FLUIDODINAMICA

PASSAGGIO IDRODINAMICA → FLUIDODINAMICA → ENTRA IN GIOCO LA DENSITÀ ρ

MENTRE NELLA IDRODINAMICA SI STUDIANO PRINCIPALMENTE FLUIDI, IN PARTICOLARE LIQUIDI, CON DENSITÀ COSTANTE, NELLA FLUIDODINAMICA LA DENSITÀ VARIA

QUINDI ESSENDO ρ NON COSTANTE, ρ SARÀ UNA NUOVA VARIABILE → AVREMO UN'EQUAZIONE AGGIUNTIVA, PERTANTO IL SISTEMA DI EQUAZIONI AVRÀ UNA NUOVA VARIABILE CON RELATIVA EQUAZIONE.

EQUAZIONI E VARIABILI INCONTRATE FINORA: (4 VARIABILI, 4 EQUAZIONI DI GOVERNO)

- u_1, u_2, u_3 VELOCITÀ (3 COMPONENTI)
- P PRESSIONE
- EQUAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO
  EQ. VETTORIALE → 3 EQ. SCALARI
- EQUAZIONE DELLA MASSA
  EQUAZIONE DI CONTINUITÀ (EQ. SCALARE)

DOVENDO SCRIVERE UN'EQUAZIONE PER LA DENSITÀ SI AGGIUNGE PERÒ ANCHE LA VARIABILE DELLA TEMPERATURA

$\rho \rightarrow T$

ALLA FINE DOVRÒ AGGIUNGERE UN TOTALE DI 2 EQUAZIONI AL MIO SISTEMA DI EQUAZIONI:

1. EQUAZIONE DI STATO
2. EQUAZIONE DELL'ENERGIA

(AGGIUNGENDO LA DENSITÀ SUL SISTEMA SI MODIFICHERANNO ANCHE LE PRIME DUE EQUAZIONI)

QUINDI NELLA FLUIDODINAMICA AVREMO:

NUOVE SIMBOLOGIE (TENSORI, GRADIENTI DI VELOCITÀ, MATRICI)
(NUOVE CONVENZIONI LEGATE ALLA FLUIDODINAMICA)
NOTAZIONE DI EINSTEIN, NOTAZIONE MATRICIALE

NUOVO INSIEME DI EQUAZIONI CHE SIA VALIDO IN GENERALE
(ANCHE QUANDO LA DENSITÀ È CONSIDERATA VARIABILE)
↓
SET DI EQUAZIONI COMPLICATE E GENERALI
(VALIDE PER QUASI TUTTI I FLUIDI)
FORMULAZIONE GENERALE CON NOTAZIONI, SIMBOLOGIA E OPERAZIONI COMPLICATE
↓
DA CUI DISCENDONO CASI PARTICOLARI E SEMPLIFICAZIONI

NUOVO SISTEMA DI EQUAZIONI → 6 EQUAZIONI E 6 INCOGNITE
A QUESTO SISTEMA SARÀ POSSIBILE EFFETTUARE UNA SEMPLIFICAZIONE (DI CARATTERE GENERALE) TRAMITE L'INDIVIDUAZIONE DEL PROBLEMA FISICO DA CUI DISCENDE LA ADIMENSIONALIZZAZIONE TRAMITE TEOREMA DI BUCKINGHAM.

AVREMO QUINDI DEI GRUPPI ADIMENSIONALI DA USARE

- Ec — ECKERT
- Pr — PRANDTL
- St — STROUHAL
- Re — REYNOLDS
- Ru — RUARK
- M — MACH → TIENE CONTO DI UN FLUSSO A DENSITÀ VARIABILE
- Fr — FROUDE

DOPO AVER TROVATO I GRUPPI ADIMENSIONALI SI CERCANO LE SOLUZIONI ASINTOTICHE

PER $\rightarrow \infty$ O $\rightarrow 0$

L'IDRODINAMICA È UNA SEMPLIFICAZIONE DELLA FLUIDODINAMICA CHE È OTTENUTA FACENDO ANDARE A $\emptyset$ IL NUMERO DI MACH, QUINDI $M \to \emptyset$.
ANCHE NEL CASO DI FLUIDI NON VISCOSI EULERIANI, IN CUI LA VISCOSITÀ NON È IMPORTANTE, SONO QUELLI PER CUI $Re \to \infty$; NEL CASO DI FLUSSI STOKESIANI $Re \to 0$.

ALCUNE SOLUZIONI ASINTOTICHE PARTICOLARI:

$\boxed{Re \to \infty}$ ① FLUSSI POTENZIALI → INTRODUZIONE DI NUOVA VARIABILE φ (POTENZIALE) CHE CI DARÀ EQUAZIONI DI GOVERNO NUOVE MOLTO PIÙ SEMPLICI. NO VISCOSITÀ.

② STRATO LIMITE → L'IPOTESI $Re \to \infty$ HA COME CONSEGUENZA IL FATTO CHE NON È POSSIBILE CALCOLARE L'EFFETTO DELLA FORZA VISCOSA (IL MODELLO $Re \to \infty$ MI PREDICE L'ASSENZA DI RESISTENZA AERODINAMICA)
PARADOSSO DI D'ALAMBERT → SOTTO L'IPOTESI DI MODELLO A POTENZIALE MI DA DEI RISULTATI CHE SOTTO CERTI ASPETTI SONO FALLIMENTARI, CIOÈ MI SONO PERSO ALCUNE INFORMAZIONI FONDAMENTALI (ES. RESISTENZA AERODINAMICA)
CON LO STRATO LIMITE INTRODUCO ANCHE L'EFFETTO DELLA VISCOSITÀ.

③ FLUSSI COMPRESSIBILI IN CONDOTTI → STUDIATI IN CONDIZIONI SUBSONICHE ($M<1$) E SUPERSONICHE ($M>1$), DEFINENDOLI RISPETTIVAMENTE FLUIDO SUBSONICO E FLUIDO SUPERSONICO TENENDO CONTO DELLE VARIAZIONI DI DENSITÀ, STUDIANDO GEOMETRIE SEMPLICI IN CUI LE EQUAZIONI SARANNO PIÙ SEMPLICI RISPETTO A GEOMETRIE GENERICHE.
(FLUSSO INDICA FLUIDO IN MOTO)

3° LEZIONE FLUIDODINAMICA 26 APRILE

PERTANTO LA ρ SARÀ VARIABILE E NON PIÙ UNA COSTANTE

ρ È STRETTAMENTE LEGATA A PRESSIONE P E TEMPERATURA $T \to \rho(P,T)$

POSSIAMO STABILIRE UN RAPPORTO TRA LE VARIAZIONI DI P E T CON ρ:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \rho} \to \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha}$$

1. CASO DELLA PRESSIONE
IN CUI α È IL COEFFICIENTE DI COMPRIMIBILITÀ $[Pa^{-1}]$
(COMPRIMIBILITÀ O COMPRESSIBILITÀ SONO SINONIMI)

α QUANTIFICA QUANTO È SENSIBILE ρ DA P

α ACQUA $\sim 10^{-10}\ Pa^{-1}$
α ARIA $\sim 10^{-5}\ Pa^{-1}$
} C'È GRANDE DIFFERENZA DI AMPIEZZA; IN UN GAS PICCOLE VARIAZIONI DI PRESSIONE VARIA ENORMEMENTE LA DENSITÀ

2. CASO DELLA TEMPERATURA

β = COEFFICIENTE DI ESPANSIONE TERMICA

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}} \to \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta \rho}$$

