ma più complesso, basato su formula di Green (non lo facciamo). È stato fatto in America da un prof. di RIK. Assegnata la geometria di una

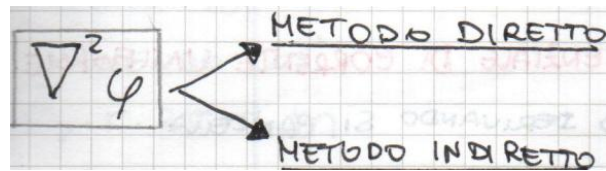


Figura 39: Diagram showing the Laplacian of the potential phi ( $\nabla^2 \varphi$ ) branching into two methods: METODO DIRETTO and METODO INDIRETTO.

struttura possiamo calcolare il flusso potenziale punto per punto; nella realtà la superficie viene rappresentata con pezzetti chiamati pannelli.

È metodo che usano alla NASA.

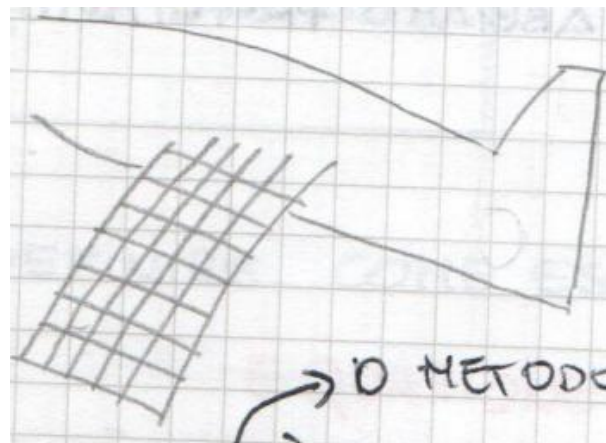


Figura 40: Diagram showing a grid of panels (pannelli) on a surface, representing the discretization of a structure for potential flow calculation.

→ O metodo della sovrapposizione di soluzioni semplici.

Il metodo indiretto è quello più usato e più semplice; essendo l'equazione differenziale e lineare avrò  $\varphi_i$  soluzioni che tramite combinazioni lineari generano una soluzione (quindi da  $\varphi_i$  soluzione ottengo soluzione  $\tilde{\varphi}$ ):

$$\tilde{\varphi} \sim \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

Se ho quindi soluzioni più semplici posso trovare soluzione globale in modo semplice.

**Esempio**

Dato un profilo alare è come riuscire a calcolare il flusso sostituendo al posto del profilo una geometria più semplice (es. insieme di cilindri) di cui so calcolare bene il potenziale:

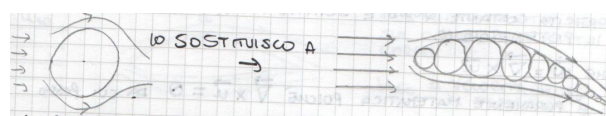


Figura 41: Diagram showing a circle being replaced by a series of circles (cylinders) to approximate a profile, with arrows indicating flow direction.

Il requisito fondamentale è che il campo perturbato deve essere lo stesso di quello fatto con i cilindri; le linee di corrente devono essere le stesse.

Immagino corrente uniforme (linee di corrente parallele).

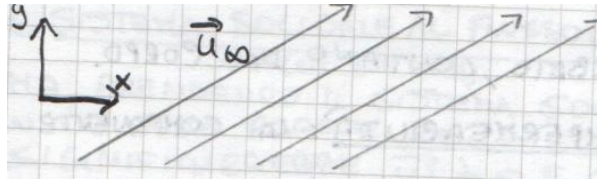


Figura 42: Diagram showing a coordinate system (x, y) with a uniform flow vector  $\vec{u}_\infty$  at an angle  $\alpha$ .

Conosco l'intensità, verso e direzione  $\vec{u}_\infty$ .

Altra ipotesi da considerare per le nostre applicazioni è il caso 2 dimensioni:

2D.

$\vec{u}_\infty$  avrà quindi 2 componenti ed un angolo  $\alpha$  (angolo di incidenza, in aerodinamica). Che è angolo tra asse x di sistema di riferimento e flusso.

