

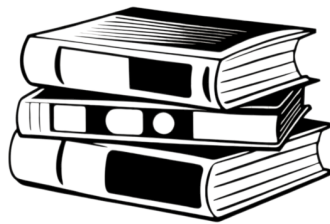
# Fluidodinamica

---

Universita degli studi Roma3

Docente: **Roberto Camussi**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



**NOTESTOBOOK**  
ELEVATE YOUR NOTES

[notestobook.it](http://notestobook.it)

Anno Accademico 2025/2026



# Indice

1	Fondamenti di fluidodinamica . . . . .	6
2	Dalla idrodinamica alla fluidodinamica . . . . .	6
3	Densità variabile: coefficienti di compressibilità e di espansione termica . . . . .	7
4	Equazione di continuità (bilancio della massa) . . . . .	8
4.1	Derivazione in forma integrale . . . . .	8
4.2	Passaggio alla forma differenziale . . . . .	9
4.3	Forma con la derivata materiale . . . . .	10
5	Richiami di algebra tensoriale . . . . .	11
5.1	Tensore delle tensioni . . . . .	11
5.2	Prodotto diadico (tensoriale) . . . . .	11
5.3	Gradiente di un vettore e sua distinzione dalla divergenza . . . . .	11
6	Equazione del bilancio della quantità di moto . . . . .	12
6.1	Forma integrale . . . . .	12
6.2	Forma differenziale . . . . .	12
6.3	Semplificazione tramite l'equazione di continuità . . . . .	13
7	Relazione costitutiva e tensore delle tensioni . . . . .	13
7.1	Scomposizione del tensore delle tensioni . . . . .	13
7.2	Assiomi delle relazioni costitutive . . . . .	14
7.3	Decomposizione del gradiente di velocità . . . . .	14
7.4	Fluidi newtoniani . . . . .	14
8	Definizione di pressione . . . . .	15
9	Equazione di Navier-Stokes . . . . .	16
9.1	Derivazione in forma indiciale . . . . .	16
9.2	Forma vettoriale . . . . .	16
9.3	Riepilogo dell'equazione di Navier-Stokes . . . . .	17
10	Vorticità . . . . .	17
11	Vorticità, circolazione e teoremi fondamentali . . . . .	18
11.1	Linee di vorticità e struttura dei vortici . . . . .	18

11.2	Circolazione e teorema di Stokes . . . . .	19
11.3	Teorema di Kelvin . . . . .	20
11.4	Teoremi di Helmholtz . . . . .	22
11.5	Equazione di trasporto della vorticità . . . . .	23
12	Equazione di bilancio dell'energia . . . . .	26
12.1	Energia totale e contributi di potenza e calore . . . . .	26
12.2	Forma integrale . . . . .	27
12.3	Forma differenziale . . . . .	27
12.4	Legge di Fourier e sviluppo del tensore degli sforzi . . . . .	28
12.5	Equazione di Bernoulli in forma generale . . . . .	28
12.6	Equazione dell'energia in termini di energia interna . . . . .	30
12.7	Equazione dell'energia in termini di entalpia . . . . .	31
12.8	Equazione dell'energia in termini di entropia . . . . .	32
12.9	Teorema di Crocco . . . . .	32
13	Il teorema di Crocco e la generazione di vorticità . . . . .	32
14	Il sistema completo delle equazioni di governo . . . . .	34
15	Adimensionalizzazione delle equazioni e teorema di Buckingham . . . . .	35
15.1	Variabili adimensionali e grandezze di riferimento . . . . .	35
15.2	Equazione di conservazione della massa in forma adimensionale . . . . .	36
15.3	Gruppi adimensionali legati alla compressibilità . . . . .	37
15.4	Il numero di Mach . . . . .	37
16	Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto . . . . .	39
17	Adimensionalizzazione dell'equazione di bilancio dell'energia . . . . .	40
18	Equazione di stato in forma adimensionale . . . . .	41
19	Sistema completo delle equazioni adimensionali . . . . .	41
20	Semplificazione per flussi incompressibili non viscosi . . . . .	41
20.1	Equazioni di Eulero per flusso incompressibile . . . . .	42
21	Similitudine dinamica e coefficienti aerodinamici . . . . .	42
22	Applicazioni: tubo di Pitot e fenomeni di vorticità . . . . .	43
22.1	Il tubo di Pitot . . . . .	43
22.2	Generazione di vorticità e downwash . . . . .	44
23	Introduzione del potenziale di velocità . . . . .	44
23.1	Equazione di Laplace e condizioni al contorno . . . . .	45
24	Risoluzione del potenziale $\varphi$ : metodo diretto e metodo indiretto . . . . .	46
24.1	Metodo diretto . . . . .	46
24.2	Metodo indiretto (sovrapposizione di soluzioni semplici) . . . . .	47

25	Soluzioni elementari dell'equazione di Laplace . . . . .	48
25.1	Corrente uniforme . . . . .	48
25.2	Sorgente e pozzo . . . . .	48
25.3	Vortice potenziale . . . . .	50

## 1 Fondamenti di fluidodinamica

## 2 Dalla idrodinamica alla fluidodinamica

Nell'idrodinamica si studiano prevalentemente fluidi — in particolare liquidi — la cui densità può essere considerata costante. Il passaggio alla fluidodinamica si rende necessario quando tale ipotesi non è più sostenibile: la densità  $\rho$  diviene una variabile del problema e, con essa, entrano in gioco nuove equazioni di governo.

In idrodinamica il sistema di equazioni coinvolge quattro variabili e quattro equazioni:

- le tre componenti della velocità  $u_1, u_2, u_3$ ;
- la pressione  $p$ ;
- l'equazione vettoriale della quantità di moto, che fornisce tre equazioni scalari;
- l'equazione di continuità (conservazione della massa), che è un'equazione scalare.

Quando si ammette che  $\rho$  sia variabile, essa diviene una nuova incognita. Tuttavia, per scrivere un'equazione che leghi la densità alle altre grandezze, è necessario introdurre anche la temperatura  $T$ , poiché in generale  $\rho = \rho(p, T)$ . Si aggiungono pertanto due nuove equazioni:

1. **l'equazione di stato**, che lega  $\rho$ ,  $p$  e  $T$ ;
2. **l'equazione dell'energia**, che governa l'evoluzione termica del sistema.

L'introduzione della densità come variabile modifica inoltre la struttura delle equazioni di massa e di quantità di moto già note dall'idrodinamica.

Il sistema completo della fluidodinamica comprende dunque **sei equazioni in sei incognite**. Per trattarlo si adottano notazioni più compatte — notazione indiciale di Einstein, notazione matriciale e tensoriale — che consentono di scrivere in forma generale equazioni valide anche quando la densità è variabile.

**Semplificazione tramite adimensionalizzazione.** Al sistema generale è possibile applicare una semplificazione di carattere sistematico: individuato il problema fisico, si procede all'adimensionalizzazione delle equazioni mediante il teorema di Buckingham<sup>1</sup>. Da tale procedura emergono i **gruppi adimensionali** caratteristici della fluidodinamica:

- Re — numero di Reynolds;
- M — numero di Mach;
- Fr — numero di Froude;
- Pr — numero di Prandtl;
- St — numero di Strouhal;
- Ec — numero di Eckert;

---

<sup>1</sup>Il teorema II di Buckingham stabilisce che ogni relazione fisicamente significativa tra  $n$  grandezze dimensionali, coinvolgenti  $k$  dimensioni fondamentali indipendenti, può essere riscritta come relazione tra  $n - k$  gruppi adimensionali.

- Ru — numero di Rück<sup>2</sup>.

In particolare, il numero di Mach tiene conto degli effetti di compressibilità, ossia dei flussi a densità variabile.

**Soluzioni asintotiche.** Una volta individuati i gruppi adimensionali, si cercano le **soluzioni asintotiche** corrispondenti ai limiti in cui ciascun parametro tende a zero o a infinito. L'idrodinamica stessa è una semplificazione della fluidodinamica ottenuta nel limite  $M \rightarrow 0$ , in cui gli effetti di compressibilità sono trascurabili.

Alcune soluzioni asintotiche di particolare rilievo nel limite  $Re \rightarrow \infty$  sono le seguenti:

1. **Flussi potenziali.** Si introduce una nuova variabile, il potenziale di velocità  $\varphi$ , che conduce a equazioni di governo molto più semplici, nelle quali la viscosità non compare.
2. **Strato limite.** L'ipotesi  $Re \rightarrow \infty$  ha come conseguenza l'impossibilità di calcolare correttamente l'effetto delle forze viscosi: il modello a potenziale predice l'assenza di resistenza aerodinamica, risultato noto come **paradosso di d'Alembert**. La teoria dello strato limite reintroduce l'effetto della viscosità in una regione sottile adiacente alla superficie del corpo, recuperando così informazioni fondamentali come la resistenza aerodinamica.
3. **Flussi compressibili in condotto.** Vengono studiati in condizioni subsoniche ( $M < 1$ ) e supersoniche ( $M > 1$ ), tenendo conto delle variazioni di densità. In geometrie semplici le equazioni assumono forma notevolmente più trattabile rispetto al caso generale.

Nel limite opposto,  $Re \rightarrow 0$ , si ottengono i **flussi stokesiani**, dominati dalla viscosità; nel caso di fluidi non viscosi (euleriani) si ha invece  $Re \rightarrow \infty$ .

### 3 Densità variabile: coefficienti di compressibilità e di espansione termica

In fluidodinamica la densità  $\rho$  non è più una costante ma dipende, in generale, dalla pressione  $p$  e dalla temperatura  $T$ :  $\rho = \rho(p, T)$ . Per quantificare la sensibilità della densità rispetto a ciascuna di queste grandezze si introducono due coefficienti.

**Coefficiente di compressibilità.** Il **coefficiente di compressibilità**  $\alpha$  [ $\text{Pa}^{-1}$ ] è definito come

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (1)$$

cosicché  $\partial \rho / \partial p = \alpha \rho$ . Esso quantifica quanto la densità sia sensibile alle variazioni di pressione. A titolo indicativo, per l'acqua  $\alpha \sim 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ , mentre per l'aria  $\alpha \sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ : la differenza di cinque ordini di grandezza spiega perché, in un gas, anche piccole variazioni di pressione producano variazioni apprezzabili di densità.

---

<sup>2</sup>Il numero indicato negli appunti come "Ru" (Rück) non corrisponde a un gruppo adimensionale di uso universale nei testi di fluidodinamica. Potrebbe trattarsi di una notazione specifica adottata nel corso.

**Coefficiente di espansione termica.** Il coefficiente di espansione termica  $\beta$  [ $\text{K}^{-1}$ ] è definito come

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad (2)$$

da cui  $\partial \rho / \partial T = -\beta \rho$ . Il segno negativo riflette il fatto che, per la grande maggioranza dei fluidi, un aumento di temperatura provoca una diminuzione di densità. Per l'acqua  $\beta \sim 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , per l'aria  $\beta \sim 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ : anche in questo caso la sensibilità differisce di circa due ordini di grandezza.

**Classificazione dei flussi in base alla dipendenza di  $\rho$ .** A seconda di quali variabili influenzino effettivamente la densità, si distinguono:

- $\rho = \text{costante}$ : **flusso incompressibile**;
- $\rho = \rho(p)$ : **flusso barotropico**;
- $\rho = \rho(T)$ : **flusso termotropico** (ad esempio la convezione naturale dell'aria in una stanza);
- $\rho = \rho(p, T)$ : **flusso compressibile** nel caso più generale.

**Equazione di stato dei gas perfetti.** Per la maggior parte delle applicazioni ingegneristiche<sup>3</sup> la relazione di stato utilizzabile è quella dei gas perfetti:

$$\frac{p}{\rho} = \gamma R T, \quad (3)$$

dove  $\gamma = c_p/c_v$  è il rapporto tra i calori specifici a pressione e a volume costante e  $R$  è la costante specifica del gas, che incorpora le caratteristiche chimiche della specie considerata. Per l'aria,  $\gamma = 1,4$  e  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ . Il reciproco della densità,  $1/\rho$ , rappresenta il volume specifico.

## 4 Equazione di continuità (bilancio della massa)

L'equazione di continuità esprime la conservazione della massa. La sua derivazione parte da un principio primo di carattere lagrangiano — la massa di un volume materiale resta costante — e, attraverso il teorema del trasporto di Reynolds, viene riformulata in ottica euleriana su un volume di controllo fisso.

### 4.1 Derivazione in forma integrale

Si consideri un volume materiale  $V(t)$ , costituito sempre dalla stessa materia ma con volume variabile nel tempo. La massa totale contenuta in esso è

$$M = \iiint_{V(t)} \rho \, dV. \quad (4)$$

Il principio di conservazione della massa afferma che

$$\frac{DM}{Dt} = 0, \quad (5)$$

---

<sup>3</sup>L'equazione di stato dei gas perfetti perde validità in condizioni estreme, ad esempio per numeri di Mach superiori a circa 10, dove intervengono effetti di dissociazione e ionizzazione.

dove il simbolo  $D/Dt$  indica la **derivata materiale** (detta anche totale o sostanziale), da non confondere con la derivata parziale rispetto al tempo  $\partial/\partial t$ .

Applicando il **teorema del trasporto di Reynolds**, si passa dal volume materiale  $V(t)$  a un volume di controllo  $V$  fisso nello spazio, con superficie  $S$ :

$$0 = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (6)$$

Il primo termine rappresenta la variazione temporale della massa contenuta nel volume di controllo; il secondo è il flusso netto di massa attraverso la superficie  $S$ , dove  $\vec{n}$  è la normale uscente.

**Notazione indiciale e convenzione di Einstein.** Il prodotto scalare  $\vec{u} \cdot \vec{n}$  può essere scritto in notazione indiciale come  $u_i n_i$ , dove la ripetizione dell'indice  $i$  implica sommatoria secondo la **convenzione di Einstein**<sup>5</sup>:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = u_i n_i = \sum_{i=1}^3 u_i n_i = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3. \quad (7)$$

In generale, indicando con  $u_i$  le componenti del vettore  $\vec{u}$  e con  $n_i$  quelle di  $\vec{n}$ , la notazione indiciale  $u_i$  è equivalente alla notazione vettoriale  $\vec{u}$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

L'equazione (6) in forma indiciale diviene pertanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho u_i n_i dS = 0. \quad (8)$$

## 4.2 Passaggio alla forma differenziale

La forma integrale (8) fornisce informazioni di carattere globale; per studi di dettaglio è necessario passare alla forma differenziale. A tal fine si applica il **teorema di Gauss-Green**, che trasforma l'integrale di superficie in un integrale di volume tramite l'operatore di divergenza.

L'operatore nabla in forma vettoriale e indiciale è

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (9)$$

**Divergenza e gradiente.** È importante distinguere la **divergenza** dal **gradiente**. La divergenza si applica a un vettore e produce uno scalare (diminuisce il grado tensoriale):

$$\text{div}(\vec{a}) = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \quad (10)$$

Si noti che  $\nabla \cdot \vec{a}$  (divergenza) è concettualmente diverso da  $\nabla \vec{a}$  (gradiente di un vettore, che produce un tensore del secondo ordine).

Applicando il teorema di Gauss-Green all'equazione (8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} dV = 0, \quad (11)$$

<sup>4</sup>La derivata materiale  $D/Dt$  segue la particella fluida nel suo moto; la derivata parziale  $\partial/\partial t$  misura la variazione in un punto fisso dello spazio.

<sup>5</sup>Nella convenzione di sommazione di Einstein, ogni volta che un indice compare ripetuto (esattamente due volte) in un termine, si intende sommato su tutti i suoi valori ammissibili (1, 2, 3 in tre dimensioni). La sommatoria esplicita  $\sum$  viene omessa.

ovvero, in forma vettoriale,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0. \quad (12)$$

Si verifica che

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3}, \quad (13)$$

che è effettivamente uno scalare, coerentemente con il fatto che la divergenza abbassa di un grado l'ordine tensoriale.

Data l'arbitrarietà del volume di controllo  $V$  (e ipotizzando che esso non vari nel tempo), l'integrando deve annullarsi identicamente. Si ottiene così l'**equazione di continuità in forma differenziale**:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0}, \quad (14)$$

che in forma indiciale si scrive

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (15)$$

Questa è l'equazione generale di bilancio della massa, valida per qualunque fluido.

**Caso particolare: fluido incompressibile.** Se  $\rho$  è costante, la derivata temporale  $\partial \rho / \partial t$  si annulla e  $\rho$  può essere portata fuori dalla divergenza, ottenendo

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (16)$$

che esprime il vincolo di incompressibilità: la divergenza della velocità è nulla.