IL COEFFICIENTE β È SEMPRE DIMENSIONALE $\left[\frac{1}{K}\right]$ KELVIN

ACQUA $\sim 10^{-4}\ K^{-1}$
ARIA $\sim 10^{-2}\ K^{-1}$
} CIÒ CHE CONTA È LA SENSIBILITÀ CHE È DI 2 ORDINI DI GRANDEZZA DIFFERENTI

AVREMO QUINDI:

$\rho(T,P)$ = COSTANTE → FLUSSI INCOMPRIMIBILI (NON DIPENDE DA T, ρ)
$\rho(P)$ → FLUSSO BAROTROPICO
$\rho(T)$ → FLUSSO TERMOTROPICO → ES. CONVEZIONE ARIA IN UNA STANZA
$\rho(T,P)$ → FLUSSO COMPRIMIBILE

LA RELAZIONE DI STATO LA POSSIAMO UTILIZZARE IN TUTTI I CASI REALI TRANNE ALCUNI IN PARTICOLARE (ES. IN CONDIZIONI DI MACH>10)

$$\boxed{\frac{P}{\rho} = \gamma R T}$$

IN CUI IN R HO LE CARATTERISTICHE CHIMICHE

$1/\rho = V$ VOLUME SPECIFICO

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}4 \qquad R = 287 \frac{J}{Kg \cdot K}$ PER ARIA

NON MI PORTO DIETRO LA COSTANTE UNIVERSALE

IL TERMINE CONSERVAZIONE SI USA PER EGUAGLIARE Q.TÀ A $\emptyset$, BILANCIO PER EGUAGLIARE I DUE MEMBRI.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ O BILANCIO/ CONSERVAZIONE DELLA MASSA

SI PARTE DA PRINCIPI PRIMI OSSIA DA UN'EVIDENZA FISICA, DI CARATTERE LAGRANGIANO, OSSIA VOLUME MATERIALE FORMATO DALLA STESSA MATERIA MA CON VOLUME VARIABILE. VOGLIO PASSARE PERÒ A DI UN VOLUME DI CONTROLLO ALTRIMENTI NON HO NECESSITÀ DI UN VOLUME MATERIALE (NON CI FACCIO NULLA PRATICAMENTE).

DA PRINCIPIO PRIMO (LAGRANGIANO) $\rightarrow$ TESI: TEOREMA DI REYNOLDS $\rightarrow$ PRINCIPIO PRIMO IN OTTICA EULERIANA $\rightarrow$ FORMA INTEGRALE $\rightarrow$ VA RISCRITTO IN F. DIFFER. $\rightarrow$ $\rightarrow$ APPLICO I TEOREMA DI GREEN (DA INT. DI SUP. PASSO A INT. DI VOLUME)

LA FORMA INTEGRALE DÀ INFORMAZIONI DI CARATTERE GLOBALE MA PER STUDI DI DETTAGLIO NECESSITO LA FORMA DIFFERENZIALE.

PRINCIPIO PRIMO DICE CHE LA MASSA RIMANE COSTANTE

SE HO ρ LOCALE $\rightarrow$ CONOSCO ρ DI UN PRECISO PUNTO, INTEGRANDO SUL VOLUME OTTENGO L'INTERA MASSA. IMMAGINO ρ MEDIA.

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

CON IL SIMBOLO $\boxed{\frac{D}{Dt}}$ SI INDICA LA DERIVATA MATERIALE/TOTALE/ SOSTANZIALE

DIVERSO DA $\boxed{\frac{d}{dt} \text{ o } \frac{\partial}{\partial t}}$ CHE INDICA LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO

PERTANTO $\frac{DM}{Dt} = \emptyset$ E APPLICO QUINDI IL TEOREMA DI REYNOLDS:

$$\emptyset = \frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint_V \rho \, dV \xrightarrow[\text{PASSO A VOLUME DI CONTROLLO TRAMITE REYNOLDS}]{\text{DA VOLUME MATERIALE}} \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0} \rho \, dV + \iint_{S_0} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dS = \emptyset$$

V_0 VOLUME DI CONTROLLO $\qquad$ S_0 FRONTIERA/SUPERFICIE DEL VOLUME DI CONTROLLO

SCRIVERE $\vec{u}$ O $\overline{u}$ È EQUIVALENTE SEMPRE AD UN VETTORE

$$\vec{u}\cdot\vec{n} \longrightarrow \begin{aligned} \vec{u} &\equiv (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{n} &\equiv (n_1, n_2, n_3) \end{aligned}$$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{n}} = u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3$ PRODOTTO SCALARE $\rightarrow$ (NOTAZIONE VETTORIALE)

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \quad {\scriptstyle i=1,2,3} \\ n_i &= \vec{n} \equiv (n_1, n_2, n_3) \quad {\scriptstyle i=1,2,3} \end{aligned}\right\}$$ IN GENERALE $a_i = \vec{a}$ VETTORE (NOTAZIONE INDICIALE)

$\boxed{\sum u_i n_i = u_i \cdot n_i}$ NOTAZIONE DI EINSTEIN PER INDICARE SOMMATORIE

SOLO SE CI SONO DUE INDICI UGUALI!

DA CUI $\boxed{\overline{u}\cdot\overline{n} = u_i \cdot n_i}$

TORNANDO AL TEOREMA DI REYNOLDS

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_0} \rho \, dV + \iint_{S_0} \rho(u_i \cdot n_i)\, dS = \emptyset$$

APPLICO TEOREMA DI GREEN CHE TRASFORMA L'INTEGRALE DI SUPERFICIE TRAMITE LA DIVERGENZA (div) MA CHE USIAMO CON SCRITTURA DIVERSA.

$$\underset{\text{NABLA}}{\vec{\nabla}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$ VETTORE CON 3 COMPONENTI (FORMA VETTORIALE)

IN FORMA INDICIALE

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ORA APPLICO IL I TEOREMA DI GREEN ED EFFETTUO LA DIVERGENZA:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0} \rho\, dV + \iiint_{V_0} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)\, dV = \emptyset$$

È IMPORTANTE RICORDARE CHE $\boxed{\text{GRADIENTE} \neq \text{DIVERGENZA}}$

LA DIVERGENZA SI APPLICA A VETTORI O A TENSORI DIMINUENDO IL GRADO es. TRASFORMA VETTORE IN SCALARE

$$\vec{a} \rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}}$$ CHE CI DÀ SCALARE (FORMA VETTORIALE)

IL SIMBOLO IN FORMA INDICIALE DELLA DIVERGENZA È:

$$\boxed{\frac{\partial a_i}{\partial x_i}}$$ → È INOLTRE (NOTAZIONE DI EINSTEIN) POICHÉ SOMMA DI COMPONENTI CON STESSO INDICE

PERTANTO DOBBIAMO ANCHE DIRE CHE:

$$\boxed{\underset{\text{DIVERGENZA}}{\vec{\nabla}\cdot\vec{a}} \neq \underset{\text{GRADIENTE}}{(\vec{\nabla}\vec{a})}}$$

QUINDI: HO APPLICATO GREEN E TRASFORMATO L'INTEGRALE

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V_0} \rho\, dV + \iiint_{V_0} \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\, dV$$

IN CUI $\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}}$ CI DEVE DARE UNO SCALARE ↔ ABBASSA ORDINE: DA VETTORE $\vec{u}$ A SCALARE

DATA ORA L'ARBITRARIETÀ DEL VOLUME DI CONTROLLO (IPOTIZZANDO CHE V_0 NON VARIA NEL TEMPO) ELIMINO L'INTEGRALE E PORTO DENTRO LA DERIVATA.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \emptyset \quad *$$

CHE POSSO RISCRIVERE IN FORMA INDICIALE COME:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_K}{\partial x_K} = \emptyset}$$ EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA (EQ. GENERALE)