Quindi:

$$\vec{u}_\infty = (U_\infty \cos \alpha; U_\infty \sin \alpha)$$

Da cui essendo  $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty \cos \alpha \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_\infty \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{essendo in 2D}) \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Adesso devo integrare tra 2 quantità costanti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow \varphi = U_\infty \cos \alpha x + \text{costante}(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rightarrow \varphi = U_\infty \sin \alpha y + \text{costante}(x) \end{cases} \quad (\text{costante in } y; \text{costante in } x; \tilde{\varphi} = \varphi_1 + \varphi_2)$$

È SAM.

$$\varphi = U_\infty \cos \alpha x + U_\infty \sin \alpha y + \text{costante}$$

(Potenziale di corrente uniforme.)

Assumeremo sempre costante = 0 perché tanto derivando si cancella (nei nostri applicazioni).

Se riesco a porre un sistema di riferimento allineato con velocità cui asse X parallelo a velocità avremo quindi:

$$\varphi = U_\infty x$$

In cui  $\cos \alpha = 1$ .

Adesso dobbiamo studiare un modo per simulare lo spessore dei corpi e definiamo la sorgente e il pozzo (sono sempre flussi).

Immagino che da un punto del campo ci siano linee di corrente radiali. Se le linee escono avremo sorgente, se sono entranti abbiamo pozzo. Quindi sono l'uno il contrario dell'altro.

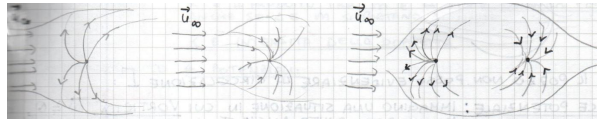


Figura 43: Three diagrams illustrating flow patterns. The first shows flow lines curving around a central point, labeled 'SORGENTE'. The second shows flow lines curving around a central point, labeled 'POZZO'. The third shows flow lines curving around a central point, labeled 'DIREGIBILE'.

(Sorgente; Pozzo; Dirigibile.)

Considerando una sorgente, la proprietà che caratterizza la sorgente è la portata  $m$  (positivo per sorgente, negativo per pozzo).

$m > 0$  sorgente.  $m < 0$  pozzo.

$$m = \iint \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{portata in volume}) \quad \left( \frac{m^3}{s} \right) \quad (\text{in idro: } \boxed{Q = VA})$$

(Se prodotto scalare è positivo (sorgente), negativo (pozzo).)

Scelgo linea semplice di raggio  $r$ .

Se voglio calcolarmi la portata non conviene introdurre sistema cartesiano ma meglio polare.

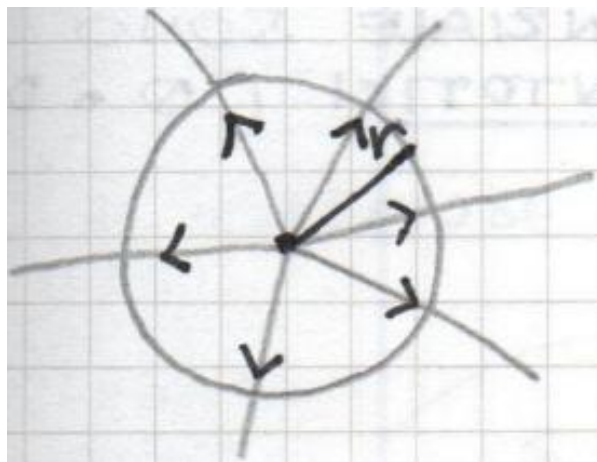


Figura 44: Diagram of a polar coordinate system with a circle of radius  $r$  centered at the origin. Vectors are shown from the origin to points on the circle.

Quindi:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

(Risulta e avoid. Coordinate cartesiane.)

Da cui anche il gradiente diventa:  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y} \right) \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial r}; \frac{\partial}{r \partial \theta} \right)$  (in cui appare  $\frac{2}{r \partial \theta}$  perché legato all'arco e non semplicemente all'angolo).