### 4.3 Forma con la derivata materiale

L'equazione di continuità può essere riscritta in modo compatto utilizzando la **derivata materiale**, definita come operatore che agisce su una generica grandezza  $\bullet$ :

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \bullet), \quad (17)$$

dove il termine  $\vec{u} \cdot \nabla \bullet$  rappresenta il trasporto convettivo. In forma vettoriale:

$$\vec{u} \cdot \nabla \bullet = u_1 \frac{\partial \bullet}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \bullet}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \bullet}{\partial x_3}, \quad (18)$$

e in forma indiciale con notazione di Einstein:

$$\vec{u} \cdot \nabla \bullet = u_k \frac{\partial \bullet}{\partial x_k}. \quad (19)$$

Sviluppando la divergenza  $\nabla \cdot (\rho \vec{u})$  nell'equazione (14) mediante la regola del prodotto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (20)$$

si riconoscono i primi e terzo termine come la derivata materiale di  $\rho$ . L'equazione di continuità assume dunque la forma

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0}, \quad (21)$$

dove

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho. \quad (22)$$

**Interpretazione fisica.** L'equazione (21) afferma che la variazione di densità di una particella fluida lungo la sua traiettoria ( $D\rho/Dt$ ) è compensata dalla dilatazione o compressione volumetrica del fluido circostante ( $\rho \nabla \cdot \vec{u}$ ). Per un fluido incompressibile  $D\rho/Dt = 0$  e dunque  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ : il volume di ogni particella fluida si conserva.

## 5 Richiami di algebra tensoriale

Prima di affrontare l'equazione della quantità di moto è opportuno richiamare alcune operazioni tensoriali che compariranno nella formulazione.

### 5.1 Tensore delle tensioni

Nella conservazione della quantità di moto compare un integrale di superficie in cui appare il **tensore delle tensioni**  $\underline{\underline{T}}$ , una matrice  $3 \times 3$  simmetrica:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$ . La **traccia** del tensore è  $T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ .

La divergenza applicata a un tensore del secondo ordine produce un vettore (abbassa il grado tensoriale di un'unità):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}. \quad (24)$$

### 5.2 Prodotto diadico (tensoriale)

Il **prodotto diadico** (o tensoriale) di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , indicato con  $\vec{a} \otimes \vec{b}$ , produce un tensore del secondo ordine:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

da non confondere con il prodotto scalare  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ , che produce uno scalare.

### 5.3 Gradiente di un vettore e sua distinzione dalla divergenza

Il **gradiente** del campo di velocità  $\vec{u}$  è un tensore del secondo ordine a nove componenti:

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (26)$$

mentre la **divergenza**  $\nabla \cdot \vec{u} = \partial u_i / \partial x_i$  è uno scalare. Si noti la differenza cruciale: nel gradiente gli indici  $i$  e  $j$  sono distinti; nella divergenza l'indice è ripetuto e dunque sommato.

Il termine convettivo che compare nell'equazione della quantità di moto è

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (27)$$

che è un vettore (indice libero  $j$ ).

## 6 Equazione del bilancio della quantità di moto

Si parte nuovamente da un principio primo formulato su un volume materiale. La quantità di moto totale è

$$\vec{Q} = \iiint_{V(t)} \rho \vec{u} dV, \quad (28)$$

e il principio fondamentale della dinamica stabilisce che

$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \sum \vec{F}_m + \sum \vec{F}_s, \quad (29)$$

dove  $\vec{F}_m$  sono le forze di massa e  $\vec{F}_s$  le forze di superficie<sup>6</sup>.

### 6.1 Forma integrale

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds si passa dal volume materiale al volume di controllo  $V$  con superficie  $S$ :

$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iint_S \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS. \quad (30)$$

Le forze di massa e di superficie sono espresse rispettivamente come

$$\vec{F}_m = \iiint_V \rho \vec{f} dV, \quad (31)$$

dove  $\vec{f}$  è la forza per unità di massa (gravità, forze elettromagnetiche, forza di Coriolis, ecc.), e

$$\vec{F}_s = \iint_S \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} dS, \quad (32)$$

dove  $\underline{\underline{T}}$  è il tensore delle tensioni.

L'equazione integrale della quantità di moto è dunque

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iint_S (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \rho \vec{f} dV + \iint_S \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} dS. \quad (33)$$

Il prodotto diadico  $\vec{u} \otimes \vec{u}$  ha componenti  $u_i u_j$ :

$$u_i u_j = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3^2 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

### 6.2 Forma differenziale

Applicando il teorema di Gauss-Green agli integrali di superficie (la divergenza opera su tutto ciò che moltiplica  $\vec{n}$ ) e sfruttando l'arbitrarietà del volume di controllo, si ottiene la forma differenziale:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}, \quad (35)$$

che in forma indiciale si scrive come tre equazioni scalari ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (36)$$

---

<sup>6</sup>Si ricordi la distinzione tra grandezze *estensive* (dipendenti dal volume o dalla massa, come  $\vec{Q}$ ) e grandezze *intensive* (indipendenti da volume e massa, come  $\vec{u}$ ). Nel bilancio della massa la grandezza intensiva associata è semplicemente 1.

### 6.3 Semplificazione tramite l'equazione di continuità

Sviluppando le derivate del prodotto nel primo membro dell'equazione (35):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}. \quad (37)$$

Raccogliendo  $\vec{u}$ :

$$\vec{u} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] = 0, \quad (38)$$

poiché l'espressione tra parentesi quadre è esattamente l'equazione di continuità (14), identicamente nulla per qualunque fluido. Rimane dunque

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}, \quad (39)$$

ossia

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}}}. \quad (40)$$

**Interpretazione fisica.** L'equazione (40) è la seconda legge di Newton scritta per un elemento fluido infinitesimo: il prodotto della densità per l'accelerazione materiale ( $\rho D\vec{u}/Dt$ ) è uguale alla somma delle forze di massa ( $\rho \vec{f}$ ) e delle forze di superficie ( $\nabla \cdot \underline{\underline{T}}$ ) per unità di volume.

## 7 Relazione costitutiva e tensore delle tensioni

Il tensore delle tensioni  $T_{ij}$  è simmetrico e possiede dunque sei componenti indipendenti, che sono altrettante incognite. Per chiudere il sistema è necessaria una **relazione costitutiva** che esprima  $T_{ij}$  in funzione della cinematica del fluido e dello stato termodinamico.

### 7.1 Scomposizione del tensore delle tensioni

In fluidodinamica si adotta la convenzione di normali uscenti<sup>7</sup>, e il tensore viene scomposto in una parte sferica (isotropa) e una parte deviatorica:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}, \quad (41)$$

dove  $\delta_{ij}$  è il **delta di Kronecker**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$p$  è la pressione e  $\sigma_{ij}$  è il **tensore degli sforzi viscosi** (o deviatorici), che contiene tutta la dipendenza dalla velocità.

Sostituendo la scomposizione (41) nell'equazione (40):

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}. \quad (43)$$

<sup>7</sup>In idrodinamica la convenzione è di normali entranti; il cambio di segno si riflette nella scomposizione del tensore delle tensioni. In idrodinamica si scrive  $\Phi_{ij} = p \delta_{ij} + \Phi_{ij}^R$ , mentre in fluidodinamica  $T_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma_{ij}$ .

In forma indiciale, la divergenza della parte sferica dà

$$\frac{\partial(-p\delta_{ij})}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad (44)$$

poiché il delta di Kronecker “annulla” l’indice ripetuto.

## 7.2 Assiomi delle relazioni costitutive

La determinazione della dipendenza funzionale  $T_{ij} = F(u_i, \partial u_i/\partial x_j, \text{stato termodinamico})$  si basa su tre assiomi formulati da Noll e Truesdell (1953)<sup>8</sup>:

1. **Indipendenza dal futuro (determinismo):** lo stato tensionale è determinato esclusivamente dalla storia passata e presente del moto.
2. **Effetto locale:** ciò che accade in una particella è influenzato solo dal suo intorno immediato, non da regioni lontane.
3. **Indipendenza dal sistema di riferimento (obiettività):** poiché  $T_{ij}$  è un tensore simmetrico, esso può dipendere solo da tensori della stessa natura. In particolare, non può dipendere dalla parte antisimmetrica del gradiente di velocità.

## 7.3 Decomposizione del gradiente di velocità

Il gradiente di velocità si decompone in una parte simmetrica e una antisimmetrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{E_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij}}, \quad (45)$$

dove  $E_{ij}$  è il **tensore della velocità di deformazione** (simmetrico)<sup>9</sup> e  $\Omega_{ij}$  è il **tensore di spin** (antisimmetrico). In forma vettoriale:  $\nabla \vec{u} = \underline{E} + \underline{\Omega}$ .

Per il terzo assioma, il tensore degli sforzi viscosi dipende solo dalla parte simmetrica:

$$\sigma_{ij} = G(E_{ij}, \text{stato termodinamico}). \quad (46)$$

In condizioni idrostatiche ( $E_{ij} = 0$ ) si ha  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$ , e la pressione è determinata unicamente dallo stato termodinamico. In condizioni dinamiche si aggiunge il contributo  $\sigma_{ij}$ , che è interamente legato alla velocità di deformazione.

## 7.4 Fluidi newtoniani

Sviluppando  $\sigma_{ij} = G(E_{ij})$  in serie:

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B E_{ij} + \text{termini di ordine superiore}, \quad (47)$$

per la grande maggioranza dei fluidi è sufficiente arrestarsi al primo ordine, ottenendo un legame **lineare** tra sforzi e velocità di deformazione: si parla in tal caso di **fluidi newtoniani**.

Si pone  $B = 2\mu$ , dove  $\mu$  è la **viscosità dinamica**<sup>10</sup>:

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \quad (48)$$

<sup>8</sup>W. Noll e C. Truesdell posero le basi assiomatiche della meccanica del continuo moderna, stabilendo i principi che ogni relazione costitutiva deve soddisfare.

<sup>9</sup>In idrodinamica lo stesso tensore è spesso indicato con  $D_{ij}$ ; in fluidodinamica si usa comunemente  $E_{ij}$  o  $\epsilon_{ij}$ .

<sup>10</sup>Il fattore 2 è introdotto per convenzione, in modo da semplificare il fattore 1/2 presente nella definizione di  $E_{ij}$ .

**Caso incompressibile.** Per un fluido incompressibile la divergenza della velocità è nulla ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ), e con essa si annulla il termine  $A$  (che è proporzionale a  $\nabla \cdot \vec{u}$ ). Si ottiene

$$\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (49)$$

**Caso compressibile.** Quando  $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$ , il termine  $A$  non si annulla. Poiché l'informazione di compressibilità è contenuta nella divergenza, si pone  $A = \lambda \nabla \cdot \vec{u} = \lambda E_{kk}$ , dove  $\lambda$  è il **secondo coefficiente di viscosità**. La relazione costitutiva completa è

$$\boxed{T_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}}. \quad (50)$$

Si noti che  $E_{kk}$  è uno scalare (la traccia del tensore  $E_{ij}$ ):

$$E_{kk} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \vec{u} = \text{tr}(E_{ij}). \quad (51)$$

## 8 Definizione di pressione

Il termine contenente  $\lambda$  nella relazione costitutiva (50) ha conseguenze sulla definizione di pressione. Esaminiamo i tre casi fondamentali.

**Caso statico (fluido in quiete).** Se il fluido è in quiete,  $E_{ij} = 0$  e  $T_{ij} = -p \delta_{ij}$ . La traccia del tensore è  $\text{tr}(T_{ij}) = -3p$ , da cui

$$p = -\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3}. \quad (52)$$

**Caso incompressibile in moto.** Si ha  $E_{kk} = 0$  e dunque  $T_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$ . La traccia dà  $\text{tr}(T_{ij}) = -3p + 2\mu \text{tr}(E_{ij}) = -3p$ , poiché  $\text{tr}(E_{ij}) = \nabla \cdot \vec{u} = 0$ . Si ritrova

$$p = -\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3}. \quad (53)$$

**Caso compressibile.** La traccia del tensore completo è

$$\text{tr}(T_{ij}) = -3p + 3\lambda E_{kk} + 2\mu E_{kk}, \quad (54)$$

da cui

$$-\frac{\text{tr}(T_{ij})}{3} = p - E_{kk} \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right). \quad (55)$$

Il termine aggiuntivo  $E_{kk}(\lambda + 2\mu/3)$  si annulla nel caso incompressibile.

**Ipotesi di Stokes e viscosità volumetrica.** La quantità  $(\lambda + 2\mu/3)$  è detta **viscosità volumetrica** (o *bulk viscosity*). Per una vasta classe di fluidi — in particolare gas monoatomici a bassa densità e, con buona approssimazione, l'aria — vale l'**ipotesi di Stokes**:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad (56)$$

che annulla la viscosità volumetrica<sup>11</sup>. In tal caso la pressione coincide con  $-\text{tr}(T_{ij})/3$  anche nel caso compressibile, e la relazione costitutiva per il tensore degli sforzi viscosi diviene

$$\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} - \frac{2}{3}\mu E_{kk} \delta_{ij}. \quad (57)$$

<sup>11</sup>Per gas poliatomici o in condizioni particolari l'ipotesi di Stokes non è verificata e il termine di viscosità volumetrica deve essere mantenuto.

## 9 Equazione di Navier-Stokes

Sostituendo la relazione costitutiva (50) nell'equazione della quantità di moto (40) e svolgendo la divergenza, si perviene all'**equazione di Navier-Stokes**.

### 9.1 Derivazione in forma indiciale

Partendo da

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (58)$$

si sviluppa il termine  $\partial T_{ij}/\partial x_j$ :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial(p \delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\lambda E_{kk} \delta_{ij})}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (59)$$

Il primo termine, grazie al delta di Kronecker, si riduce a  $-\partial p/\partial x_i$ . Il secondo, analogamente, diviene  $\lambda \partial E_{kk}/\partial x_i$ . Nel terzo termine si riconoscono due contributi:

- $\mu \partial^2 u_i / (\partial x_j \partial x_j) = \mu \nabla^2 u_i$ , dove  $\nabla^2$  è il **laplaciano**<sup>12</sup>;
- $\mu \partial(\partial u_j / \partial x_j) / \partial x_i = \mu \partial E_{kk} / \partial x_i$ , ottenuto scambiando l'ordine delle derivate.

Raccogliendo:

$$\boxed{\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial E_{kk}}{\partial x_i}}, \quad (60)$$

dove l'indice  $j$  nel laplaciano è un indice muto (sommato) e deve essere scelto diverso da  $i$ .

### 9.2 Forma vettoriale

Applicando l'ipotesi di Stokes ( $\lambda = -2\mu/3$ ), il coefficiente dell'ultimo termine diviene  $\lambda + \mu = \mu/3$ , e l'equazione in forma vettoriale si scrive

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u})}. \quad (61)$$

**Interpretazione fisica.** Nell'equazione (61) si riconoscono:

- $\rho D\vec{u}/Dt$ : accelerazione materiale per unità di volume, che include sia la variazione locale  $\rho \partial \vec{u} / \partial t$  sia il trasporto convettivo  $\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ; quest'ultimo è il termine responsabile della **non linearità** dell'equazione;
- $\rho \vec{f}$ : forze di massa per unità di volume;
- $-\nabla p$ : forza di pressione, derivante dalla parte sferica del tensore delle tensioni;
- $\mu \nabla^2 \vec{u}$ : termine diffusivo viscoso (laplaciano della velocità), che rappresenta la dissipazione per attrito interno;
- $(\mu/3) \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$ : termine legato alla compressibilità, che si annulla per fluidi incompressibili.

<sup>12</sup>Il laplaciano è un operatore scalare:  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2 = \partial^2/(\partial x_k \partial x_k)$ . Non modifica l'ordine tensoriale della grandezza su cui opera.

**Ipotesi alla base dell'equazione di Navier-Stokes.** L'equazione (61) è stata ottenuta sotto due ipotesi fondamentali:

1. **fluido newtoniano:** legame lineare tra sforzi viscosi e velocità di deformazione;
2. **ipotesi di Stokes:**  $\lambda = -2\mu/3$ , valida per gas monoatomici a bassa densità e, con buona approssimazione, per l'aria.

### 9.3 Riepilogo dell'equazione di Navier-Stokes

Espandendo la derivata materiale, l'equazione (61) assume la forma esplicita

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}), \quad (62)$$

dove il termine  $-\nabla p$  proviene dalla parte sferica del tensore delle tensioni  $(\nabla \cdot (-p \underline{I}))$ , con  $\partial(p \delta_{ij})/\partial x_i = \partial p/\partial x_j$ , il delta di Kronecker “attacca” l'indice ripetuto), e i termini dissipativi provengono dalla parte deviatorica  $\sigma_{ij} = 2\mu E_{ij} - (2\mu/3)(\nabla \cdot \vec{u}) \delta_{ij}$ .