SE DIMOSTRIAMO CHE ρ È COSTANTE, LA PRIMA DERIVATA VA VIA; ρu_K PORTO FUORI ρ

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \emptyset \quad \text{o} \quad \frac{\partial u_J}{\partial x_J}}$$ CASO PARTICOLARE DI BILANCIO MASSA PER FLUIDI INCOMPRIMIBILI

ALTRA MANIERA PER DESCRIVERE IL BILANCIO È CON L'USO DELLA DERIVATA MATERIALE:

DERIVATA MATERIALE È OPERATORE

$$\boxed{\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\bullet)}$$

CON IL PRODOTTO SCALARE

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bullet = u_1\frac{\partial\bullet}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial\bullet}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial\bullet}{\partial x_3}$$

(FORMA VETTORIALE)

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bullet = u_K\frac{\partial\bullet}{\partial x_K}$$

FORMA INDICIALE CON NOTAZIONE DI EINSTEIN

SENZA PRODOTTO SCALARE

$$(\vec{\nabla}a) = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_2} + \frac{\partial a}{\partial x_3}\right)$$

GR. GENERALE

QUINDI POSSO RISCRIVERLA TRAMITE NOTAZIONE VETTORIALE DI PRIMA:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho = 0 \quad \text{DA} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \; *$$

P. SCALARE → CI DEVE DARE SEMPRE UNO SCALARE

QUINDI:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0} \quad \text{IN CUI} \quad \frac{D\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{dt} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho$$

(BILANCIO Q.TÀ DI MASSA O CONSERVAZIONE DI MASSA)

NEL CASO DELLA CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO COMPARIRÀ UN INTEGRALE DI SUPERFICIE IN CUI APPARIRÀ IL TENSORE DELLE TENSIONI:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Φ = USATO IN IDRODINAMICA

È TENSORE SIMMETRICO

↓ CHE POSSO RISCRIVERE IN FORMA INDICIALE

T_{ij} ($i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$) (FORMA INDICIALE PER TENSORE)

MENTRE $T_{KK} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ TRACCIA MATRICE O DEL TENSORE

LA DIVERGENZA APPLICATA AD UN TENSORE CI DARÀ UN VETTORE (ABBASSA GRADO)

$$\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \frac{\partial}{\partial x_i}T_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$$

F. INDICIALE

È SEMPRE P. SCALARE

DEFINIAMO INOLTRE PRODOTTO DIADICO O TENSORIALE

$$\vec{a}\,\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \quad \text{OPPURE} \quad \vec{a}\otimes\vec{b} \quad \text{O} \quad \vec{a}:\vec{b}$$

SENZA PUNTINO

CHE È DIVERSO DA $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

IL PRODOTTO DIADITICO LO ABBIAMO RITROVATO NELLA Q.TÀ DI MOTO:

$\vec{\nabla}\vec{u} \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$

GRADIENTE DI $\vec{u}$ CI DÀ MATRICE DI 9 COMPONENTI — DIVERGENZA DI $\vec{u}$ CI DÀ SCALARE

QUINDI $\boxed{\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$ (FORMA INDICIALE)

TENSORE OTTENUTO TRAMITE GRADIENTE

SE SCRIVESSI $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ AVREI DIVERGENZA

QUINDI NELLA Q.TÀ DI MOTO AVREMO:

$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} \longrightarrow$ CI DÀ VETTORE $\rightarrow = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

LEZIONE 28 APRILE

INTRODUZIONE ALL'EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO
ANCHE QUI SI PARTIRÀ DA UN PRINCIPIO PRIMO PARTENDO DA VOLUME MATERIALE

EQUAZIONE MASSA (RIPASSO); NON USIAMO PIÙ V_0 MA V PER INDICARE VOLUME DI CONTROLLO

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV + \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{DM}{Dt}$$

APPLICANDO IL I TEOREMA DI GAUSS-GREEN OTTENIAMO TRAMITE DIVERGENZA CIÒ CHE PASSA PER LA SUPERFICIE. LA DIVERGENZA VA APPLICATA A TUTTO CIÒ CHE RIGUARDA $\vec{n}$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})}_{\text{DIVERGENZA}} = 0$$

DA CUI TRAMITE LO SVOLGIMENTO DELLA DIVERGENZA AVRÒ:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{IN CUI:} \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

(F. VETTORIALE)

IN GENERALE: $\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \bullet$ DERIVATA TOTALE

PASSIAMO IN FORMA INDICIALE (E CON NOTAZIONE DI EINSTEIN):

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \leftarrow \text{(F. INDICIALE)}$$

POICHÈ È UNA SOMMATORIA POSSO PORTARE FUORI LA ρ:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

IN CUI DERIVATA TOTALE IN F. INDICIALE: $\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}}$

STESSO INDICE POICHÈ È P. SCALARE (DIVERGENZA)

L'INDICE NELLA F. INDICIALE VA SCELTO SEMPRE RAGIONANDO!

EQUAZIONE DEL BILANCIO DELLA Q.TÀ DI MOTO

SI PARTE SEMPRE DA PRINCIPIO PRIMO → $\vec{Q}$ (Q.TÀ DI MOTO) → $\vec{Q} = \iiint_{V(t)} \rho\vec{u}\, dV$

STABILIAMO CHE: $\underbrace{\frac{D\vec{Q}}{Dt}}_{\text{DEFINITA SU VOLUME MATERIALE}} = \sum \underbrace{\vec{F}_m}_{\text{FORZE DI MASSA}} + \sum \underbrace{\vec{F}_s}_{\text{FORZE DI SUPERFICIE}}$

- VARIABILE ESTENSIVA DIPENDE DA VOLUME O MASSA
- VARIABILE INTENSIVA È QUANTITÀ CHE NON DIPENDE DA VOLUME O MASSA.

NEL NOSTRO CASO (PER LA Q.TÀ DI MOTO) LA Q.TÀ INTENSIVA È $\vec{u}$
NEL CASO DEL BILANCIO DELLA Q.TÀ DI MASSA ERA 1 POICHÉ È L'UNICA GRANDEZZA A NON DIPENDERE DA MASSA.

$\frac{D\vec{Q}}{Dt}$ → TRAMITE TEOREMA DI REYNOLDS PASSO DA VOLUME MATERIALE A VOLUME DI CONTROLLO → $= \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{u}\, dV + \iint_S \rho(\vec{u}\ \vec{u})\cdot\vec{n}\, dS = \frac{DQ}{Dt}$

CHE DOVRÀ ESSERE UGUALE ALLA SOMMATORIA DI FORZE DI MASSA E DI SUPERFICIE:

$\vec{F}_m = \iiint_V \rho f\, dV$ → FORZE DI MASSA → INSIEME DI FORZE DI VARIO GENERE COME F. GRAVITÀ/PESO, FORZE ELETTROMAGN., FORZE DI CORIOLIS

$\vec{F}_s = \iint_S \overline{\overline{T}}\cdot\vec{n}\, dS$ FORZE DI SUPERFICIE IN CUI $\overline{\overline{T}} = \Phi$ TENSORE DELLE TENSIONI O SFORZI IN IDRODINAMICA

QUINDI L'EQUAZIONE IN FORMA INTEGRALE È:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{u}\, dV + \iint_S (\rho\vec{u}\ \vec{u})\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_V \rho\vec{f}\, dV + \iint_S \overline{\overline{T}}\cdot\vec{n}\, dS}$$

APPLICO IL TEOREMA (I) DI GREEN PER GLI INTEGRALI DI SUPERFICIE: QUANDO SI APPLICA GREEN LA DIVERGENZA VA APPLICATA A TUTTO CIÒ CHE RIGUARDA $\vec{n}$.