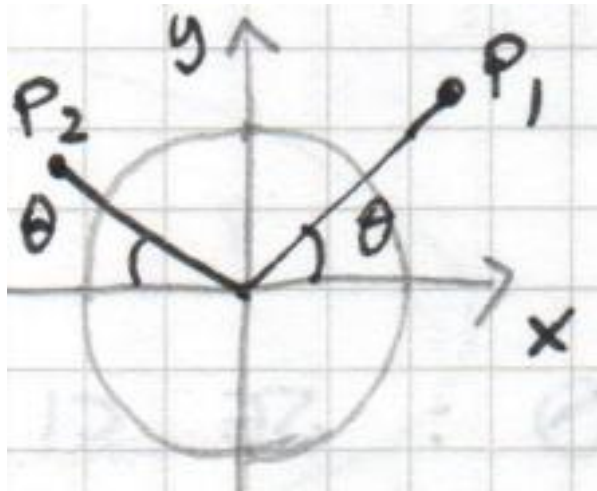


Figura 45: Diagram of a polar coordinate system showing a point P1 at  $(r, \theta)$  and a point P2 at  $(r, \theta + d\theta)$ .

Da cui avremo che:

$$\oint \vec{u} \cdot \vec{r} d\theta$$

(Da componente di velocità proiettata lungo  $r = U_r$ . Elemento della circonferenza.)

C. Pozzo.  $\rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} u_r r d\theta$$

Se  $r$  variasse avrei linee di corrente distorte e non sarebbero più radiali.

Ottenendo così:

$$\begin{cases} U_r \cdot r \cdot 2\pi = m \\ U_\theta = 0 \end{cases}$$

(Non ho componente tangenziale.)

$$\begin{cases} U_r = \frac{m}{2\pi r} \\ U_\theta = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{cases} U_r \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow \varphi = \frac{m}{2\pi} \ln r \\ U_\theta \end{cases}$$

Ho trovato  $\varphi_S = \frac{m}{2\pi} \ln r$  potenziale di sorgente (pozzo  $\varphi_P$ ) (sorgente).

Se ho profilo alare, a causa dell'asimmetria geometrica, flusso tra ventre e dorso è diverso  $\rightarrow$  ho quindi portanza.

Con il pozzo non posso evidenziare la circolazione  $\Gamma$ .

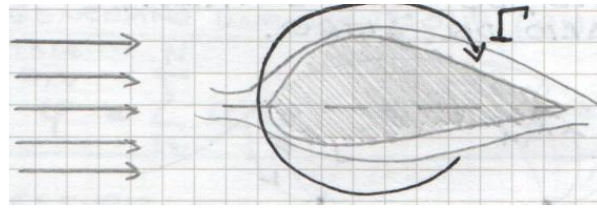


Figura 46: Diagram of an airfoil profile with flow lines. Streamlines are shown approaching from the left, curving around the airfoil, and exiting to the right. A circulation arrow labeled indicates the flow around the closed path of the airfoil.

Vortice potenziale: immagino una situazione in cui vorticità  $\vec{\omega} \neq 0$ . In un dato punto anche se nel resto dello spazio è 0 (la vorticità, non il resto).

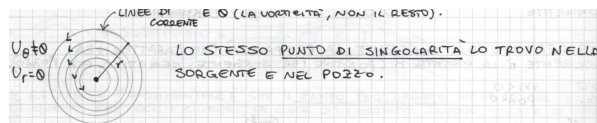


Figura 47: Diagram of a potential vortex. Concentric circular streamlines are shown around a central point. Labels indicate  $U_\theta \neq 0$  and  $U_r = 0$ . An arrow labeled 'LINEE DI CORRENTE' points to the streamlines. Text to the right states: 'LO STESSO PUNTO DI SINGOLARITÀ LO TROVO NELLA SORGENTE E NEL POZZO.'

Vortice: è situazione singolare. L'approccio che stiamo per usare funziona ovunque tranne nel punto.

I vari punti di singolarità saranno dentro i corpi studiati quindi, se devo calcolare il potenziale non mi interessa il potenziale interno ma potenziale in punti più esterni. Dove calcolo il potenziale sono punti in cui  $\varphi$  è sicuramente finito e non ha valori asintotici ( $\infty$  o  $-\infty$ ).

Quindi:  $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$ :

$$= \oint U_\theta r d\theta$$

Per definizione avrò  $U_\theta \neq 0 = U_r = 0$ : se ci fosse componente radiale, si formerebbe un vortice.

$$\begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta = r \cdot 2\pi = \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Applicando il gradiente come prima tramite coordinate polari  $\rightarrow$ :

$$\rightarrow \begin{cases} U_r = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_V = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta}$$

(Come in  $\varphi_S$  non ho una costante + C.)