## 10 Vorticità

La **vorticità** è definita come il rotore del campo di velocità:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}, \quad (63)$$

ed è dunque funzione della posizione e del tempo. In coordinate cartesiane:

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \quad (64)$$

La vorticità è una grandezza locale che misura la rotazione del fluido. In un condotto a sezione arbitraria con linee di corrente parallele, la vorticità può essere nulla (flusso irrotazionale); al contrario, nelle regioni in cui il campo di velocità presenta forti variazioni trasversali — ad esempio in prossimità di pareti o nel nucleo di strutture vorticosi — la vorticità è significativamente diversa da zero.

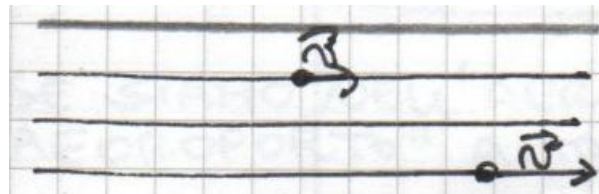


Figura 1: Condotto con linee di corrente parallele: flusso a vorticità nulla.

**Vortici e linee di vorticità.** Definire rigorosamente un vortice è un problema complesso. In termini qualitativi, un vortice è una regione dello spazio in cui  $\vec{\omega} \neq 0$  e la vorticità è confinata in un volume limitato. Così come il campo di velocità  $\vec{u}$  definisce le **linee di corrente** (curve ovunque tangenti a  $\vec{u}$ ), il campo di vorticità  $\vec{\omega}$  definisce le **linee di vorticità** (curve ovunque tangenti a  $\vec{\omega}$ ).

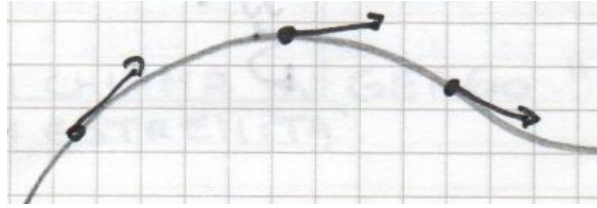


Figura 2: Regione con linee di corrente curve: presenza di vorticità.

Le proprietà fondamentali dei vortici furono studiate da Kelvin e Helmholtz, i cui teoremi restano validi e centrali nella fluidodinamica moderna<sup>13</sup>.

““

## 11 Vorticità, circolazione e teoremi fondamentali

### 11.1 Linee di vorticità e struttura dei vortici

Il campo di vorticità  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$  possiede, analogamente al campo di velocità, una propria struttura geometrica. Si definisce **linea di vorticità** la curva che in ogni punto è tangente al vettore vorticità locale  $\vec{\omega}$ ; essa svolge per il campo di vorticità lo stesso ruolo che la linea di corrente svolge per il campo di velocità.

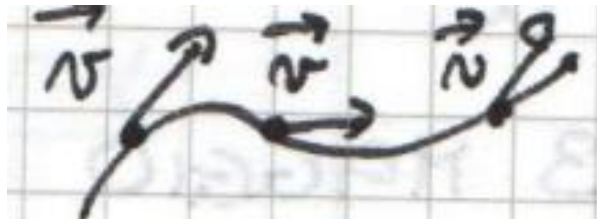


Figura 3: Linea di vorticità: curva tangente in ogni punto al vettore  $\vec{\omega}$ .

In generale, la linea di corrente è perpendicolare alla linea di vorticità<sup>14</sup>. Un esempio familiare è il gorgo che si forma nello scarico di un lavandino, dove le particelle fluide seguono traiettorie circolari nel piano orizzontale mentre la vorticità è diretta verticalmente.

In termini generali, un **vortice** è l'insieme delle linee di vorticità che attraversano la superficie delimitata da una linea materiale chiusa. Si ricordi che una **linea materiale** è una curva chiusa costituita sempre dalle stesse particelle fluide. Quando la linea materiale è infinitesima — e dunque individua una superficie infinitesima — l'insieme delle linee di vorticità che la attraversano prende il nome di **filetto vorticoso**.

Le linee di vorticità che compongono un vortice possono differire tra loro, ma presentano una coerenza d'insieme. Per quantificare l'**intensità** di un vortice — ossia “di quanto ruotano” le particelle — si ricorre al calcolo della **circolazione**, definita come l'integrale di linea della velocità lungo la linea materiale chiusa.

<sup>13</sup>I teoremi di Helmholtz stabiliscono, tra l'altro, che le linee di vorticità non possono avere estremità libere all'interno del fluido e che, in un fluido ideale barotropico soggetto a sole forze conservative, l'intensità di un tubo vorticoso si conserva nel tempo.

<sup>14</sup>Questa proprietà è intuitiva: la velocità  $\vec{u}$  descrive il moto traslatorio delle particelle, mentre  $\vec{\omega}$  ne descrive la rotazione locale. In molte configurazioni i due campi risultano ortogonali, come nel caso di un gorgo in cui il fluido ruota attorno a un asse verticale mentre le linee di corrente giacciono su piani orizzontali.

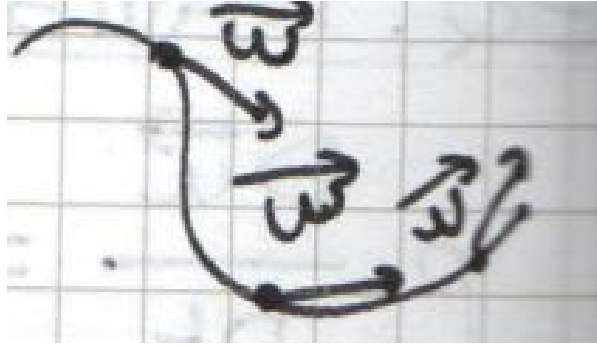


Figura 4: Linea chiusa con vettori di vorticità  $\vec{\omega}$  lungo il suo perimetro.

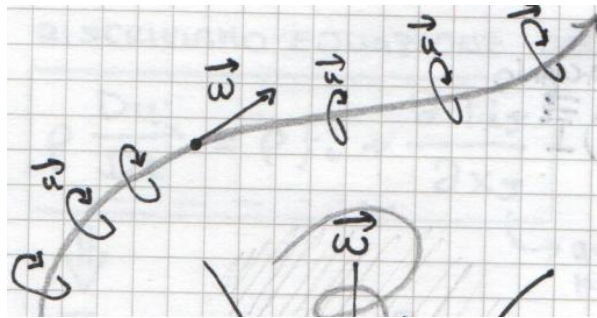


Figura 5: Linea di corrente ( $\vec{u}$ ) con vettori di vorticità ( $\vec{\omega}$ ) ad essa tangenti.

## 11.2 Circolazione e teorema di Stokes

La circolazione  $\Gamma$  lungo una linea materiale chiusa è definita come

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}, \quad (65)$$

dove  $d\vec{l}$  è l'elemento di linea tangente alla curva e  $\vec{u}$  è la velocità locale. Per ogni elementino  $d\vec{l}$  si calcola il prodotto scalare con la velocità corrispondente e si somma lungo l'intera linea chiusa.

Tramite il **teorema di Stokes**, la circolazione può essere riscritta come integrale di superficie:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS, \quad (66)$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie che abbia come bordo la linea chiusa considerata e  $\vec{n}$  è il versore normale alla superficie. Si osservi che  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega}$  è proprio la vorticità del campo di velocità. Ne consegue immediatamente che se  $\vec{\omega} = 0$  ovunque sulla superficie, l'intensità della circolazione è nulla:  $\Gamma = 0$ .

**Interpretazione fisica.** La circolazione misura la tendenza complessiva del fluido a ruotare lungo un percorso chiuso. Quando  $\Gamma \neq 0$ , le particelle fluide possiedono una componente netta di rotazione attorno alla regione racchiusa dalla linea materiale. Il passaggio dalla forma di linea (65) alla forma di superficie (66) mostra che la circolazione è interamente determinata dalla distribuzione di vorticità sulla superficie: non serve conoscere  $\vec{u}$  punto per punto lungo il contorno, basta conoscere  $\vec{\omega}$  sulla superficie.

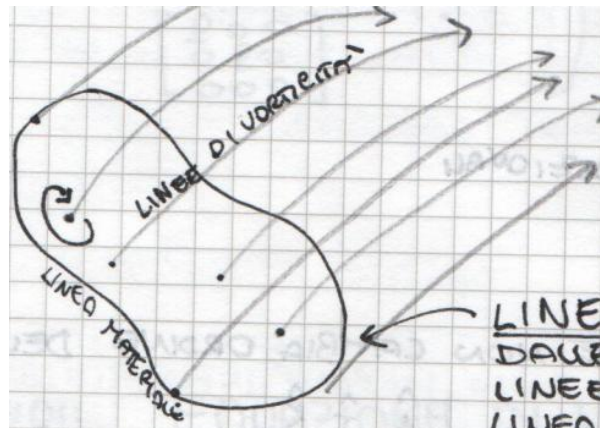


Figura 6: Linea materiale chiusa con linee di vorticità passanti attraverso la superficie da essa delimitata.

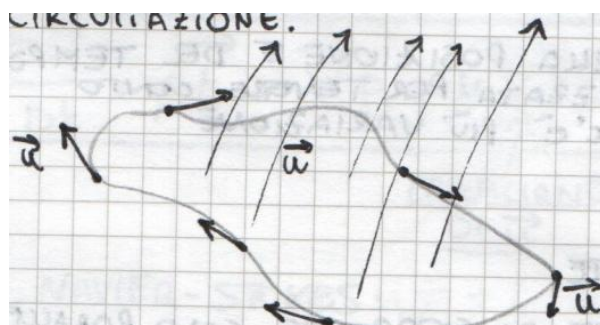


Figura 7: Linea materiale chiusa con vettori velocità  $\vec{u}$  e vorticità  $\vec{\omega}$  lungo il percorso.

### 11.3 Teorema di Kelvin

Le considerazioni tridimensionali e fisiche sulla struttura dei vortici furono sviluppate da Helmholtz, mentre Kelvin<sup>15</sup> affrontò il fenomeno in modo matematico, ponendo le seguenti ipotesi:

1. Numero di Reynolds molto elevato:  $Re = \frac{\rho u L}{\eta} \rightarrow \infty$ . In pratica, quando  $Re$  è sufficientemente grande, il termine viscoso è trascurabile — il che non significa identicamente nullo, ma semplicemente di ordine inferiore rispetto agli altri termini.
2. Forze di massa conservative:  $\vec{F} = -\nabla G$ , dove  $G$  è il potenziale gravitazionale. Se  $\vec{F}$  è conservativa, il suo rotore è nullo.
3. Flusso incompressibile:  $\rho = \text{costante}$ <sup>16</sup>.

Se tutte queste ipotesi sono soddisfatte, vale il **teorema di Kelvin**:

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0} \iff \boxed{\Gamma = \text{costante.}} \quad (67)$$

<sup>15</sup>Lord Kelvin, il cui nome di nascita era William Thomson, affrontò il problema in chiave prevalentemente matematica.

<sup>16</sup>Kelvin aveva in realtà considerato anche il caso di flusso barotropico, in cui  $p = p(\rho)$ , ma nel presente contesto ci si limita al caso incompressibile.

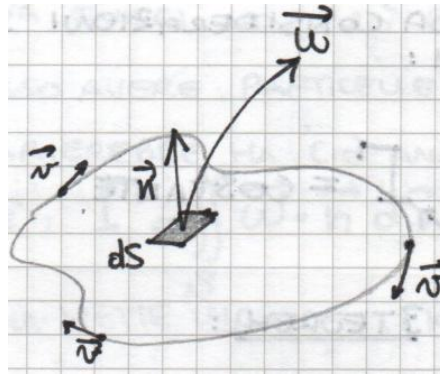


Figura 8: Superficie  $S$  con versore normale  $\vec{n}$ , elemento di area  $dS$  e vorticità  $\vec{\omega}$ ; la linea  $l$  ne costituisce il bordo.

**Interpretazione fisica.** Il teorema afferma che la circolazione associata a una linea materiale chiusa si conserva nel tempo, purché il fluido sia inviscido, incompressibile e soggetto a sole forze conservative. In altre parole, un anello di particelle fluide che inizialmente non ruota ( $\Gamma = 0$ ) non potrà mai acquisire circolazione netta, e viceversa.

### 11.3.1 Applicazione: portanza e vortici di estremità

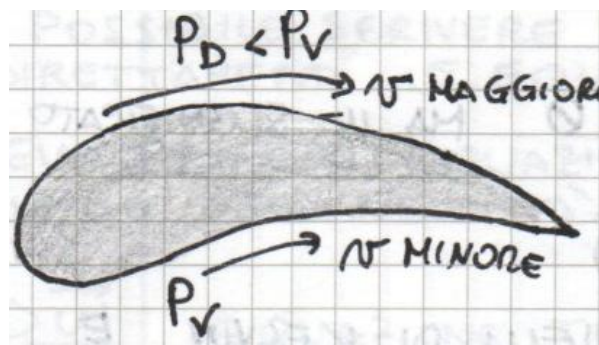


Figura 9: Profilo alare: la pressione sul dorso  $p_D$  è minore di quella sul ventre  $p_V$ ; la velocità di flusso è  $V$ .

Si consideri un profilo alare investito da una corrente uniforme. La velocità sul dorso è maggiore poiché il fluido deve percorrere un cammino più lungo rispetto al ventre. Dal teorema di Bernoulli segue che la pressione sarà maggiore sul ventre ( $p_V > p_D$ ), generando la portanza.

Se si prende una linea materiale chiusa che circonda il profilo quando questo è ancora fermo, la circolazione iniziale è nulla:

$$\Gamma = 0 \quad \text{a } t = 0. \quad (68)$$

Quando il profilo si mette in moto, per il teorema di Kelvin la circolazione totale deve rimanere nulla. Tuttavia, attorno al profilo si sviluppa una circolazione  $\Gamma_1$  (responsabile della portanza). Per conservare  $\Gamma = 0$ , deve necessariamente formarsi un secondo vortice di circolazione opposta:

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2, \quad (69)$$

cosicché la circolazione netta della linea materiale rimane nulla.

Tanto più è intensa la circolazione  $\Gamma_1$  attorno al profilo, tanto più intenso sarà il vortice  $\Gamma_2$  rilasciato a valle. In ambito aeronautico,  $\Gamma_2$  è noto come **vortice di scia** (o “vortice di aeroporto”

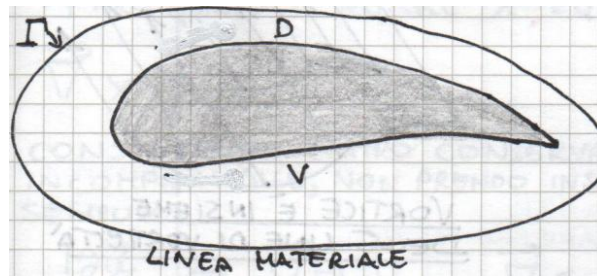


Figura 10: Linea materiale chiusa attorno al profilo alare prima della messa in moto.

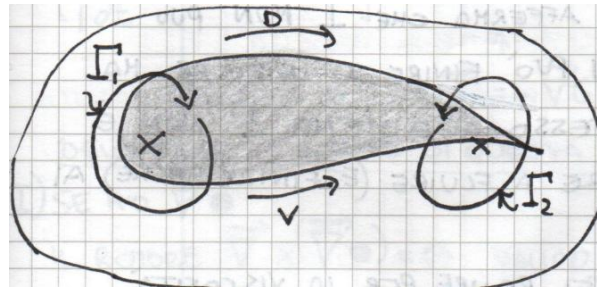


Figura 11: Linea materiale in moto: i due vortici  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  hanno circolazione opposta, garantendo  $\Gamma_{tot} = 0$ .

nel gergo operativo); più in generale si parla di **vortici di estremità**. Grazie alla viscosità, questo vortice svanisce progressivamente per diffusione, con un meccanismo proporzionale a  $\nabla^2 \vec{\omega}$ .

#### 11.4 Teoremi di Helmholtz

Helmholtz partì dalle considerazioni di Kelvin e le estese al caso tridimensionale dei vortici, formulando tre teoremi fondamentali. Mentre Kelvin ragionava sulla linea materiale, Helmholtz si concentrò sulla struttura dei vortici nello spazio.