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\underbrace{\vec{u}\vec{u}}) + \dots = \dots + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}\, dV$$

PRODOTTO DIADITICO O TENSORIALE → SI SCRIVE ANCHE ":" "$\otimes$"

CHE CI RIDÀ TENSORE E POI CON DIVERGENZA RIOTTENGO VETTORE.

$$\underset{\text{F. VETT.}}{\vec{u}\vec{u}} = \underset{\text{F. INDICIALE}}{u_i u_j} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{bmatrix}$$

RISCRIVIAMO ORA EQ. DIFFERENZIALE (IPOTIZZANDO COSTANZA VOLUME):

$$\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\vec{u}) = \rho\vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}} \qquad \text{(F. VETTORIALE)}$$

È DA 3 EQ. SCALARI

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_k}(T_{ik}) \qquad \text{(F. INDICIALE)}$$

$i = 1,2,3$ — J VARIA, i È FISSA

SE CAMBIO LA LETTERA NON CAMBIA IL SENSO, BASTA CHE NON VARI LA PRIMA CIOÈ i

POSSO LAVORARE PER SVOLGERE LA DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$\underline{\text{I MEMBRO}}: \ \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\vec{u}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{u}}_{\text{GRADIENTE}}+\vec{u}\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})}_{\text{DIVERGENZA}}=\dots$$

IMMAGINO $\rho\vec{u}$ E $\vec{u}$ SUDDIVISI

<u>IL RISULTATO DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE UN VETTORE!</u>

SE METTIAMO INSIEME $\vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{u}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})$:
IN EVIDENZA $\vec{u}$

$$\vec{u}\underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\right]}$$

$=\emptyset$ <u>POICHÈ È EQUAZIONE DI CONTINUITÀ DI BILANCIO MASSA VALIDA PER TUTTI I FLUIDI</u>

RIMANE:

RICORDANDO CHE:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\rightarrow\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right]=\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}\qquad \frac{D\bullet}{Dt}=\frac{\partial\bullet}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bullet$$

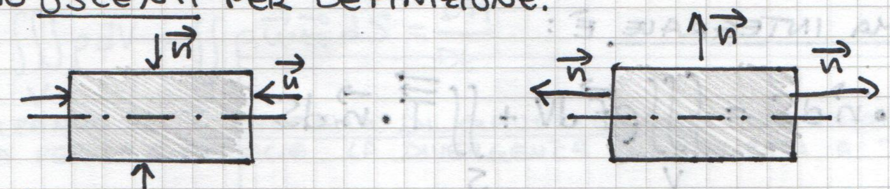
QUINDI

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\rho\vec{f}+\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{T}}}$$

IL TENSORE DELLE TENSIONI/SFORZI (MATRICE 3x3, 9 COMPONENTI) T_{ij} CHE È TENSORE SIMMETRICO CON 6 COMPONENTI INDIPENDENTI CHE SONO INCOGNITE. IL SISTEMA È CHIUSO QUANDO HO TANTE EQUAZIONI QUANTE INCOGNITE.

$\overline{\overline{T}}_{ij}$ LO SCOMPONGO IN 2 CONTRIBUTI $\left(=\Phi_{ij}\text{ IN IDRODINAMICA }=\underset{\text{RIMANE INCOGNITA}}{p}\,\overline{\overline{I}}+\underset{\text{DEFINITA DA VELOCITÀ}}{\overline{\overline{\Phi}}^{R}}\right)$

IN <u>IDRODINAMICA</u> LE <u>NORMALI</u> SONO <u>ENTRANTI</u>, IN <u>FLUIDODINAMICA</u> SONO <u>USCENTI</u> PER DEFINIZIONE.



<u>IDRODINAMICA</u> <u>FLUIDODINAMICA</u>

$$\boxed{\overline{\overline{T}}=-\underset{\text{USCENTE}}{p}\,\overline{\overline{I}}+\underset{\overline{\overline{\Phi}}^{R}}{\overline{\overline{\sigma}}}}$$

QUINDI:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\rho\vec{F}-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\sigma}}}$$

POSSIAMO INOLTRE INDICARE $\overline{\overline{T}}$ COME: $T_{ij}=-p\,\delta_{ij}+\dots$
(F. INDICIALE)

IN CUI $\overline{\overline{I}}=\delta_{ij}\begin{cases}1 & \text{SE } i=j\\ 0 & \text{SE } i\neq j\end{cases}$ <u>DELTA DI KRONEKER</u> $=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

SE METTO ij COME COMPONENTE IN T LO STESSO VALE IN δ_{ij} E PER σ_{ij}

SE EFFETTUO LA DIVERGENZA:

$$\vec{\nabla}\cdot(-p\,\delta_{ij})=\frac{\partial}{\partial x_j}(-p\,\delta_{ij})$$

SICCOME È DIVERGENZA, L'INDICE È J PERCHÈ LEVO J E LASCIO i.

E RIMANE : $\boxed{-\frac{\partial p}{\partial x_i}}$

DOBBIAMO ELIMINARE INCOGNITE PER AVER INTRODOTTO TENSORE TENSIONI T, SI BASA SEMPRE SU PRINCIPI PRIMI :

$$T_{ij} = F\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{STATO TERMODINAMICO}\right)$$

VOGLIO CAPIRE DIPENDENZA T_{ij} CI SI BASA SU SUPPOSIZIONI ASSIOMATICHE.

{NOLL WALTER → 1953 CONCETTI BASE MECCANICA DEL CONTINUO
{TRUESDELL PRESENTÒ 3 ASSIOMI DELLE RELAZIONI COSTITUTIVE

3 ASSIOMI:

1. INDIPENDENZA DAL FUTURO (ASSIOMA CHE CI DICE LA SITUAZIONE TENSIONALE È DETERMINATA DAL PASSATO)
2. EFFETTO LOCALE: CIÒ CHE ACCADE AD UNA PARTICELLA È INFLUENZATO DA CIÒ CHE STA INTORNO E NON DA CIÒ CHE STA LONTANO.
3. PRINCIPIO DI INDIPENDENZA DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO: SE T_{ij} È UN TENSORE SIMMETRICO, DIPENDERÀ SOLO DA TENSORI DELLA STESSA NATURA (QUINDI SIMMETRICI); NON PUÒ QUINDI DIPENDERE DA UN VETTORE MA DALLA PARTE SIMMETRICA DI UN VETTORE.

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \underbrace{D}_{\text{MATRICE SIMMETRICA}} + \underbrace{W}_{\text{ANTISIMMETRICA}} \qquad \text{IDRODINAMICA}$$

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\Omega}} \qquad \text{FLUIDODINAMICA}$$

(F. VETTORIALE)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\varepsilon_{ij} = A_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij} = D_{ij}} \qquad \text{(F. INDICIALE)}$$

CIÒ CHE CONTA È LA PARTE SIMMETRICA, LA PARTE ANTISIMMETRICA NON CI INTERESSA, QUINDI:

$$T_{ij} = F\left(\varepsilon_{ij}, \text{STATO TERMODINAMICO}\right)$$ → VARRÀ QUANDO IL FLUIDO È IN MOVIMENTO; QUANDO IL FLUIDO È FERMO DIPENDERÀ SOLO DALLO STATO TERMODINAMICO

QUINDI:

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} \quad \text{IN CONDIZIONI IDROSTATICHE}$$

ALTRIMENTI

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad \text{IN CONDIZIONI DINAMICHE}$$

p NON DIPENDE DA ε_{ij}; È LO STATO TERMODINAMICO CHE È LEGATO A p. QUINDI È LA VELOCITÀ AD ESSERE IN RELAZIONE CON σ_{ij}

FACCIO LO SVILUPPO IN SERIE:

$$\sigma_{ij} = \underbrace{A\delta_{ij}}_{\text{I ORD.}} + \underbrace{B\varepsilon_{ij}}_{\text{II ORD}} + C\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + D\ldots + E\ldots + \ldots$$

PER LA MAGGIOR PARTE DELLE APPLICAZIONI SI SI FERMA AL I ORDINE
QUINDI SIAMO IN ZONA LINEARE (FLUIDI NEWTONIANI)

LEZIONE 29 APRILE
RIPASSO/SINTESI ULTIMI CONCETTI

EQ. Q.TÀ DI MOTO $\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}$

DOBBIAMO AGGIUNGERE EQUAZIONI PER CHIUDERE IL SISTEMA:

$T_{ij} = F(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, SISTEMA TERMODINAMICO)

$\sigma_{ij} = G(\varepsilon_{ij})$ È TENSORE DEGLI SFORZI RESIDUI

$\boxed{T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}}$

FLUIDO ↔ IDRODINAMICA

$T_{ij} \leftrightarrow \Phi_{ij}$

$\sigma_{ij} \leftrightarrow \Phi^R_{ij} = \cancel{W_{ij}}$

$\varepsilon_{ij} \leftrightarrow D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

LA DIPENDENZA DA VELOCITÀ È TUTTA IN σ

SI FA SVILUPPO IN SERIE DI $\sigma_{ij} = G(\varepsilon_{ij})$ CON IPOTESI DI FLUIDI NEWTONIANI;
VOGLIAMO LEGAME LINEARE TRA σ E ε

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\varepsilon_{ij} + \ldots$$

PER LA MAGGIORANZA DEI FLUIDI, AVERE LEGAME LINEARE È CORRETTO.
AL POSTO DI B E IN TUTTI GLI ALTRI CASI POTREI AVERE:

$B_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \rightarrow$ DAREBBE TENSORE ij MENTRE kl SI ELIMINA.

QUINDI:

$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\varepsilon_{ij}$

CASO GENERICO

IL MENO LO PERDIAMO PER LA CONVEZIONE SULLA NORMALE

$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$

CASO INCOMPRIMIBILE

$2\mu = B$

↳ IL 2 STA A SEMPLIFICARCI IL TERMINE $\frac{1}{2}$ DI ε; È SCELTA TRADIZIONALE

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

NEL CASO INCOMPRIMIBILE MANCA IL PEZZO DI A QUINDI L'INFORMAZIONE DI COMPRIMIBILITÀ STA IN A.

$A = 0$ SE INCOMPRIMIBILE

$A \neq 0$ SE COMPRIMIBILE

A È PROP. A DIV DI $\vec{u}$

POICHÉ LA DIVERGENZA DI UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE È 0 AVREMO CHE:

$A = \lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ ASSOCIAMO UN λ

A È PROPRIO LA DIV $\vec{u}$ QUINDI A SECONDA DI INCOMPRIMIBILITÀ / COMPRIMIBILITÀ SPARISCE O MENO.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{TRACCIA DEL TENSORE} = tr(\varepsilon_{ij}) = \underbrace{\varepsilon_{kk}}_{\text{SOMMATORIA}}$$

QUINDI:

$$\boxed{T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}}$$

$A\delta_{ij}$ $\quad B\varepsilon_{ij}$

RELAZIONE COSTITUTIVA FLUIDI COMPRIMIBILI E INCOMPRIMIBILI

ε_{kk} → È UN NUMERO, NON È UNA MATRICE

DEFINIZIONE DI PRESSIONE

IL TERMINE CON λ PORTA CONSEGUENZE CON LA PRESSIONE

1) CASO FLUIDO IN QUIETE - CASO STATICO

$$p = \frac{-tr(T_{ij})}{3}$$

IL MENO È DOVUTO ALLA NORMALE

IN IDRODINAMICA ERA $p = \frac{tr(T_{ij})}{3}$

QUINDI $\varepsilon_{ij} = 0$ POICHÉ SIAMO IN CASO STATICO

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} \rightarrow tr(T_{ij}) = -p\cdot 3 \rightarrow p = -\frac{tr(T_{ij})}{3}$$

2) CASO INCOMPRIMIBILE MA IN MOTO

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

NON C'È ε_{kk}

$$tr(T_{ij}) = -p\cdot 3 + 2\mu\, tr(\varepsilon_{ij})$$

↳ È LA DIVERGENZA MA SIAMO IN CASO INCOMPRIMIBILE QUINDI SI ANNULLA

$$p = -\frac{tr(T_{ij})}{3}$$

3). CASO COMPRIMIBILE (IN MOTO?)

$$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk})\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

$$tr(T_{ij}) = -p\cdot 3 + (\lambda\,\varepsilon_{kk})\cdot 3 + 2\mu\,\overset{\text{TRACCIA}}{\varepsilon_{kk}}$$

DIVIDO PER 3 E CAMBIO SEGNO

$$\frac{-tr(T_{ij})}{3} = p - \lambda\,\varepsilon_{kk} - \frac{2\mu\,\varepsilon_{kk}}{3} = p - \varepsilon_{kk}\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)$$

TERMINE AGGIUNTO CHE SI PORTA DIETRO ε_{kk} CHE È DIVERGENZA DI $\vec{u}$ CHE SI ANNULLA NEL CASO INCOMPRIMIBILE

PER UNA GRANDE Q.TÀ DI FLUIDI "CASUALMENTE"

$\boxed{\lambda = -\frac{2}{3}\mu}$ IPOTESI DI STOKES → (UNA DELLE TANTE)

VALIDA PER GAS MONOATOMICI A BASSA DENSITÀ E CON L'ARIA. SE ABBIAMO GAS COMPLESSI CI DOBBIAMO PORTARE IL TERMINE QUINDI NON È CHE FLUIDO DIVENTA INCOMPRIMIBILE MA È SOLO PERCHÉ $\lambda = 2/3\,\mu$ CHE SI SEMPLIFICA.

$(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ → VISCOSITÀ VOLUMETRICA O BULK VISCOSITY

QUINDI, IN GENERALE, PER NOI LA PRESSIONE È $\boxed{p = -\frac{tr(T_{ij})}{3}}$

RISCRIVIAMO EQUAZIONE DELLA Q.TÀ DEL MOTO IN FORMA INDICIALE CON QUESTE CONSIDER.

$$\boxed{\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}}$$ Q.TÀ MOTO (F. INDICIALE)

→ QUALUNQUE INDICE VA BENE BASTA CHE IL PRIMO SIA CONGRUENTE CON IL PRIMO MEMBRO

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{\partial(p\,\delta_{ij})}{\partial x_j}}_{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\,\varepsilon_{kk}\delta_{ij})}_{\lambda\frac{\partial(\varepsilon_{kk})}{\partial x_i}} + \underbrace{\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{TRALASCIANDO }\mu}$$

SI DICE CHE δ_{ij} AMMAZZA L'INDICE J, SPARISCE E RIMANE

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda\varepsilon_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\varepsilon_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\varepsilon_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

IL LAPLACIANO

SCAMBIO LE DERIVATE, MI SOFFERMO SUL SECONDO TERMINE

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \to \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{kk})$$

TRACCIA

CHE È UGUALE AL TERMINE DI PRIMA IN IDRODINAMICA ERA 0 POICHÈ LA DIVERGENZA DI $\vec{u}$ È 0 PER FLUIDO INCOMPRIMIBILE

QUINDI: EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

$$\boxed{\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{kk})}$$ (F. INDICIALE)

$\partial x_j^2 = \partial x_j \partial x_j$

INDICE DI EINSTEIN NON È TENSORE MA VETTORE

QUALUNQUE LETTERA BASTA NON SIA i

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}_{\varepsilon_{kk}})}$$ (F. VETTORIALE)

LAPLACIANO DI $\vec{u}$

EQ. NAVIER-STOKES:

1. IPOTESI DI STOKES: ABBIAMO ELIMINATO λ SOLO PER ALCUNI GAS
2. FLUIDI NEWTONIANI: I LEGAMI SONO LINEARI TRA SFORZI E GRADIENTE DI VEL.