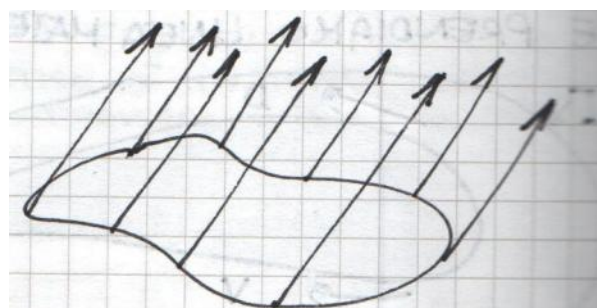


Figura 12: Vortice: insieme delle linee di vorticità con circolazione costante lungo il tubo vorticoso.

**Primo teorema di Helmholtz.** Se si considerano diverse linee materiali ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ ) che circondano lo stesso tubo vorticoso in sezioni differenti, si dimostra che tutte le circolazioni sono uguali. L'**intensità del vortice è costante lungo il tubo vorticoso** (sotto le ipotesi di Kelvin). Come conseguenza, un vortice non può iniziare né terminare all'interno del fluido: deve necessariamente chiudersi su se stesso, oppure iniziare e finire ai confini del dominio. Se il

vortice si interrompesse, la circolazione cambierebbe da una sezione all'altra, contraddicendo il teorema<sup>17</sup>.

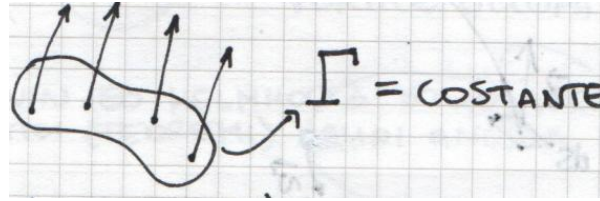


Figura 13: Tubo vorticoso con  $\Gamma = \text{costante}$  lungo tutta la sua estensione.

**Secondo teorema di Helmholtz.** Se una particella fluida si trova all'interno di un vortice, non può uscirne; analogamente, una particella esterna non può entrarvi. Ciò discende direttamente dalla definizione di linea materiale — che è costituita sempre dalle stesse particelle — e dal primo teorema: se una particella “scappasse” dal vortice, la vorticità sulla superficie cambierebbe, alterando  $\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS$ , in contraddizione con la costanza dell'intensità.

**Terzo teorema di Helmholtz.** L'intensità del vortice è costante nel tempo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \implies \quad \Gamma = \text{costante}. \quad (70)$$

Formalmente l'enunciato è analogo a quello di Kelvin, ma il contesto è diverso: Kelvin parla di circolazione lungo una generica linea materiale, Helmholtz parla specificamente dell'intensità di un vortice. Con questi tre teoremi si spiegano fenomeni quali i vortici di scia in aeroporto, i vortici di estremità delle ali e i tornado.

## 11.5 Equazione di trasporto della vorticità

I teoremi di Kelvin e Helmholtz forniscono informazioni di carattere integrale. Per la progettazione ingegneristica, tuttavia, è necessario conoscere la vorticità punto per punto e istante per istante:  $\vec{\omega}(x_i, t)$ . Occorre dunque una **trattazione differenziale**.

Un approccio possibile consiste nel risolvere le equazioni di governo nelle variabili primitive (tre componenti di velocità, densità, pressione, temperatura), calcolare numericamente il campo di velocità e poi ricavare la vorticità tramite il rotore. In alternativa, è possibile scrivere direttamente un'equazione di evoluzione per  $\vec{\omega}$ , eliminando la velocità come variabile primaria. Si cerca dunque un'**equazione di trasporto della vorticità** della forma  $D\vec{\omega}/Dt = \dots$ , analoga all'equazione di Navier-Stokes per la velocità.

Il procedimento consiste nel calcolare il rotore dell'equazione di Navier-Stokes. Si considerano un fluido incompressibile e forze di massa conservative ( $\vec{F} = -\nabla G$ ):

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = -\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (71)$$

Per calcolare il rotore si sfruttano due identità fondamentali:

- (I) Il rotore di un gradiente è identicamente nullo:  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \bullet) = 0$ , valido per qualunque grandezza scalare. Pertanto i termini  $\vec{\nabla} G$  e  $\vec{\nabla} p$  scompaiono.

<sup>17</sup>Nella realtà un vortice può “rompersi” per effetto della viscosità, che qui non viene considerata. Il vortice può tuttavia variare nella forma pur mantenendo costante l'intensità.

(II) Il rotore del laplaciano di un vettore commuta:  $\vec{\nabla} \times (\nabla^2 \vec{u}) = \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \nabla^2 \vec{\omega}$ .

Applicando il rotore all'equazione (71) e ricordando che  $\rho = \text{costante}$ <sup>18</sup>:

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = \mu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (72)$$

Lo sviluppo del termine  $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$ , con l'ipotesi di incomprimibilità, produce due contributi:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}. \quad (73)$$

Sostituendo nell'equazione (72) e portando il termine  $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  al secondo membro, si ottiene, dopo aver diviso per  $\rho$ :

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}} \quad (74)$$

dove  $\nu = \mu/\rho$  è la **viscosità cinematica**<sup>19</sup>.

**Osservazione importante.** Si noti che

$$\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} \neq \frac{D\vec{\omega}}{Dt}, \quad (75)$$

a causa della non linearità del termine convettivo  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ . È proprio dallo sviluppo di questo termine che emergono i due contributi (73), la cui combinazione consente di ricostruire la derivata materiale  $D\vec{\omega}/Dt$ .

**Interpretazione fisica.** L'equazione (74) afferma che la vorticità varia nello spazio e nel tempo a causa di due meccanismi distinti:

1. **Diffusione viscosa:**  $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$ . La viscosità tende a diffondere la vorticità nello spazio, analogamente a come il calore si diffonde per conduzione. Un esempio intuitivo è il fumo di una sigaretta: il filamento vorticoso inizialmente concentrato si allarga progressivamente. Se il fluido non fosse viscoso, il vortice manterrebbe la propria struttura indefinitamente.
2. **Vortex stretching** (stiramento del vortice):  $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ . Questo termine indica che la vorticità varia in presenza di un campo di velocità non uniforme (se la velocità fosse costante, il gradiente sarebbe nullo e il termine scomparirebbe).

### 11.5.1 Vortex stretching e cascata di energia

Si consideri un condotto convergente: esiste un gradiente di velocità tra ingresso e uscita, e la vorticità sarà diversa nelle due sezioni.

Un vortice che entra nel condotto orientato perpendicolarmente alla direzione del flusso viene "schiacciato" dalla contrazione. Per il secondo teorema di Helmholtz, il vortice è formato sempre dalle stesse particelle; pertanto, se la sezione trasversale diminuisce, il vortice si deforma. In uscita la componente di vorticità nella direzione perpendicolare al flusso sarà minore:  $\omega_2 < \omega_1$ .

<sup>18</sup>Se  $\rho$  non fosse costante, il procedimento sarebbe sostanzialmente diverso, poiché il rotore non potrebbe essere portato all'interno dei termini contenenti  $\rho$ .

<sup>19</sup>Nel testo originale degli appunti compare l'espressione "viscosità dinamica" riferita a  $\nu$ ; si tratta in realtà della viscosità *cinematica*. La viscosità dinamica è  $\mu$ .

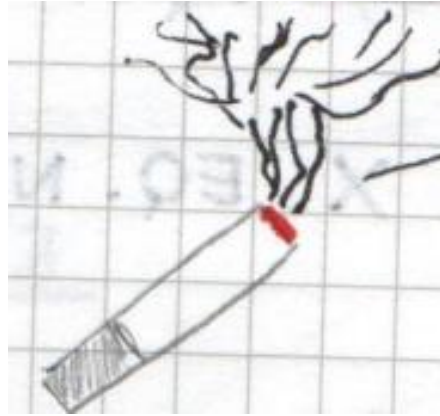


Figura 14: Diffusione della vorticità: analogia con il fumo di una sigaretta che si espande per effetto viscoso.

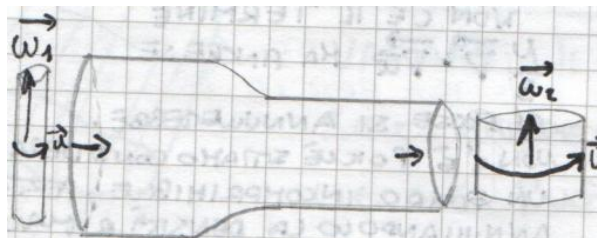


Figura 15: Condotto convergente: un vortice che entra verticalmente nel campo di moto viene deformato dal gradiente di velocità.

Viceversa, se il vortice è orientato nella direzione del flusso e il condotto si restringe, il tubo vorticoso si allunga e il suo raggio diminuisce ( $r_2 < r_1$ ), con conseguente aumento della vorticità:  $\omega_2 > \omega_1$ . In questo caso è avvenuto un trasferimento di energia.

Il meccanismo del vortex stretching è intimamente legato alla **turbolenza**. Se il campo di moto è caotico, l'azione della velocità spezza i vortici più grandi in vortici sempre più piccoli.

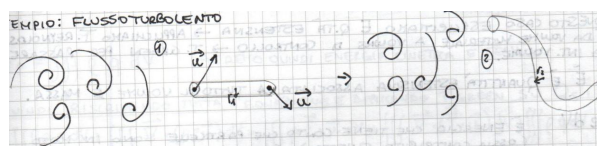


Figura 16: Vortex stretching in un flusso turbolento: un vortice grande (1) viene stirato e frammentato in vortici più piccoli (2) dal campo di velocità.

Concentrandosi sulle sezioni di ingresso e uscita, il vortice si deforma: se si allunga,  $\omega_2 > \omega_1$  e  $r_2 < r_1$ , con trasferimento di energia verso scale sempre più piccole. Ai vortici più piccoli, la viscosità diventa dominante e l'energia cinetica viene infine dissipata in calore. Questo meccanismo prende il nome di **cascata di energia** e fu formalizzato da Kolmogorov nel 1941<sup>20</sup>.

Se si elimina il termine  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$  (vortex stretching), i vortici di grande scala vengono dissipati in un tempo molto più lungo, poiché manca il meccanismo di trasferimento verso le piccole scale.

<sup>20</sup>La teoria di Kolmogorov del 1941 (comunemente indicata come K41) stabilisce le leggi di scala per la distribuzione dell'energia tra le diverse scale di un flusso turbolento, prevedendo lo spettro  $E(k) \propto k^{-5/3}$ .

### 11.5.2 Il caso bidimensionale

In due dimensioni l'equazione di trasporto della vorticità si semplifica notevolmente. Il prodotto  $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$  si annulla identicamente, poiché la velocità giace nel piano  $(x, y)$  mentre la vorticità è diretta perpendicolarmente ad esso (lungo  $z$ )<sup>21</sup>:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (76)$$

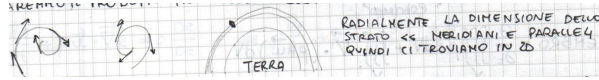


Figura 17: Analogia con i vortici atmosferici: radialmente lo spessore dello strato è molto minore delle dimensioni orizzontali, rendendo il problema essenzialmente bidimensionale.

Questa semplificazione ha conseguenze fisiche importanti. Un uragano, finché rimane in quota e il moto è essenzialmente bidimensionale, non risente del vortex stretching e i suoi tempi caratteristici di vita sono molto lunghi. Se invece tocca la superficie terrestre, il moto diventa tridimensionale e il meccanismo del vortex stretching entra in gioco, accelerando la dissipazione. Analogamente, la Grande Macchia Rossa di Giove persiste da secoli proprio perché, in assenza di una superficie solida, il flusso resta quasi bidimensionale e non vi è nulla che attivi efficacemente il vortex stretching.

## 12 Equazione di bilancio dell'energia

L'ultima equazione di governo da derivare è l'equazione di bilancio dell'energia. Il punto di partenza è il **primo principio della termodinamica**:

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q, \quad (77)$$

dove  $E$  è l'energia totale del sistema,  $L$  rappresenta la potenza (lavoro per unità di tempo) e  $Q$  il calore scambiato e prodotto. I segni sono qui generici e verranno determinati esplicitando i singoli contributi<sup>22</sup>.

### 12.1 Energia totale e contributi di potenza e calore

L'energia totale associata al volume materiale è una quantità estensiva:

$$E = \iiint_V \rho e dV, \quad (78)$$

dove  $e$  è l'energia specifica (per unità di massa), che tiene conto sia del moto macroscopico delle particelle (contributo cinetico) sia della loro agitazione molecolare (energia interna):

$$e = \frac{1}{2} u_i^2 + U, \quad (79)$$

<sup>21</sup>In forma indiciale,  $\omega_k \partial u_i / \partial x_k = 0$  perché  $\omega$  ha solo la componente  $\omega_3$  e le velocità  $u_1, u_2$  non dipendono da  $x_3$ .

<sup>22</sup>Per omogeneità dimensionale,  $L$  e  $Q$  sono in realtà potenze (energia per unità di tempo), non lavoro e calore in senso stretto.

in cui

$$\frac{1}{2} u_i^2 = \frac{1}{2} u_i u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (80)$$

è l'energia cinetica specifica e  $U$  è l'energia interna specifica<sup>23</sup>. L'energia interna è legata alla temperatura tramite

$$dU = c_v dT, \quad (81)$$

dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante. Si ricordi inoltre che l'entalpia specifica è  $dH = c_p dT$ , dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante; l'entalpia tiene conto sia della pressione sia dell'energia interna legata alla temperatura.

La potenza si decompone in contributi di massa e di superficie:

$$L = L_M + L_S = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iint_S (\vec{T} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} dS, \quad (82)$$

dove  $\vec{F}$  è la forza di massa per unità di massa e  $\vec{T}$  è il tensore degli sforzi.

Il calore si decompone in calore scambiato attraverso la superficie e calore prodotto nel volume:

$$Q = Q_S + Q_P, \quad Q_S = - \iint_S \vec{K} \cdot \vec{n} dS, \quad Q_P = \iiint_V \rho q dV, \quad (83)$$

dove  $\vec{K}$  è il vettore flusso di calore e  $q$  è il tasso di produzione di calore per unità di massa.

## 12.2 Forma integrale

Si applica il teorema di Reynolds al primo membro dell'equazione (77) per passare dal volume materiale al volume di controllo, e poi il teorema di Green (divergenza) per convertire gli integrali di superficie in integrali di volume. Si ottiene la **forma integrale dell'equazione di bilancio dell'energia**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) dV + \iiint_V \rho q dV - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{K} dV. \quad (84)$$

## 12.3 Forma differenziale

Assumendo arbitrario il volume di controllo, si ottiene la **forma differenziale**:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) = \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{K} + \rho \vec{F} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}). \quad (85)$$

Per far comparire la derivata materiale, si sviluppano i prodotti nel primo membro. Ricordando che

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e + e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \quad (86)$$

e che, per l'equazione di conservazione della massa,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ , i termini contenenti  $e$  moltiplicato per la continuità si elidono, lasciando:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{K}. \quad (87)$$

<sup>23</sup>Non compare la massa  $m$  nel termine  $\frac{1}{2} u_i^2$  poiché  $e$  è una quantità intensiva, ossia energia per unità di massa.

## 12.4 Legge di Fourier e sviluppo del tensore degli sforzi

Il vettore flusso di calore  $\vec{K}$  introduce tre nuove incognite ( $K_1, K_2, K_3$ ) che devono essere legate a quantità già note. Si adotta la **legge di Fourier**:

$$\vec{K} = -\lambda \vec{\nabla} T, \quad (88)$$

dove  $\lambda$  è la conducibilità termica del fluido. Il segno negativo riflette il fatto che il flusso di calore è diretto in verso opposto al gradiente di temperatura: il calore fluisce spontaneamente dalle regioni più calde a quelle più fredde.

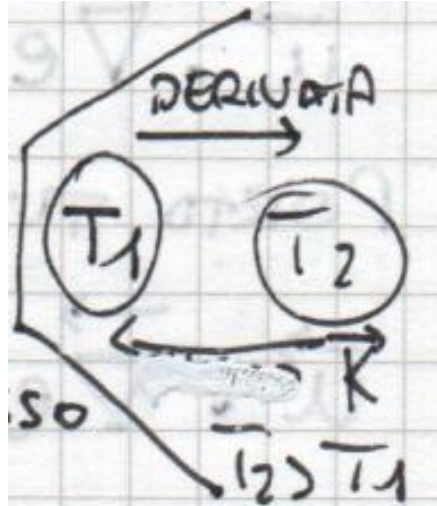


Figura 18: Conduzione termica: il flusso di calore  $\vec{K}$  è diretto da  $T_1$  (caldo) verso  $T_2$  (freddo), in verso opposto al gradiente  $\vec{\nabla} T$ .