∇^2 È OPERATORE SCALARE = LAPLACIANO

$$\boxed{\nabla^2 \bullet = \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x_3^2}}$$

LA NON LINEARITÀ STA NEL TERMINE CONVETTIVO DELLA DERIVATA MATERIALE:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

LEZIONE 3 MAGGIO

EQ. NAVIER-STOKES

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{CHE VIENE DA } \rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{\nabla}\vec{u}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{\text{CHE VIENE DA PARTE SFERICA DEL TENSORE DELLE TENSIONI}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{INT. VOLUME FORZA DI MASSA}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{\text{TERMINE DISSIPATIVO LAPLACIANO}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-p \vec{\vec{I}})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p \delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

IL δ_{ij} AMMAZZA L'INDICE CHE SI RIPETE

$$\vec{\vec{\sigma}} = 2\mu \vec{\vec{\varepsilon}} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{\vec{I}}$$

$\vec{\vec{\varepsilon}} = D$ PARTE SIMMETRICA

CHE TIENE CONTO DELL'IPOTESI DI STOKES

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

$$\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = 0$$

BULK VISCOSITY

$$p = -\frac{tr(T_{ij})}{3}$$

FLUIDI NEWTONIANI → RAPPORTO σ ED ε SONO PROPORZIONALI

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

IL LAPLACIANO È ∇^2 È OPERATORE SCALARE CHE NON CAMBIA ORDINE DELLA QUANTITÀ SU CUI OPERA.

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}}$$

$$\vec{\nabla} \times \bullet \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bullet_x & \bullet_y & \bullet_z \end{vmatrix} \qquad \bullet(\bullet_x, \bullet_y, \bullet_z)$$

RIPRENDIAMO LA Q.TÀ DI MOTO IN RELAZIONE ALLA VORTICITÀ

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}}$$

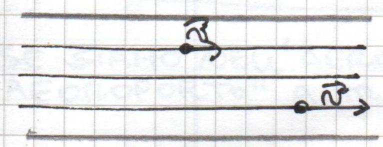
↑ ROTORE DELLA VELOCITÀ

VORTICITÀ

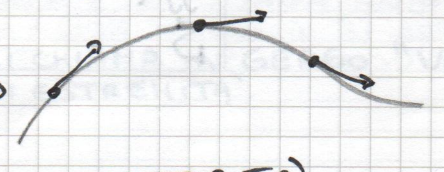
È QUINDI FUNZIONE DELLA POSIZIONE E DEL TEMPO. LA VORTICITÀ È UTILIZZATA PER TENERE CONTO DI ZONA IN CUI C'È PIÙ VARIAZIONE

L'EFFETTO DELLA VORTICITÀ È SEMPRE PRESENTE.

SE HO CONDOTTO A SEZIONE ARBITRARIA, LE LINEE DI CORRENTE SONO PARALLELE



← LINEE DI FLUSSO o CORRENTE →



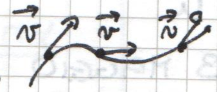
NO VORTICITÀ

VORTICITÀ

DEFINIRE UN VORTICE È MOLTO COMPLICATO.
È ZONA IN CUI $\vec{\omega}$ (VORTICITÀ) $\neq 0$ ED È CONFINATA IN UNA PRECISA ZONA.

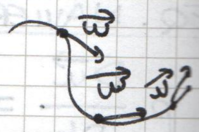
VORTICE OCCUPA VOLUME NELLO SPAZIO.

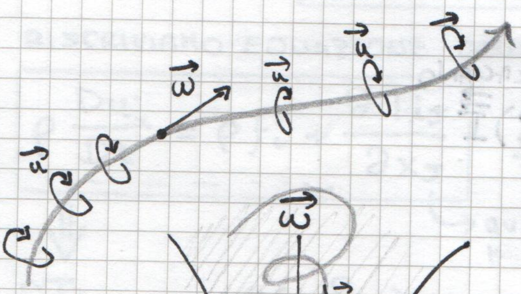
KELVIN ED HELMHOLTZ STUDIARONO I VORTICI E DIEDERO PROPRIETÀ SUI VORTICI (TEOREMI) VALIDI ANCORA OGGI.



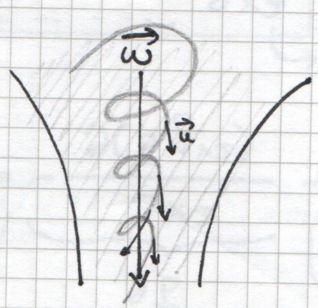
$\vec{u} \rightarrow$ LINEE DI CORRENTE ($\vec{u}$ DEFINITO PUNTO PER PUNTO)

$\vec{\omega} \rightarrow$ LINEE DI VORTICITÀ ($\vec{\omega}$ SEMPRE TANGENTE A LINEA DI VORTICITÀ COME LA $\vec{u}$ PER LINEA DI FLUSSO/CORRENTE)



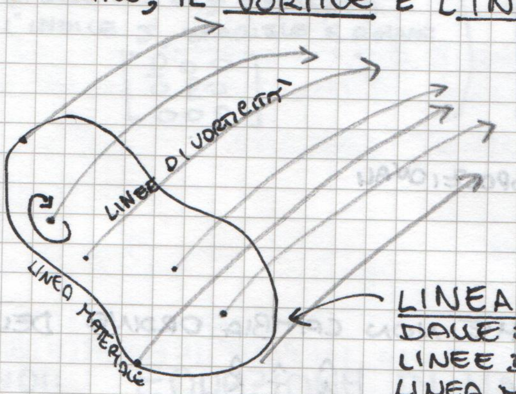


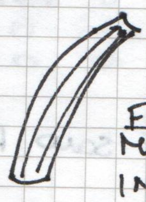
LINEA DI VORTICITÀ
LINEA DI CORRENTE È IN GENERALE PERPENDICOLARE A LINEA DI VORTICITÀ.



IN UN GORGO (ES. LAVANDINO)

IN GENERALE, IL VORTICE È L'INSIEME DELLE LINEE DI VORTICITÀ.



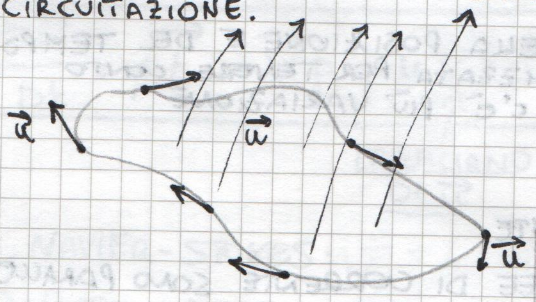


FILETTO VORTICOSO → QUANDO LINEA MATERIALE È INFINITESIMA ↔ SUPERFICIE INFINITESIMA

LINEA MATERIALE È LINEA CHIUSA COSTITUITA SEMPRE DALLE STESSE PARTICELLE. VORTICE È INSIEME DELLE LINEE DI VORTICITÀ CHE PASSANO ATTRAVERSO SUPERFICIE DELLA LINEA MATERIALE

LE LINEE DI VORTICITÀ POSSONO ESSERE DIVERSE MA HANNO UNA CERTA COERENZA.

L'INTENSITÀ DEL VORTICE DEVE ESSERE MISURATA DI QUANTO GIRANO LE PARTICELLE
MATEMATICAMENTE USIAMO IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DI LINEA DELLA VELOCITÀ O CIRCUITAZIONE.



$$\boxed{\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell}}$$

PRENDO ELEMENTO DELLA LINEA MATERIALE, VEDO QUANTO VALE $\vec{u}$ E CALCOLO CIÒ SU TUTTA LA LINEA

↓ TRAMITE TEOREMA DI STOKES

$$\boxed{\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} \, dS}$$

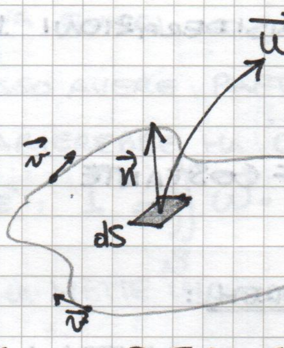
P. SCALARE

S È LA SUPERFICIE INDIVIDUATA DA LINEA CHIUSA

$\vec{n}$ È PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE

$\vec{\nabla} \times \vec{u}$ È VORTICITÀ DI $\vec{u} = \vec{\omega}$

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS$$



SE $\vec{\omega} = \emptyset \rightarrow$ INTENSITÀ $\Gamma = \emptyset$

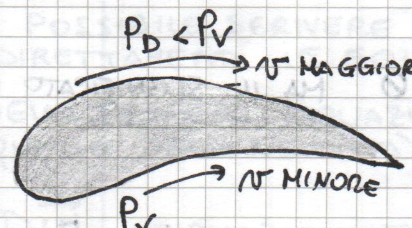
TUTTE QUESTE CONSIDERAZIONI TRIDIMENSIONALI E FISICHE FURONO FATTE DA HELMOLTZ.
KELVIN GUARDÒ SOLO IL FENOMENO IN MODO MATEMATICO.

KELVIN POSE ALCUNE IPOTESI PER GIUNGERE A CONSIDERAZIONE RILEVANTI:

- $Re = \frac{\rho U L}{\nu} \rightarrow \infty$ (NELLE NOSTRE APPLICAZIONI SE Re È GRANDE, CONSIDERIAMO ν, TERMINE VISCOSO, TRASCURABILE CHE NON SIGNIFICA $\emptyset$!)
- FORZE DI MASSA CONSERVATIVE CIOÈ $\vec{F} = -\vec{\nabla} G \leftarrow$ POTENZIALE GRAVITAZIONALE
  IN QUESTO CASO, SE F. È CONS., ROTORE $\vec{u} = \emptyset$
- FLUSSO INCOMPRIMIBILE $\rightarrow \rho =$ COSTANTE (AVEVA ANCHE CONSIDERATO FLUSSO BAROTROPICO CIOÈ $\rho(P)$ MA NOI LO CONSIDERIAMO INCOMPRIMIBILE)

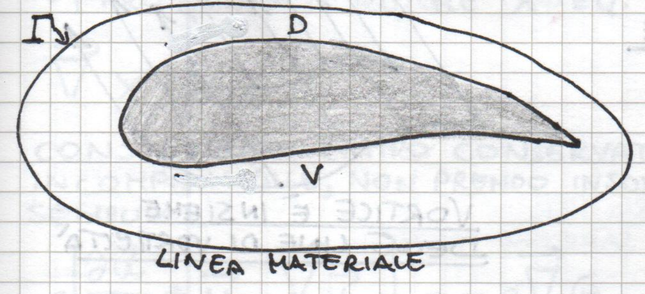
SE VALGONO TUTTE QUESTE IPOTESI:

$$\boxed{\Gamma = \text{COSTANTE}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = \emptyset}$$



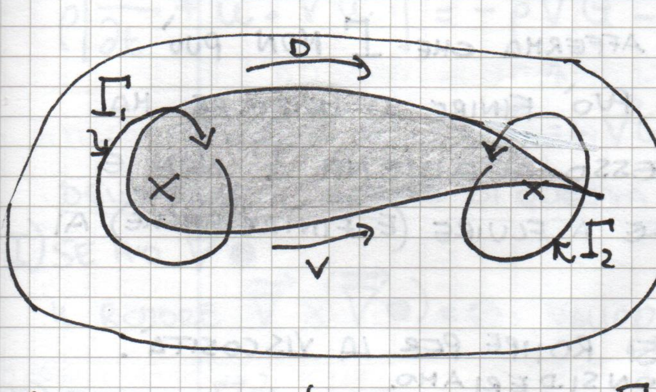
LA VELOCITÀ SUL DORSO È MAGGIORE POICHÉ IL FLUIDO DOVRÀ PERCORRERE PIÙ SPAZIO RISPETTO AL FLUIDO DEL VENTRE. DAL T. DI BERNOULLI AVREMO CHE LA P SARÀ MAGGIORE SUL VENTRE.

SE PRENDIAMO LINEA MATERIALE CHIUSA:



SE PROFILO NON SI MUOVE:

$\Gamma = \emptyset$ A $t = \emptyset$



AL t_1

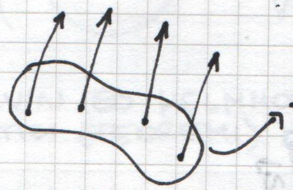
$\Gamma = \emptyset$ ANCHE SE IN MOTO IL TERMINE Γ SI ANNULLA PER LA PRESENZA DI DUE TERMINI OPPOSTI

$\Gamma_1 = -\Gamma_2$ TANTO PIÙ È INTENSO Γ_2 QUANTO È GRANDE Γ_1

SE SIAMO NELL'AEROPORTO IL Γ_2 SI CHIAMA IN GERGO "VORTICE DI AEROPORTO" ALTRIMENTI VORTICI DI ESTREMITÀ.

GRAZIE ALLA VISCOSITÀ QUESTO VORTICE SVANISCE PER DIFFUSIONE $\sim \nabla^2 \vec{u}$

HELMOLTZ PARTÌ DA CONSIDERAZIONI DI KELVIN ED ESTESE IL RISULTATO AL CASO DEI VORTICI:



Γ = COSTANTE

HELMOLTZ DEFINÌ 3 TEOREMI:

1. SE PRENDO ALTRE LINEE MATERIALI $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, ..)$ SI DIMOSTRA CHE TUTTE QUESTE INTENSITÀ SONO UGUALI. L'INTENSITÀ È QUINDI COSTANTE LUNGO IL VORTICE (CON IPOTESI DI KELVIN).

LEZIONE MECFLU 5 MAGGIO

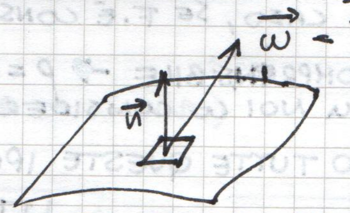
DEFINIAMO LA VORTICITÀ $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$

DEFINIAMO $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ ASSOCIATA A LINEA MATERIALE

PER OGNI ELEMENTINO $d\vec{\ell}$ FACCIO SCALARE ALLA $\vec{u}$ CORRISPONDENTE

$$\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS$$ (TRAMITE T. STOKES) DA INTENSITÀ, INT. SUP.

S SUP. MATERIALE



DEFINIAMO T. KELVIN COME $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ SOTTO CERTE IPOTESI CHE INCONTREREMO ANCHE NEI FLUSSI POTENZIALI

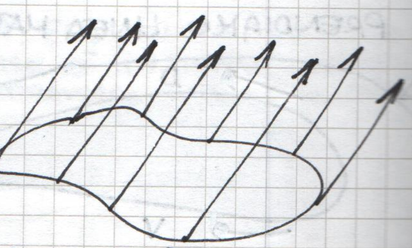
QUINDI Γ = COSTANTE

NELLA LETTERATURA POSSIAMO TROVARE ANCHE $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ MA IL SIGNIFICATO È LO STESSO

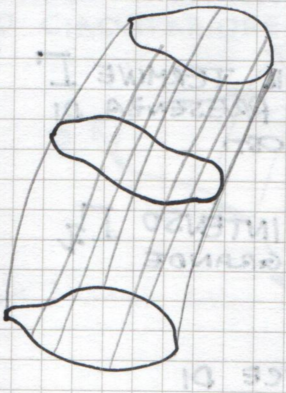
(KELVIN SI CHIAMAVA THOMSON, È LA STESSA PERSONA)

TEOREMI DI HELMOLTZ VENNERO PRODOTTI DOPO QUELLI DI KELVIN E RIGUARDANO I VORTICI.