Ne consegue:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \lambda \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = \lambda \nabla^2 T. \quad (89)$$

Per il tensore degli sforzi, si ricorda la decomposizione  $\vec{T} = -p\vec{I} + \vec{\sigma}$ , dove  $\vec{\sigma}$  è il tensore degli sforzi viscosi. Lo sviluppo della divergenza del prodotto  $\vec{T} \cdot \vec{u}$  in notazione indiciale fornisce:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{T} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (-p \delta_{ij} u_j + \sigma_{ij} u_j) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}). \quad (90)$$

Sostituendo le espressioni (89) e (90) nell'equazione (87), si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia nella forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) + \rho q + \lambda \nabla^2 T. \quad (91)$$

## 12.5 Equazione di Bernoulli in forma generale

L'equazione (91) si semplifica notevolmente sotto le seguenti ipotesi:

- flusso incompressibile:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ;
- fluido inviscido:  $\mu = 0$ , dunque  $\vec{\sigma} = 0$ ;
- nessuna produzione di calore:  $q = 0$ ;

- nessuno scambio di calore<sup>24</sup>:  $\lambda \nabla^2 T = 0$ ;
- forze di massa conservative:  $\rho \vec{F} = -\rho \vec{\nabla} G$ ;
- flusso stazionario:  $\partial/\partial t = 0$ .

Con queste semplificazioni, la derivata materiale si riduce al solo termine convettivo e l'equazione diventa:

$$\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e = -\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} G - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p. \quad (92)$$

Dividendo per  $\rho$  e portando tutto al primo membro:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} u^2 + U + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (93)$$

Definendo l'**entalpia totale**  $H$  come la quantità tra parentesi:

$$H = \frac{1}{2} u^2 + U + G + \frac{p}{\rho}, \quad (94)$$

l'equazione si scrive in forma compatta come il **teorema di Bernoulli**:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} H = 0.} \quad (95)$$

**Interpretazione fisica.** L'equazione (95) ammette due interpretazioni:

1. Se  $H = \text{costante}$  ovunque, il prodotto scalare è banalmente nullo. In questo caso la somma di energia cinetica, energia interna, energia potenziale gravitazionale e lavoro di pressione si conserva in ogni punto del campo. Rispetto alla formulazione idrodinamica classica, qui compare anche l'energia interna  $U$ , che nella trattazione incompressibile isoterma non veniva considerata.
2. Se  $\vec{u} \perp \vec{\nabla} H$ , il prodotto scalare è nullo anche quando  $H$  non è uniforme. In questo caso  $H$  varia da una linea di corrente all'altra, ma è costante lungo ciascuna di esse.

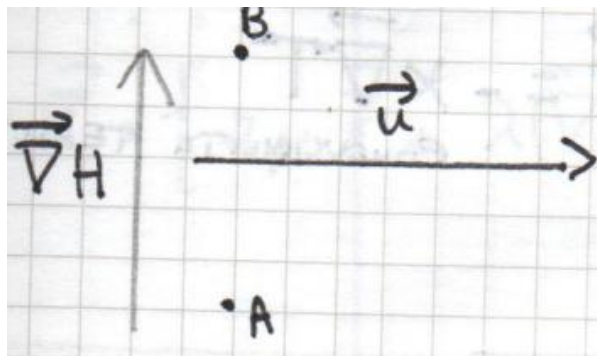


Figura 19: Caso  $\vec{u} \perp \vec{\nabla} H$ : la velocità è orizzontale, il gradiente di  $H$  è verticale.

Si distinguono due situazioni:

- **Flusso isoenergetico:**  $H$  è costante lungo ciascuna linea di corrente, ma può variare da una linea all'altra. L'energia si conserva lungo le linee.

<sup>24</sup>Si pone nullo il flusso di calore, non la conducibilità  $\lambda$ , che è una proprietà del materiale.

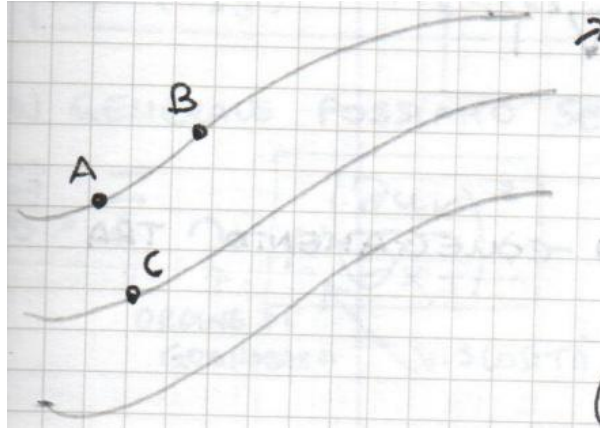


Figura 20: Linee di corrente A, B, C:  $H_A = H_B$  (stessa linea di corrente), ma  $H_A \neq H_C$  (linee diverse).

- **Flusso omoenergetico:**  $H$  è costante e uguale su tutte le linee di corrente, ossia  $H_A = H_B = H_C$ . L'energia è uniforme in tutto il campo.

Il prefisso “iso” indica costanza lungo la singola linea di flusso; “omo” indica costanza in tutto il campo<sup>25</sup>.

## 12.6 Equazione dell'energia in termini di energia interna

Per separare il contributo cinetico da quello termico nell'equazione (91), si ricava un'equazione per la sola energia cinetica moltiplicando scalarmente l'equazione di Navier-Stokes per  $\vec{u}$ :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u_i^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}), \quad (96)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $u_i du_i = d(u_i^2/2)$ .

Sottraendo l'equazione (96) dall'equazione (91) (poiché  $U = e - \frac{1}{2}u_i^2$ ), si ottiene:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} + \rho q + \lambda \nabla^2 T, \quad (97)$$

dove il termine  $\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon}$  (doppio prodotto scalare tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore della velocità di deformazione) emerge dallo sviluppo  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u}$ , e si è usato il fatto che  $\vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon}$  poiché  $\vec{\sigma}$  è simmetrico e il prodotto con la parte antisimmetrica (vorticità) si annulla<sup>26</sup>.

Sostituendo  $DU/Dt = c_v DT/Dt$  (con  $c_v$  costante):

$$\boxed{\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu \Phi + \rho q + \lambda \nabla^2 T} \quad (98)$$

dove si è posto  $\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} = \mu \Phi$  con  $\Phi$  funzione di dissipazione<sup>27</sup>.

<sup>25</sup>Questa distinzione terminologica è standard nella fluidodinamica compressibile e risulta particolarmente utile nell'analisi di ugelli e diffusori.

<sup>26</sup>In notazione indiciale:  $\sigma_{ij} \partial u_j / \partial x_i = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ , dove  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ .

<sup>27</sup>La funzione di dissipazione  $\Phi$  è definita in modo che  $\mu \Phi = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ . Non è necessario esplicitarne la forma completa; ciò che conta è ricordare che essa dipende dal quadrato del gradiente di velocità:  $\mu \Phi \sim \mu (\partial u_k / \partial x_j)^2$ .

**Interpretazione fisica.** L'equazione (98) descrive come varia la temperatura nello spazio e nel tempo. I quattro termini al secondo membro hanno il seguente significato:

- $-p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ : lavoro di compressione/espansione (nullo per flussi incompressibili);
- $\mu \Phi$ : dissipazione viscosa, che converte energia cinetica in energia termica. Il calore prodotto cresce con il gradiente di velocità, ed è particolarmente rilevante in prossimità di corpi solidi dove i gradienti sono elevati;
- $\rho q$ : produzione volumetrica di calore (reazioni chimiche, radiazione, ecc.);
- $\lambda \nabla^2 T$ : scambio di calore per conduzione.

Esplicitando il termine di dissipazione:

$$\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} = \left[ 2\mu \vec{\varepsilon} + \lambda_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{I} \right] : \vec{\varepsilon} = 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda_v (\varepsilon_{kk})^2, \quad (99)$$

dove  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ . In ordine di grandezza:

$$\vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} \sim \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)^2. \quad (100)$$

## 12.7 Equazione dell'energia in termini di entalpia

In termodinamica l'entalpia specifica  $h$  è definita come:

$$h = U + \frac{p}{\rho}, \quad (101)$$

con  $dh = c_p dT$ . Per ricavare l'equazione di bilancio in termini di entalpia, si parte dalla relazione  $U = h - p/\rho$  e si calcola la derivata materiale:

$$dU = dh - d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho} dp + \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (102)$$

In termini di derivate materiali, moltiplicando per  $\rho$ :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}. \quad (103)$$

Sostituendo nell'equazione (97) e osservando che il termine  $\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  si annulla per l'equazione di conservazione della massa<sup>28</sup>, si ottiene:

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + \rho q + \lambda \nabla^2 T} \quad (104)$$

Questa è l'**equazione di bilancio dell'energia termica in termini di entalpia** (o equivalentemente di temperatura, tramite  $dh = c_p dT$ ) ed è la forma più frequentemente utilizzata nella pratica. La temperatura varia per effetto della variazione di pressione ( $Dp/Dt$ ), della dissipazione viscosa ( $\mu \Phi$ ), della produzione di calore ( $\rho q$ ) e dello scambio di calore per conduzione ( $\lambda \nabla^2 T$ ).

<sup>28</sup>Infatti  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$  implica  $\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ .

## 12.8 Equazione dell'energia in termini di entropia

Dal secondo principio della termodinamica,  $dS = dQ/T$ , si può ricavare una terza forma dell'equazione dell'energia:

$$\boxed{\rho T \frac{DS}{Dt} = \mu \Phi + \rho q + \lambda \nabla^2 T} \quad (105)$$

L'unica differenza rispetto alla forma entalpica (104) è che la pressione non fa variare l'entropia. Dividendo per  $\rho T$  (quantità sempre positive), in condizioni di viscosità trascurabile ( $\mu \Phi \approx 0$ ), assenza di produzione di calore ( $q = 0$ ) e assenza di scambio di calore ( $\lambda \nabla^2 T = 0$ ), si ottiene:

$$\frac{DS}{Dt} = 0. \quad (106)$$

Con l'ulteriore ipotesi di stazionarietà:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad \implies \quad \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0. \quad (107)$$

Questa condizione definisce un **flusso isentropico**: l'entropia è costante lungo ciascuna linea di corrente, ma può variare da una linea all'altra ( $S_1 \neq S_2 \neq S_3$ ).

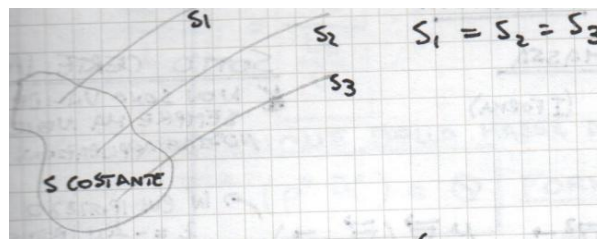


Figura 21: Ugello con linee di corrente a entropia costante:  $S_1, S_2, S_3$  sono costanti lungo ciascuna linea.

Se inoltre  $S_1 = S_2 = S_3$ , il flusso è detto **omoentropico**: l'entropia è costante e uguale in ogni punto del campo.

## 12.9 Teorema di Crocco

Crocco<sup>29</sup> dimostrò che, sotto opportune ipotesi, se esiste una differenza di entropia tra linee di corrente diverse, allora il flusso possiede necessariamente vorticità.

““

## 13 Il teorema di Crocco e la generazione di vorticità

Un risultato di grande rilevanza nella fluidodinamica compressibile è il **teorema di Crocco**<sup>30</sup>, il quale stabilisce un legame diretto tra gradienti di entropia e vorticità nel campo di moto. Sotto le ipotesi di flusso stazionario, adiabatico e privo di forze di massa non conservative, Crocco dimostrò che se tra le linee di corrente sussiste una differenza di entropia, allora il campo di moto possiede necessariamente vorticità.

<sup>29</sup>Luigi Crocco (1909–1986), ingegnere aeronautico italiano, contribuì in modo fondamentale alla fluidodinamica compressibile e alla propulsione.

<sup>30</sup>Luigi Crocco (1909–1986), ingegnere e fisico italiano, contribuì in modo fondamentale alla teoria dei flussi compressibili e alla propulsione.

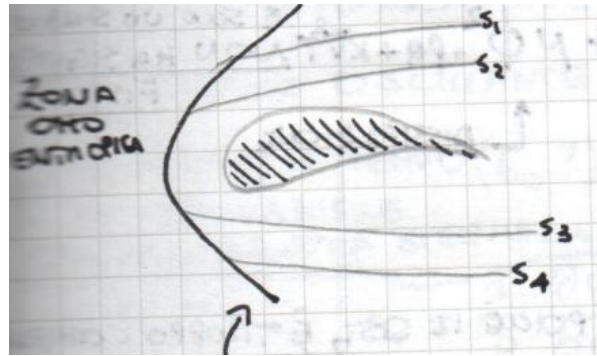


Figura 22: Ugello con linee di entropia e onda d’urto: la variazione di entropia attraverso l’urto genera vorticità a valle.

**Applicazione al caso di un ugello con onda d’urto.** Si consideri un ugello convergente-divergente in cui il flusso a monte sia omoentropico, ossia con entropia uniforme su tutte le linee di corrente ( $S_1 = S_2 = S_3$ ). In presenza di un’onda d’urto all’interno dell’ugello, le diverse linee di corrente attraversano l’urto in punti differenti e subiscono variazioni di entropia diverse. A valle dell’urto, pertanto, le entropie sulle singole linee di corrente non sono più uguali tra loro.

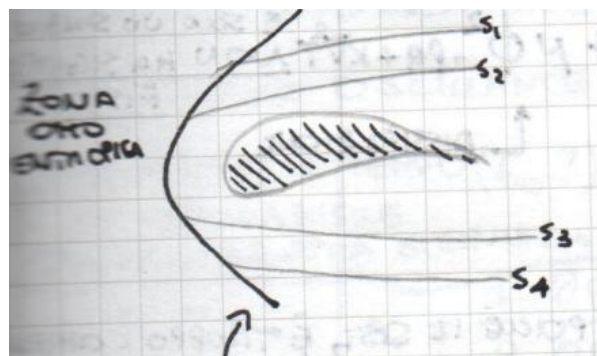


Figura 23: Ugello convergente-divergente con onda d’urto: a monte il flusso è omoentropico, ma a valle dell’urto le linee di corrente presentano entropie differenti.

Per il teorema di Crocco, la presenza di un gradiente di entropia implica l’esistenza di vorticità:

$$\vec{\nabla} S \neq \vec{0} \implies \vec{\omega} \neq \vec{0}. \quad (108)$$

Questo risultato è particolarmente significativo dal punto di vista applicativo: anche partendo da un flusso inizialmente irrotazionale e omoentropico, il passaggio attraverso un’onda d’urto — caratterizzata da una variazione improvvisa di pressione ed entropia — genera inevitabilmente vorticità a valle.

**Interpretazione fisica.** L’onda d’urto agisce come una sorgente di entropia e, di conseguenza, di vorticità. Poiché l’intensità dell’urto varia lungo la sua superficie (le linee di corrente lo attraversano con angoli e numeri di Mach locali differenti), ciascuna linea di corrente subisce un incremento di entropia diverso. Il gradiente trasversale di entropia così generato è, per il teorema di Crocco, indissolubilmente legato alla comparsa di moto rotazionale.

**Disuguaglianza di Clausius–Duhem.** Integrando l’equazione di bilancio dell’energia in forma entropica sull’intero volume di controllo  $V$ , nell’ipotesi di produzione volumetrica di calore

$\dot{q} \geq 0$ , si può dimostrare che<sup>31</sup>

$$\iiint_V T \frac{DS}{D\tau} dV \geq 0. \quad (109)$$

La variazione di entropia del sistema può dunque essere soltanto positiva o, al più, nulla: l'entropia non può mai diminuire in un processo reale. Questo vincolo termodinamico è alla base della irreversibilità associata alle onde d'urto e, più in generale, a tutti i fenomeni dissipativi.

## 14 Il sistema completo delle equazioni di governo

Raccogliamo ora il sistema completo di equazioni che governano il moto di un fluido viscoso compressibile. Le incognite del problema sono quattro campi: la velocità  $\vec{u}$ , la temperatura  $T$ , la pressione  $p$  e la densità  $\rho$ .

**Equazione di conservazione della massa (I forma).**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (110)$$

**Equazioni di Navier–Stokes.** Sotto l'ipotesi di Stokes<sup>32</sup> ( $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ ), le equazioni della quantità di moto assumono la forma:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}), \quad (111)$$

dove  $\vec{f}$  rappresenta la forza di massa per unità di massa e  $\mu$  è la viscosità dinamica.

**Equazione dell'energia in termini entalpici.**

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + k \nabla^2 T, \quad (112)$$

in cui  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $k$  la conducibilità termica e  $\Phi$  la funzione di dissipazione viscosa<sup>33</sup>. Si noti che nella forma espansa la derivata sostanziale della pressione si scrive  $Dp/Dt = \partial p/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla p$ .

**Equazione di stato.** Per un gas ideale:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (113)$$

dove  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  per l'aria.

<sup>31</sup>Si tratta della forma integrale della disuguaglianza di Clausius–Duhem, che esprime il secondo principio della termodinamica per sistemi continui.

<sup>32</sup>L'ipotesi di Stokes stabilisce che il secondo coefficiente di viscosità  $\lambda$  sia legato alla viscosità dinamica  $\mu$  dalla relazione  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , il che equivale ad annullare la viscosità di volume. Tale ipotesi è ben verificata per i gas monoatomici e ragionevolmente accurata per l'aria.

<sup>33</sup>La funzione di dissipazione  $\Phi$  è definita come  $\Phi = 2\mu e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{u})^2$ , dove  $e_{ij}$  è il tensore velocità di deformazione. Essa rappresenta il tasso di conversione irreversibile di energia meccanica in energia termica per effetto della viscosità.

**Interpretazione fisica.** Il sistema (110)–(113) costituisce un insieme di equazioni alle derivate parziali non lineari e accoppiate. La non linearità risiede principalmente nei termini convettivi ( $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \nabla T$ ) e nell'accoppiamento tra campo di moto e campo termodinamico attraverso l'equazione di stato. In generale, la risoluzione diretta di questo sistema è estremamente complessa; per renderla trattabile si ricorre a semplificazioni basate sull'analisi dimensionale, che consente di identificare i termini trascurabili in funzione delle scale caratteristiche del problema.

## 15 Adimensionalizzazione delle equazioni e teorema di Buckingham

L'obiettivo dell'adimensionalizzazione è riscrivere le equazioni di governo in forma priva di dimensioni fisiche, così da poter confrontare termini di natura diversa e stabilire in modo oggettivo quali contributi siano trascurabili. Il fondamento teorico di questa procedura è il **teorema di Buckingham** (II), secondo il quale ogni relazione fisica tra  $n$  grandezze dimensionali che coinvolgono  $k$  dimensioni fondamentali indipendenti può essere espressa come relazione tra  $n - k$  gruppi adimensionali.

### 15.1 Variabili adimensionali e grandezze di riferimento

Si introducono le variabili adimensionali (indicate con asterisco) definite come rapporto tra la grandezza dimensionale e una corrispondente grandezza di riferimento:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{L_0}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}. \quad (114)$$

La condizione fondamentale nella scelta delle grandezze di riferimento ( $u_0, T_0, p_0, \rho_0, L_0, t_0$ ) è che ciascun rapporto  $A^*/A_0$  risulti dell'ordine dell'unità, ossia  $A^* = \mathcal{O}(1)$ . Ciò garantisce che i coefficienti adimensionali che emergono dalla procedura rappresentino effettivamente il peso relativo dei diversi fenomeni fisici.

**Scelta della lunghezza di riferimento.** La lunghezza  $L_0$  deve essere una scala caratteristica del problema: per un profilo alare si sceglie tipicamente la corda, per un condotto il diametro. Una scelta inadeguata (ad esempio la distanza Terra–Luna per un problema aerodinamico) produrrebbe variabili adimensionali di ordine molto diverso dall'unità, vanificando lo scopo dell'analisi.

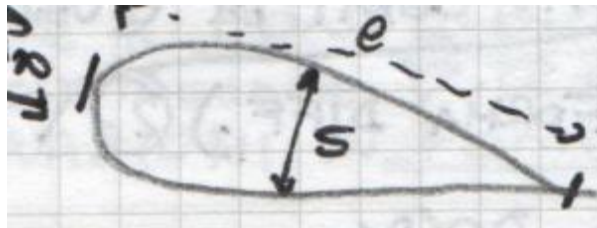


Figura 24: Profilo alare investito da una corrente di velocità  $\vec{u}_0$ : la lunghezza caratteristica  $L_0$  è scelta pari alla corda del profilo.

**Adimensionalizzazione dell'operatore nabla e della derivata temporale.** Sostituendo  $x_i = x_i^* L_0$  nell'operatore gradiente si ottiene:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{L_0} \vec{\nabla}^*, \quad \text{dove} \quad \vec{\nabla}^* = \left( \frac{\partial}{\partial x_1^*}, \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \frac{\partial}{\partial x_3^*} \right). \quad (115)$$

Analogamente,  $t = t^* t_0$  implica  $\partial/\partial t = (1/t_0) \partial/\partial t^*$ . Si osservi che le grandezze di riferimento sono costanti e non variabili: le uniche quantità che variano nello spazio e nel tempo sono quelle contrassegnate dall'asterisco.

**Adimensionalizzazione delle componenti di velocità.** Ponendo  $u_i = u_i^* u_0$  si assume implicitamente che tutte e tre le componenti della velocità abbiano lo stesso ordine di grandezza  $u_0$ <sup>34</sup>:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}. \quad (116)$$

## 15.2 Equazione di conservazione della massa in forma adimensionale

Sostituendo le variabili adimensionali nell'equazione (110):

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (117)$$

Dividendo per il coefficiente del secondo termine,  $\rho_0 u_0/L_0$ , si ottiene:

$$\frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (118)$$

Il secondo termine è ora privo di coefficienti e, per costruzione, di ordine  $\mathcal{O}(1)$ . Il coefficiente del primo termine definisce un gruppo adimensionale fondamentale.

**Il numero di Strouhal.** Si definisce il **numero di Strouhal**:

$$St = \frac{L_0}{t_0 u_0}, \quad (119)$$

che può essere interpretato come il rapporto tra il tempo caratteristico del flusso  $L_0/u_0$  (tempo impiegato da una particella fluida a percorrere la lunghezza  $L_0$  alla velocità  $u_0$ ) e il tempo caratteristico del fenomeno  $t_0$  (ad esempio il periodo di oscillazione di un profilo alare o di una pala rotoria).

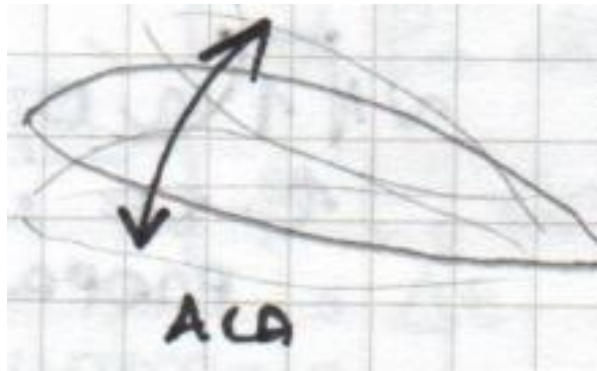


Figura 25: Profilo alare oscillante: il tempo caratteristico  $t_0$  è il periodo di oscillazione.

<sup>34</sup>Questa assunzione non è sempre valida. Nel caso dello strato limite, ad esempio, la componente di velocità normale alla parete è molto più piccola di quella tangenziale, e si rende necessaria un'adimensionalizzazione differenziata.

L'equazione di conservazione della massa in forma adimensionale si scrive dunque (omettendo d'ora in poi gli asterischi per alleggerire la notazione):

$$\boxed{\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.} \quad (120)$$

**Interpretazione fisica e soluzione asintotica.** Quando  $St \rightarrow 0$  — ovvero quando il tempo caratteristico del fenomeno esterno  $t_0$  è molto più grande del tempo di transito  $L_0/u_0$  — il termine di derivata temporale diventa trascurabile rispetto al termine convettivo. In questo limite il flusso può essere considerato *stazionario*<sup>35</sup>. Viceversa, quando  $St = \mathcal{O}(1)$  o  $St \gg 1$ , gli effetti non stazionari sono rilevanti e non possono essere trascurati.

### 15.3 Gruppi adimensionali legati alla compressibilità

Per analizzare il ruolo della compressibilità, si consideri la densità come funzione della pressione  $P$  e della temperatura  $T$ :  $\rho = \rho(P, T)$ . Si definiscono i coefficienti<sup>36</sup>:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}. \quad (121)$$

La derivata sostanziale della densità si esprime allora come:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{DT}{Dt} = \alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt}. \quad (122)$$

Sostituendo nell'equazione di conservazione della massa in seconda forma ( $D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) si ottiene:

$$\alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (123)$$

Dall'adimensionalizzazione di questa equazione emergono due nuovi gruppi adimensionali:

- $\alpha P_0$ : se  $\alpha P_0 \ll 1$ , la densità non dipende significativamente dalla pressione e il flusso è detto **termotropico**, ossia  $\rho \approx \rho(T)$ ;
- $\beta \Delta T$ : se  $\beta \Delta T \ll 1$ , la densità non dipende significativamente dalla temperatura e il flusso è detto **barotropico**, ossia  $\rho \approx \rho(P)$ .

Si osservi che ciò che conta non è il valore dei singoli fattori  $\alpha$ ,  $P_0$ ,  $\beta$  o  $\Delta T$ , bensì il loro prodotto.

### 15.4 Il numero di Mach

Il **numero di Mach** è il parametro adimensionale che caratterizza la compressibilità del flusso. Si definisce la velocità del suono  $c_0$  come la velocità con cui si propagano piccole perturbazioni di pressione in condizioni isoentropiche:

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S. \quad (124)$$

<sup>35</sup>Si noti che la stazionarietà non è un'ipotesi *a priori*: essa emerge come soluzione asintotica dell'analisi dimensionale quando il numero di Strouhal è sufficientemente piccolo. In senso ingegneristico,  $St$  si considera "piccolo" quando è già di un ordine di grandezza inferiore all'unità.

<sup>36</sup>Il coefficiente  $\alpha$  è il coefficiente di compressibilità isoterma (diviso per  $\rho$ ), mentre  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione termica isobarica.

Per un gas ideale con rapporto dei calori specifici  $\gamma$ :

$$c_0 = \sqrt{\gamma RT}. \quad (125)$$

A titolo di riferimento, per l'aria a temperatura ambiente  $c_0 \approx 340$  m/s, mentre per l'acqua  $c_0 \approx 1500$  m/s.

Il numero di Mach è definito come:

$$M = \frac{u_0}{c_0}, \quad (126)$$

ossia il rapporto tra la velocità caratteristica del flusso e la velocità del suono.

**Legame tra  $\alpha P_0$  e il numero di Mach.** Si può dimostrare che il gruppo  $\alpha P_0$  è direttamente legato al numero di Mach. Infatti:

$$\alpha P_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_0 P_0 = \frac{P_0}{\rho_0 c_0^2} = \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{u_0^2}{c_0^2} = M^2 \text{Ru}^{-1}, \quad (127)$$

dove si è introdotto il **numero di Ruark**<sup>37</sup>:

$$\text{Ru} = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0}. \quad (128)$$

Ponendo  $\text{Ru} = 1$  si ha semplicemente  $\alpha P_0 = M^2$ .

**Condizioni di incompressibilità.** Un flusso può essere considerato *incompressibile* quando entrambi i gruppi legati alla compressibilità sono trascurabili:

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 & \iff & M^2 \ll 1, \\ \beta \Delta T \ll 1. \end{cases} \quad (129)$$

La condizione  $M^2 \ll 1$  si traduce in pratica in  $M \lesssim 0,3$ <sup>38</sup>.

**Classificazione dei regimi di flusso in base al numero di Mach.** Al di là della soglia di incompressibilità, il numero di Mach consente di classificare i regimi di flusso in categorie con comportamenti fisici qualitativamente diversi:

1. **Flussi subsonici:**  $0,3 < M \leq 0,8$ . I fenomeni fisici variano gradualmente con  $M$ ; un esperimento condotto a  $M = 0,6$  è rappresentativo anche di condizioni a  $M = 0,3$  o  $M = 0,8$ . La similitudine è relativamente agevole.
2. **Flussi transonici:**  $0,8 < M < 1,2$ . Piccole variazioni del numero di Mach producono cambiamenti significativi nel campo di moto (comparsa e spostamento di onde d'urto locali). In questo regime la similitudine sperimentale richiede che il Mach dell'esperimento sia esattamente uguale a quello reale<sup>39</sup>.

<sup>37</sup>Il numero di Ruark  $\text{Ru} = \rho_0 u_0^2 / p_0$  rappresenta il rapporto tra la pressione dinamica di riferimento e la pressione di riferimento. Nelle applicazioni fluidodinamiche standard si sceglie  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ , cosicché  $\text{Ru} = 1$ .

<sup>38</sup>Il valore  $M \approx 0,3$  corrisponde a  $M^2 \approx 0,09$ , sufficientemente piccolo da rendere trascurabili gli effetti di compressibilità nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche.

<sup>39</sup>Nel regime transonico, fenomeni come la *bolla supersonica* — una regione locale in cui  $M > 1$  che si chiude con un'onda d'urto — sono estremamente sensibili al valore esatto di  $M$ . Boeing e Airbus hanno sviluppato profili supercritici appositamente progettati per ritardare o controllare la formazione di tali urti.

3. **Flussi supersonici:**  $1,2 < M \lesssim 4-5$ . La situazione fisica è nuovamente stabile rispetto a variazioni moderate di  $M$ ; è possibile condurre esperimenti a numeri di Mach leggermente diversi da quello reale ottenendo risultati rappresentativi.
4. **Flussi ipersonici:**  $M > 5$ . A numeri di Mach così elevati le temperature nel campo di moto possono raggiungere valori tali da provocare la ionizzazione del gas (formazione di plasma), modificando radicalmente le proprietà del fluido e le equazioni di governo.

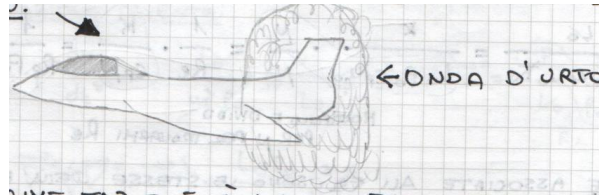


Figura 26: Flusso supersonico attorno a un corpo a cuneo: l'onda d'urto obliqua si origina dal bordo d'attacco.

**Mach e Reynolds: un'avvertenza.** Quando il numero di Mach è elevato, in genere anche il numero di Reynolds è grande, ma ciò non è sempre vero. Un esempio significativo è quello dei veicoli spaziali senza equipaggio (*Unmanned Space Vehicle*, USV) che operano ad alta quota: la velocità è elevata (Mach alto), ma la densità dell'aria è molto bassa, cosicché il numero di Reynolds risulta piccolo. In tali condizioni i fenomeni viscosi non possono essere trascurati nonostante l'elevato Mach.

## 16 Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto

Si consideri l'equazione di Navier–Stokes (111) con  $\vec{f} = \vec{g}$  (forza di gravità):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}). \quad (130)$$

Sostituendo le variabili adimensionali e dividendo tutti i termini per  $\rho_0 u_0^2 / L_0$  (forza di inerzia convettiva per unità di volume), si confronta ciascun contributo con le forze di inerzia. L'adimensionalizzazione del vettore gravità si effettua scrivendo  $\vec{g} = g \vec{g}^*$ , dove  $g = |\vec{g}|$  e  $\vec{g}^* = \vec{g}/g$  è il versore della gravità.

Dopo le sostituzioni e le semplificazioni, l'equazione della quantità di moto in forma adimensionale risulta<sup>40</sup>:

$$\boxed{\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g}}. \quad (131)$$

I gruppi adimensionali che compaiono sono:

**Numero di Reynolds.**

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu}, \quad (132)$$

rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi. Quando  $Re \rightarrow \infty$  i termini viscosi diventano trascurabili e si ottengono le *equazioni di Eulero* (flussi euleriani). Quando  $Re \rightarrow 0$  dominano le forze viscosi e si parla di *flussi stokesiani*.

<sup>40</sup>Si omettono gli asterischi sulle variabili adimensionali per semplicità di notazione, come d'uso nella letteratura.

**Numero di Froude.**

$$\text{Fr} = \frac{u_0^2}{g L_0}, \quad (133)$$

rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Quando  $\text{Fr} \rightarrow \infty$  le forze di massa sono trascurabili rispetto a quelle di inerzia; questo è il caso tipico dei problemi aerodinamici. Il numero di Froude diventa invece rilevante in idrodinamica (moto ondoso, carene navali).

## 17 Adimensionalizzazione dell'equazione di bilancio dell'energia

Si consideri l'equazione dell'energia in termini entalpici (112), trascurando la produzione volumetrica di calore ( $\dot{q} = 0$ )<sup>41</sup>:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \Phi + k \nabla^2 T. \quad (134)$$

Sostituendo le variabili adimensionali e dividendo per  $\rho_0 c_p u_0 T_0 / L_0$ , si ottiene un nuovo gruppo adimensionale.

**Numero di Eckert.**

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_p T_0}, \quad (135)$$

che rappresenta il rapporto tra l'energia cinetica del flusso e l'energia termica. Per un gas ideale si può esprimere in funzione del numero di Mach:

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_p T_0} = \frac{u_0^2}{\frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_0} = (\gamma - 1) \frac{u_0^2}{\gamma R T_0} = (\gamma - 1) M^2, \quad (136)$$

dove si è utilizzata la relazione  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$ .

**Numero di Prandtl.** Dall'adimensionalizzazione del termine di conduzione termica  $k \nabla^2 T$  emerge il **numero di Prandtl**:

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (137)$$

dove  $\nu = \mu / \rho$  è la viscosità cinematica e  $\kappa = k / (\rho c_p)$  è la diffusività termica. Il numero di Prandtl è una proprietà del fluido e non del flusso: non può quindi essere trattato come parametro asintotico<sup>42</sup>.

Il termine di conduzione contribuisce all'equazione con il fattore  $1/(\text{Re Pr})$ . Infatti:

$$k \nabla^2 T \longrightarrow k \frac{T_0}{L_0^2} \xrightarrow{\text{diviso per } \rho_0 c_p u_0 T_0 / L_0} \frac{k}{\rho_0 c_p u_0 L_0} = \frac{\mu}{\rho_0 u_0 L_0} \frac{k}{c_p \mu} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}}. \quad (138)$$

L'equazione di bilancio dell'energia in forma adimensionale risulta quindi:

$$\boxed{\frac{1}{\text{St}} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\text{Ec}}{\text{Ru St}} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\text{Ec}}{\text{Ru}} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \Phi + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T.} \quad (139)$$

<sup>41</sup>La produzione di calore  $\dot{q}$  viene trascurata poiché la sua adimensionalizzazione richiederebbe l'introduzione di ulteriori grandezze di riferimento, complicando notevolmente l'analisi senza apportare benefici significativi nella maggior parte delle applicazioni aerodinamiche.

<sup>42</sup>Per l'aria a condizioni standard  $\text{Pr} \approx 0,71$ ; per l'acqua  $\text{Pr} \approx 7$ ; per i metalli liquidi  $\text{Pr} \ll 1$ .

**Interpretazione fisica.** Ciascun gruppo adimensionale nell'equazione (139) ha un significato preciso:  $1/St$  pesa la non stazionarietà termica;  $Ec/Ru$  quantifica l'importanza del lavoro di compressione rispetto al trasporto termico convettivo;  $Ec/Re$  misura il riscaldamento per dissipazione viscosa;  $1/(RePr)$  rappresenta la diffusione termica. Le soluzioni asintotiche sono le stesse dell'equazione di conservazione della massa (stazionarietà per  $St \rightarrow 0$ ), con l'aggiunta che il numero di Prandtl, essendo proprietà del fluido, non ammette limiti asintotici.

## 18 Equazione di stato in forma adimensionale

L'equazione di stato per un gas ideale  $p/\rho = RT$  si adimensionalizza sostituendo le variabili adimensionali e moltiplicando opportunamente per  $u_0^2$ :

$$\frac{p_0 p^*}{\rho_0 \rho^* T_0 T^*} = R \implies \frac{p^*}{\rho^* T^*} = \frac{R \rho_0 T_0}{p_0}. \quad (140)$$

Esprimendo il membro destro in funzione dei gruppi adimensionali noti, e ricordando che  $c_0^2 = \gamma RT_0$ :

$$\frac{R \rho_0 T_0}{p_0} = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0} \frac{RT_0}{u_0^2} = Ru \frac{1}{\gamma M^2}, \quad (141)$$

da cui l'equazione di stato in forma adimensionale:

$$\boxed{\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}}. \quad (142)$$

## 19 Sistema completo delle equazioni adimensionali

Raccogliendo i risultati delle sezioni precedenti, il sistema completo delle equazioni di governo in forma adimensionale (omettendo gli asterischi) è:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (143)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g}, \quad (144)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{Ec}{Re} \Phi + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T, \quad (145)$$

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}. \quad (146)$$

Le cinque incognite sono  $\vec{u}$  (tre componenti),  $p$ ,  $\rho$  e  $T$ , per un totale di sei campi scalari legati da sei equazioni scalari (una dalla massa, tre dalla quantità di moto, una dall'energia, una dallo stato).

## 20 Semplificazione per flussi incompressibili non viscosi

Si consideri ora il caso, frequente nelle applicazioni aerodinamiche, in cui valgono le seguenti ipotesi:

- $Re \gg 1$  (forze viscosi trascurabili rispetto a quelle di inerzia);

- $Fr \gg 1$  (forze gravitazionali trascurabili);
- $M < 0,3$  e  $\beta \Delta T \ll 1$  (flusso incompressibile,  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ,  $\rho = \text{cost.}$ );
- $Ru = 1$  (pressione di riferimento pari alla pressione dinamica);
- $\dot{q} = 0$  e  $\vec{R} \cdot \vec{n} = 0$  (nessuna produzione di calore, nessun flusso termico alle pareti).

Poiché  $Ec = (\gamma - 1) M^2 \ll 1$ , l'equazione dell'energia si disaccoppia dal sistema: la temperatura non gioca un ruolo dinamico rilevante. Si eliminano pertanto l'equazione dell'energia e l'equazione di stato, riducendo il sistema alle sole equazioni di Eulero.

## 20.1 Equazioni di Eulero per flusso incompressibile

Le equazioni si riducono a:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (147)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p, \quad (148)$$

con quattro incognite: le tre componenti di  $\vec{u}$  e la pressione  $p$ . Il termine  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  è non lineare e costituisce la principale difficoltà nella risoluzione analitica del sistema.

## 21 Similitudine dinamica e coefficienti aerodinamici

La **similitudine dinamica** è la condizione che garantisce l'uguaglianza dei coefficienti di forza tra un modello (sperimentale o numerico) e la configurazione reale. Si definiscono i coefficienti aerodinamici adimensionali:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0}, \quad (149)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0}, \quad (150)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 S_0 L_0}, \quad (151)$$

dove  $L$  è la portanza,  $D$  la resistenza,  $M$  il momento aerodinamico,  $S_0$  una superficie di riferimento (tipicamente la superficie alare o la corda al quadrato) e  $L_0$  una lunghezza di riferimento.

Se nell'esperimento si riproducono gli stessi numeri di Reynolds e di Mach della configurazione reale, i coefficienti aerodinamici risultano identici:

$$Re_E = Re_R \text{ e } M_E = M_R \implies C_{L,E} = C_{L,R}, \quad C_{D,E} = C_{D,R}, \quad C_{M,E} = C_{M,R}. \quad (152)$$

**Difficoltà pratiche della similitudine.** Mantenere simultaneamente  $Re$  e  $M$  uguali a quelli reali è in pratica molto difficile. Se per ragioni di spazio il modello in galleria del vento ha una corda  $L_E = L_R/2$ , per mantenere lo stesso Reynolds occorre raddoppiare la velocità ( $u_E = 2 u_R$ ), il che modifica il numero di Mach. In generale, si privilegia il rispetto del Mach — soprattutto

in regime transonico, dove piccole variazioni producono effetti macroscopici — accettando un Reynolds non perfettamente uguale a quello reale<sup>43</sup>.

**Osservazioni sui singoli gruppi adimensionali.**

**Numero di Strouhal.** La stazionarietà del flusso non può essere assunta *a priori*: va verificata calcolando  $St$  e confrontandolo con l'unità.

**Numero di Froude.** Rilevante in campo idrodinamico (moto ondoso, carene); nell'esperimento deve essere rispettato lo stesso valore reale.

**Numero di Ruark.** Nelle applicazioni aerodinamiche standard  $Ru = 1$ ; in altri contesti (ad esempio nei fenomeni di cavitazione) assume valori diversi e prende il nome di *numero di cavitazione*.

**Resistenza di forma e transizione laminare-turbolento.** Per il numero di Reynolds esiste un intervallo in cui il coefficiente di resistenza di una sfera è pressoché costante. Al di là di una certa soglia critica di  $Re$ , la transizione dallo strato limite laminare a quello turbolento provoca un crollo della resistenza di forma<sup>44</sup>. La portanza è proporzionale all'angolo di incidenza (nel campo lineare della curva  $C_L-\alpha$ ).

## 22 Applicazioni: tubo di Pitot e fenomeni di vorticità

### 22.1 Il tubo di Pitot

Il **tubo di Pitot** è uno strumento utilizzato su veicoli e velivoli per la misura della velocità del flusso. Il principio di funzionamento si basa sul teorema di Bernoulli applicato lungo una linea di corrente.



Figura 27: Schema di un tubo di Pitot: nel punto  $A$  (apertura frontale) si misura la pressione totale, nel punto  $B$  (presa laterale) la pressione statica. A destra, distribuzione di pressione attorno a un profilo alare.

Nel punto  $A$ , situato all'apertura frontale del tubo dove il fluido viene portato a riposo, si misura la *pressione totale* (somma di pressione statica e pressione dinamica). Nel punto  $B$ , situato sulla parete laterale dove la velocità è tangente alla superficie e quindi la componente normale è nulla, si misura la sola *pressione statica*. Applicando il teorema di Bernoulli:

$$p_A = p_B + \frac{1}{2} \rho U^2, \tag{153}$$

<sup>43</sup>In regime supersonico ( $M > 1,2$ ) è possibile condurre esperimenti a numeri di Mach leggermente diversi da quello reale, poiché i fenomeni fisici sono meno sensibili a piccole variazioni di  $M$ . In regime subsonico ( $0,3 < M < 0,8$ ) vale un ragionamento analogo.

<sup>44</sup>Questo fenomeno è sfruttato nella pratica: le fossette sulla pallina da golf e i generatori di vortici (*vortex generators*) sulle ali degli aerei inducono artificialmente la transizione al regime turbolento, riducendo la resistenza di forma.

da cui si ricava la velocità del flusso:

$$U = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}. \quad (154)$$

## 22.2 Generazione di vorticità e downwash

Alle estremità delle ali di un velivolo, la differenza di pressione tra intradosso (alta pressione) e estradosso (bassa pressione) genera vortici di estremità. Questi vortici inducono una componente di velocità verso il basso a valle dell'ala, denominata **downwash**.

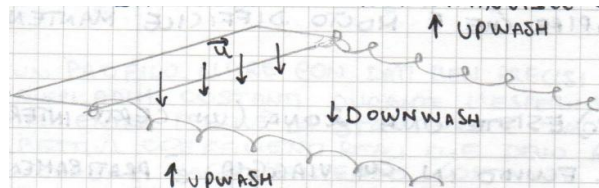


Figura 28: Vista in pianta di un'ala: l'*upwash* a monte e il *downwash* a valle sono generati dai vortici di estremità.

Il downwash riduce l'angolo di incidenza effettivo dell'ala, diminuendo la portanza e aumentando la resistenza (resistenza indotta). Per minimizzare questo effetto si adottano ali ad elevato allungamento (rapporto apertura/corda), come negli alianti. Nei velivoli da trasporto, tuttavia, vincoli strutturali e operativi (installazione di motori, piloni, serbatoi) limitano l'allungamento raggiungibile.

In generale, nelle regioni ad alta pressione la vorticità è bassa, mentre nelle regioni a bassa pressione la vorticità è elevata. Quando la pressione locale scende al di sotto della tensione di vapore del liquido si verifica il fenomeno della **cavitazione**: si formano bolle di vapore che, collassando, possono provocare danni strutturali significativi.

## 23 Introduzione del potenziale di velocità

Per risolvere le equazioni di Eulero (147)–(148) si introduce un'ulteriore ipotesi: la **irrotazionalità** del campo di moto, ossia

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{u} = \vec{0} \quad \forall \vec{x}, \forall t. \quad (155)$$

Si noti che la condizione deve valere in *ogni* punto del dominio e non soltanto localmente.

**Giustificazione tramite il teorema di Kelvin.** Il teorema di Kelvin garantisce che, sotto le ipotesi già adottate (fluido incompressibile, forze di massa conservative,  $Re \gg 1$ ), la circolazione  $\Gamma$  lungo qualsiasi curva materiale chiusa si conserva nel tempo:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS = \text{costante}. \quad (156)$$

Pertanto, se la vorticità è nulla ovunque all'istante iniziale  $t = 0$ , essa rimane nulla per tutti i tempi successivi:

$$\vec{\omega}(\vec{x}, 0) = \vec{0} \implies \vec{\omega}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad \forall t > 0. \quad (157)$$

È dunque sufficiente verificare l'irrotazionalità nelle condizioni iniziali.

**Definizione del potenziale di velocità.** Dal punto di vista matematico, se un campo vettoriale ha rotore identicamente nullo, esso è esprimibile come gradiente di un campo scalare. Esiste dunque una funzione  $\varphi(\vec{x}, t)$ , detta **potenziale di velocità**, tale che:

$$\vec{u} = \nabla\varphi. \quad (158)$$

Questa relazione è coerente con l'ipotesi di irrotazionalità, poiché il rotore di un gradiente è identicamente nullo:

$$\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv \vec{0}. \quad (159)$$

Inoltre, la divergenza del gradiente restituisce il laplaciano:

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}. \quad (160)$$

### 23.1 Equazione di Laplace e condizioni al contorno

Sostituendo  $\vec{u} = \nabla\varphi$  nell'equazione di continuità  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  si ottiene l'**equazione di Laplace**:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0}, \quad (161)$$

un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, ellittica, le cui proprietà matematiche sono ben note e per la quale esistono potenti metodi di risoluzione.

Il sistema da risolvere diventa (equazioni di Eulero in forma potenziale, II forma):

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0, \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p. \end{cases} \quad (162)$$

La prima equazione determina  $\varphi$  (e quindi  $\vec{u} = \nabla\varphi$ ); la seconda, che è il teorema di Bernoulli in forma differenziale, fornisce la pressione  $p$  una volta noto il campo di velocità.

**Condizioni al contorno.** L'equazione di Laplace richiede due condizioni al contorno:

1. **All'infinito:** il potenziale tende al valore indisturbato,  $\varphi \rightarrow \varphi_\infty(t)$ , che può dipendere dal tempo se il flusso non è stazionario ( $St \neq \infty$ ).
2. **Sulla superficie del corpo** (parete  $W$ ): si impone la condizione di *impermeabilità*, ossia la componente normale della velocità è nulla:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_W = 0, \quad (163)$$

dove  $\partial\varphi/\partial n = \nabla\varphi \cdot \vec{n}$  è la derivata del potenziale nella direzione normale alla superficie.

Si osservi che *non* si impone alcuna condizione sulla componente tangenziale della velocità alla parete: ciò è coerente con l'assenza di viscosità nel modello euleriano. In un flusso viscoso reale, la condizione di aderenza ( $\vec{u}|_W = \vec{0}$ ) richiederebbe il contributo dei termini viscosi, qui trascurati.

**Procedura risolutiva.** Una volta risolto il problema di Laplace con le condizioni al contorno assegnate, si determina  $\varphi(\vec{x}, t)$ . Da questo si calcola il campo di velocità  $\vec{u} = \nabla\varphi$  e, infine, la pressione tramite il teorema di Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = \text{costante} \quad (\text{lungo una linea di corrente}), \quad (164)$$

dove la costante può essere valutata dalle condizioni all'infinito. Si noti che il teorema di Bernoulli è un'equazione *algebraica* e non differenziale, il che semplifica notevolmente il calcolo della pressione.

**Risoluzione dell'equazione di Laplace.** Per la risoluzione di  $\nabla^2\varphi = 0$  esistono due approcci fondamentali:

- **Metodo diretto:** si risolve esplicitamente l'equazione differenziale nel dominio con le condizioni al contorno assegnate;
- **Metodo indiretto:** si costruisce la soluzione come sovrapposizione di soluzioni elementari note (sorgenti, pozzi, doppiette, vortici), sfruttando la linearità dell'equazione di Laplace.

““

## 24 Risoluzione del potenziale $\varphi$ : metodo diretto e metodo indiretto

Una volta stabilito che il campo di velocità ammette un potenziale  $\varphi$  tale che  $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ , il problema si riduce alla risoluzione dell'equazione di Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$ . Per affrontare tale problema esistono due strategie fondamentalmente diverse.

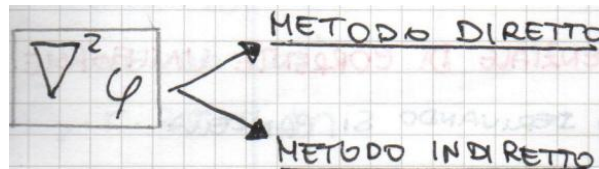


Figura 29: Schema dei due approcci risolutivi per l'equazione di Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$ : metodo diretto e metodo indiretto.

### 24.1 Metodo diretto

Il metodo diretto è l'approccio più rigoroso dal punto di vista matematico, ma anche il più complesso. Esso si basa sulla **formula integrale di Green**<sup>45</sup>: assegnata la geometria di una struttura, è possibile calcolare il flusso potenziale punto per punto. Nella pratica la superficie del corpo viene discretizzata in elementi piani detti **pannelli**, e il potenziale viene calcolato su ciascuno di essi; per questa ragione il metodo è noto anche come *metodo a pannelli* ed è ampiamente utilizzato in ambito aerospaziale, ad esempio dalla NASA.

<sup>45</sup>La formula di Green consente di esprimere il valore del potenziale in un punto qualsiasi del campo come integrale di superficie delle singolarità distribuite sulla frontiera del corpo.

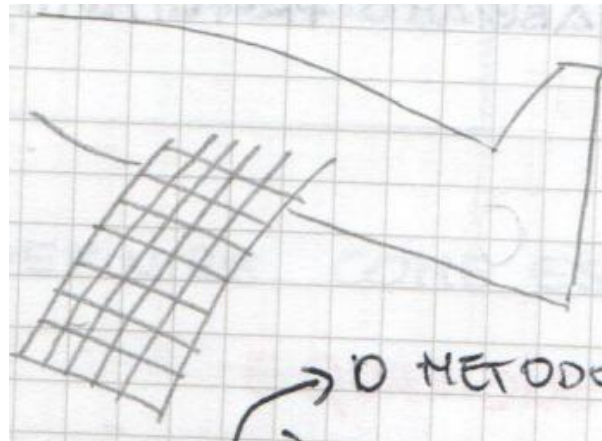


Figura 30: Discretizzazione della superficie di un corpo in pannelli per il calcolo del flusso potenziale con il metodo diretto.

## 24.2 Metodo indiretto (sovrapposizione di soluzioni semplici)

Il metodo indiretto è quello più diffuso e concettualmente più accessibile. Poiché l'equazione di Laplace è *lineare*, vale il **principio di sovrapposizione**: se  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  sono singole soluzioni di  $\nabla^2 \varphi = 0$ , allora qualsiasi combinazione lineare

$$\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad \nabla^2 \tilde{\varphi} = 0, \quad (165)$$

è anch'essa soluzione. In altre parole, disponendo di soluzioni elementari note è possibile costruire la soluzione globale per geometrie complesse semplicemente sommandole con opportuni coefficienti  $a_i$ .

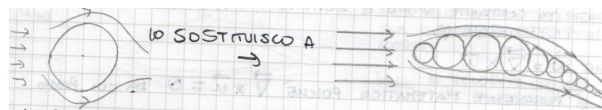


Figura 31: Idea del metodo indiretto: un profilo alare viene approssimato sostituendolo con una combinazione di geometrie più semplici (ad esempio cilindri) di cui è noto il potenziale.

A titolo di esempio, dato un profilo alare si può immaginare di sostituirlo con un insieme di cilindri circolari, per ciascuno dei quali il potenziale è calcolabile in forma chiusa. Il requisito fondamentale è che il campo perturbato risultante e in particolare le linee di corrente sia identico a quello prodotto dal corpo reale.

Le soluzioni elementari che verranno ora introdotte sono tre:

1. la *corrente uniforme*,
2. la *sorgente* (e il *pozzo*),
3. il *vortice potenziale*.

## 25 Soluzioni elementari dell'equazione di Laplace

### 25.1 Corrente uniforme

La prima e più semplice soluzione elementare è la **corrente uniforme**. Si consideri un campo bidimensionale in cui il vettore velocità all'infinito  $\vec{u}_\infty$  è noto in intensità, direzione e verso.

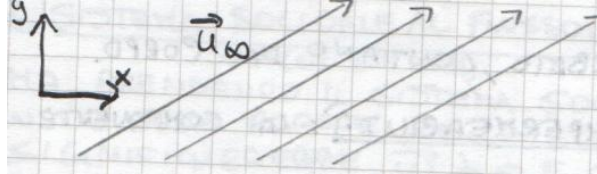


Figura 32: Sistema di coordinate  $(x, y)$  con il vettore velocità della corrente uniforme  $\vec{u}_\infty$  inclinato di un angolo di incidenza  $\alpha$  rispetto all'asse  $x$ .

Nel caso bidimensionale il vettore  $\vec{u}_\infty$  possiede due componenti e forma un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$  del sistema di riferimento; l'angolo  $\alpha$  è detto **angolo di incidenza** in aerodinamica. Si ha pertanto:

$$\vec{u}_\infty = (U_\infty \cos \alpha, U_\infty \sin \alpha). \quad (166)$$

Dalla relazione  $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$  e dall'espressione del gradiente in coordinate cartesiane bidimensionali,  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ , si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty \cos \alpha, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_\infty \sin \alpha. \end{cases} \quad (167)$$

Integrando la prima equazione rispetto a  $x$  si ricava  $\varphi = U_\infty \cos \alpha x + f(y)$ , dove  $f(y)$  è una funzione arbitraria della sola  $y$ . Analogamente, integrando la seconda rispetto a  $y$  si ottiene  $\varphi = U_\infty \sin \alpha y + g(x)$ . Confrontando le due espressioni si conclude che

$$\varphi = U_\infty \cos \alpha x + U_\infty \sin \alpha y + \text{cost.} \quad (168)$$

La costante additiva è irrilevante, poiché solo le derivate di  $\varphi$  hanno significato fisico<sup>46</sup>; si pone pertanto  $\text{cost} = 0$ .

**Caso particolare: asse  $x$  allineato con la corrente.** Se il sistema di riferimento è scelto in modo che l'asse  $x$  sia parallelo a  $\vec{u}_\infty$ , allora  $\alpha = 0$  e  $\cos \alpha = 1$ , da cui il **potenziale della corrente uniforme** si riduce a

$$\boxed{\varphi = U_\infty x.} \quad (169)$$

### 25.2 Sorgente e pozzo

Per simulare lo *spessore* dei corpi immersi nel flusso si introducono due singolarità complementari: la **sorgente** e il **pozzo**. Si immagini che da un punto del campo si dipartano linee di corrente puramente radiali: se le linee escono dal punto si parla di sorgente, se vi convergono si parla di pozzo. L'una è dunque l'opposta dell'altra.

<sup>46</sup>Essendo il campo di velocità definito come  $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ , l'aggiunta di una costante al potenziale non modifica in alcun modo il campo di moto.

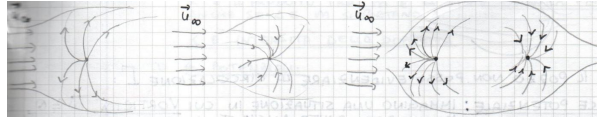


Figura 33: Schemi delle linee di corrente per una sorgente (linee uscenti), un pozzo (linee entranti) e l'applicazione alla forma di un dirigibile ottenuta per sovrapposizione.

La grandezza che caratterizza sorgente e pozzo è la **portata volumetrica**  $m$ , definita come

$$m = \iint \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right], \quad (170)$$

con la convenzione di segno:  $m > 0$  per la sorgente,  $m < 0$  per il pozzo<sup>47</sup>.

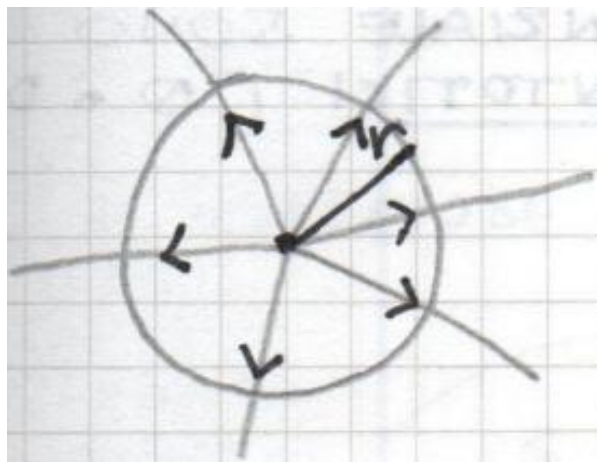


Figura 34: Sistema di coordinate polari  $(r, \theta)$  con circonferenza di raggio  $r$  centrata nella sorgente, utilizzata come superficie di controllo per il calcolo della portata.

**Calcolo del potenziale in coordinate polari.** Per sfruttare la simmetria radiale del problema conviene adottare le coordinate polari  $(r, \theta)$ , legate alle cartesiane da  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

In coordinate polari il gradiente assume la forma

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (171)$$

dove il fattore  $1/r$  nella componente angolare deriva dal fatto che l'elemento di lunghezza nella direzione  $\theta$  è  $r \, d\theta$  e non semplicemente  $d\theta$ .

La portata attraverso una circonferenza di raggio  $r$  centrata nella sorgente vale

$$m = \oint_0^{2\pi} u_r \, r \, d\theta. \quad (172)$$

<sup>47</sup>In idraulica la stessa grandezza è spesso indicata con  $Q = VA$ , dove  $V$  è la velocità media e  $A$  l'area della sezione.

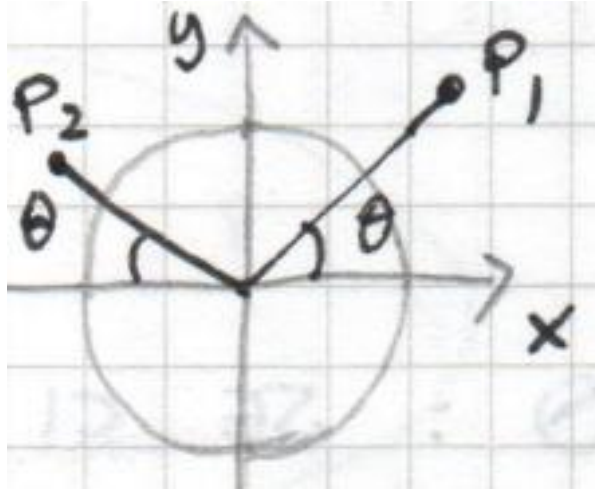


Figura 35: Elemento infinitesimo in coordinate polari: il punto  $P_1$  si trova in  $(r, \theta)$  e  $P_2$  in  $(r, \theta + d\theta)$ .

Poiché le linee di corrente sono radiali, la componente tangenziale della velocità è nulla ( $U_\theta = 0$ ) e la componente radiale  $U_r$  non dipende da  $\theta$ <sup>48</sup>. L'integrale si riduce quindi a

$$U_r \cdot r \cdot 2\pi = m, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} U_r = \frac{m}{2\pi r}, \\ U_\theta = 0. \end{cases} \quad (173)$$

Integrando  $U_r = \partial\varphi/\partial r = m/(2\pi r)$  rispetto a  $r$  si ottiene il **potenziale della sorgente** (o del pozzo, a seconda del segno di  $m$ ):

$$\varphi_S = \frac{m}{2\pi} \ln r. \quad (174)$$

**Interpretazione fisica.** Il potenziale logaritmico della sorgente diverge per  $r \rightarrow 0$ : il punto in cui è collocata la sorgente è un *punto di singolarità* del campo. Questo non costituisce un problema pratico, poiché nelle applicazioni le singolarità vengono posizionate *all'interno* del corpo solido, dove il potenziale non ha significato fisico; i punti in cui si calcola effettivamente  $\varphi$  sono esterni al corpo, dove il potenziale è finito e regolare. Si noti inoltre che  $U_r$  decresce come  $1/r$ : allontanandosi dalla sorgente la velocità si attenua, coerentemente con la conservazione della massa attraverso circonferenze di raggio crescente.

### 25.3 Vortice potenziale

La terza soluzione elementare è il **vortice potenziale**, necessario per rappresentare la *circolazione* attorno ai corpi e, di conseguenza, la *portanza*. Un profilo alare, a causa della propria asimmetria geometrica, genera un flusso diverso tra dorso e ventre; tale differenza si traduce in una circolazione  $\Gamma$  non nulla e, per il teorema di Kutta–Joukowski, in una forza di portanza<sup>49</sup>.

Si consideri un campo in cui la vorticità  $\vec{\omega}$  è diversa da zero in un unico punto (singolarità), mentre nel resto dello spazio il flusso è irrotazionale. Le linee di corrente sono cerchi concentrici

<sup>48</sup>Se  $U_r$  dipendesse da  $\theta$ , le linee di corrente non sarebbero più puramente radiali, contraddicendo la definizione stessa di sorgente puntiforme.

<sup>49</sup>Il legame tra circolazione e portanza sarà approfondito nei capitoli successivi; qui ci si limita a motivare l'introduzione del vortice potenziale.

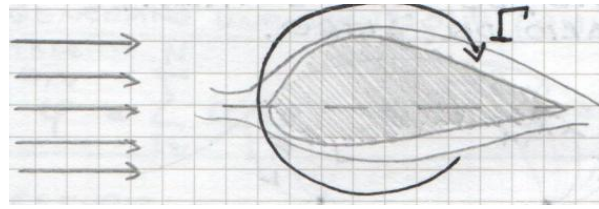


Figura 36: Profilo alare con linee di corrente e circolazione  $\Gamma$  attorno al contorno chiuso del profilo.

attorno al punto singolare: la componente tangenziale della velocità è non nulla ( $U_\theta \neq 0$ ), mentre quella radiale è identicamente nulla ( $U_r = 0$ ).

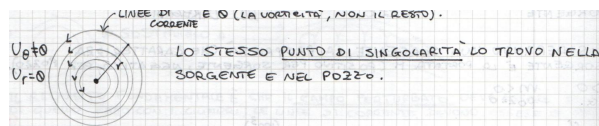


Figura 37: Vortice potenziale: le linee di corrente sono circonferenze concentriche con  $U_\theta \neq 0$  e  $U_r = 0$ . Il punto centrale è una singolarità, analogamente a quanto accade per sorgente e pozzo.

**Calcolo del potenziale.** La circolazione lungo una qualsiasi circonferenza di raggio  $r$  centrata nel vortice è, per definizione,

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} U_\theta r d\theta. \quad (175)$$

Poiché  $U_\theta$  non dipende da  $\theta$  (simmetria assiale) e  $U_r = 0$ , si ottiene

$$U_\theta \cdot r \cdot 2\pi = \Gamma, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} U_r = 0, \\ U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{cases} \quad (176)$$

Applicando il gradiente in coordinate polari,  $U_\theta = (1/r) \partial\varphi/\partial\theta$ , si ricava

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \implies \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (177)$$

Integrando rispetto a  $\theta$  (e ponendo la costante additiva pari a zero, come per la corrente uniforme) si ottiene il **potenziale del vortice**:

$$\boxed{\varphi_V = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.} \quad (178)$$

**Interpretazione fisica.** Il potenziale del vortice è proporzionale all'angolo  $\theta$ : percorrendo un giro completo attorno alla singolarità,  $\varphi$  subisce un incremento pari a  $\Gamma$ , coerentemente con la definizione di circolazione. Come per la sorgente, il punto centrale è una singolarità ( $U_\theta \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow 0$ ), ma nelle applicazioni esso viene collocato all'interno del corpo, dove il potenziale non deve essere valutato. Si noti l'analogia strutturale con la sorgente: nel vortice il ruolo della portata  $m$  è svolto dalla circolazione  $\Gamma$ , e le coordinate  $r$  e  $\theta$  si scambiano di ruolo tra le due soluzioni<sup>50</sup>.

<sup>50</sup>Confrontando le equazioni (174) e (178) si osserva che  $\varphi_S \propto \ln r$  mentre  $\varphi_V \propto \theta$ : la sorgente ha velocità radiale e potenziale dipendente da  $r$ ; il vortice ha velocità tangenziale e potenziale dipendente da  $\theta$ .

**Riepilogo delle soluzioni elementari.** Le tre soluzioni elementari dell'equazione di Laplace in due dimensioni, che costituiscono i mattoni fondamentali del metodo indiretto, sono:

$$\text{Corrente uniforme: } \varphi = U_\infty \cos \alpha x + U_\infty \sin \alpha y, \quad (179)$$

$$\text{Sorgente/pozzo: } \varphi_S = \frac{m}{2\pi} \ln r, \quad (180)$$

$$\text{Vortice potenziale: } \varphi_V = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta. \quad (181)$$

Mediante opportune combinazioni lineari di queste soluzioni, come indicato dall'equazione (165), è possibile costruire il campo potenziale attorno a corpi di geometria arbitraria.

““