KELVIN		HELMOLTZ
DA LINEA MATERIALE	$\rightarrow$	A VORTICI
DA LINEA	$\rightarrow$	A 3D



VORTICE È INSIEME DELLE LINE DI VORTICITÀ



1. TEOREMA DI HELMOLTZ: AFFERMA CHE Γ NON PUÒ VARIARE. IL VORTICE NON PUÒ FINIRE O INIZIARE MA SOLO CHIUDERSI IN SE STESSO ALTRIMENTI Γ NON È UGUALE. PUÒ PERÒ INIZIARE A FLUIRE (E FINIRE ANCHE) AI CONFINI DEL CAMPO.

NELLA REALTÀ UN VORTICE SI ROMPE PER LA VISCOSITÀ. ORA LA VISCOSITÀ NON LA CONSIDERIAMO. IL VORTICE PUÒ VARIARE NELLA FORMA.

2. TEOREMA DI HELMOLTZ: SE UNA PARTICELLA SI TROVA NEL VORTICE, NON PUÒ USCIRE DA QUESTO O UNA PARTICELLA CHE SI TROVA FUORI NON PUÒ ENTRARE PER DEFINIZIONE DI LINEA MATERIALE (NON POSSO AVERE PARTICELLE IN PIÙ O IN MENO).
SE PARTICELLA SCAPPASSE, LA VORTICITÀ VARIEREBBE MA CIÒ ANDREBBE CONTRO IL PRIMO TEOREMA DI HELMOLTZ POICHÈ: $\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dS$

3. TEOREMA DI HELMOLTZ: QUESTO TEOREMA METTE INSIEME T. KELVIN E HELMOLTZ
INTENSITÀ È COSTANTE NEL TEMPO CIOÈ:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \rightarrow \Gamma = \text{COSTANTE}$$

FORMALMENTE È SIMILE A QUELLO DI KELVIN MA KELVIN PARLA DI LINEA MATERIALE E NON DI VORTICITÀ.
CON QUESTI TEOREMI SI SPIEGANO I VORTICI DI AEROPORTO; VORTICI DI ESTREMITÀ O TORNADO.
PER PROGETTARE DEVO AVERE LA VORTICITÀ PUNTO PER PUNTO E ISTANTE PER ISTANTE.

$\vec{\omega}(x_i, t)$ MI SERVE QUINDI UNA TRATTAZIONE DIFFERENZIALE
LA FORMA INTEGRALE MI DA INFORMAZIONI GENERALI.
DALLE EQUAZIONI DI GOVERNO NELLE 6 VARIABILI (3 COMPONENTI DI VELOCITÀ, DENSITÀ, PRESSIONE, TEMPERATURA, LE RISOLVONO NUMERICAMENTE, MI CALCOLO VELOCITÀ E USO IL ROTORE.

È POSSIBILE SCRIVERE DIRETTAMENTE LA VORTICITÀ RISPETTO $\vec{u}$, QUINDI SCRIVO DIRETTAMENTE LE EQUAZIONI CON VORTICITÀ.

DEVO TROVARE EQUAZIONE DI TRASPORTO DELLA VORTICITÀ CHE MI SOSTITUISCA QUELLE DELLA VELOCITÀ.

$\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$ EQUAZIONE TIPO QUELLA DI NAVIER-STOKES

→ FARÒ QUINDI IL ROTORE X EQ. NAVIER-STOKES.

$$\vec{\nabla} \times (N.S.)$$

CONSIDERIAMO CAMPO CONSERVATIVO PER L'EQUAZIONE MASSA E UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE; NON PRENDO INSOMMA LE EQUAZIONI GENERALI MA ALTRE PIÙ SEMPLICI:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u}\right] = -\rho\vec{\nabla}G - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} \; (+\, 0)$$

$\vec{f}_c = -\vec{\nabla}G$

NON C'È IL TERMINE $\frac{\mu}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}$ MA ANCHE SE CI FOSSE SI ANNULLEREBBE. NON C'È POICHÈ STIAMO CONSIDERANDO UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE, PERTANTO ANNULLANDOLO LA DENSITÀ RIMANE COSTANTE

DEVO FARE IL ROTORE DI QUESTA EQUAZIONE:

I) SE HO $\vec{\nabla}\bullet$

IL ROTORE $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\bullet) = 0$ VALIDO PER QUALUNQUE GRANDEZZA

II) SE HO ∇^2

IL ROTORE $\vec{\nabla} \times (\nabla^2 \vec{\bullet}) = \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{\bullet})$

SOLO SE LA GRANDEZZA È UN VETTORE

QUINDI:

$$\vec{\nabla} \times \left[\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] = \vec{\nabla} \times \left[-\rho \vec{\nabla} G - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \right]$$

CONSIDERANDO ρ = COSTANTE (SE ρ NON FOSSE COSTANTE SAREBBE STATO TUTTO DIVERSO)

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) = \mu \nabla^2 \vec{\omega}}$$

LO SVILUPPO COME: $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$

FACENDO I CONTI $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})$, CON IPOTESI DI INCOMPRIMIBILITÀ, RIMANGONO 2 CONTRIBUTI:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} \right] = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

SPOSTATO AL SECONDO MEMBRO

DIVIDO TUTTO PER ρ:

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}}$$

EQUAZIONE DI TRASPORTO DELLA VORTICITÀ

IN CUI $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ~~VISCOSITÀ DINAMICA~~ CINEMATICA

IMPORTANTE!

PER FAR COMPARIRE $\frac{D}{Dt}$ NON HO PORTATO DENTRO IL ROTORE!

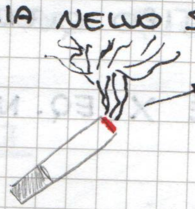
$$\vec{\nabla} \times \frac{D\vec{u}}{Dt} \neq \frac{D\vec{\omega}}{Dt}$$

PERCHÈ C'È TERMINE NON LINEARE $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ DA CUI INVECE ESCONO DUE TERMINI CON CUI TROVO $\frac{D\vec{\omega}}{Dt}$

INTERPRETIAMO FISICAMENTE: LA VORTICITÀ VARIA NELLO SPAZIO E NEL TEMPO A CAUSA DI DUE FATTORI:

1) EFFETTO DI DIFFUSIONE $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$

2) EFFETTO $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$

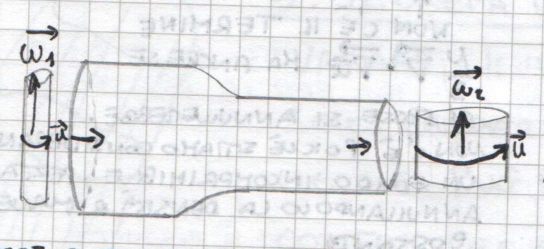


SI DIFFONDE
SE NON FOSSE VISCOSO IL VORTICE RIMARREBBE

$\boxed{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}}$ È IL VORTEX STRETCHING (STIRAMENTO DEL VORTICE)

FISICAMENTE INDICA IL FATTO CHE LA VORTICITÀ VARIA PERCHÈ C'È CAMPO DI ~~VORTICITÀ~~ VELOCITÀ NON UNIFORME (SE FOSSE COSTANTE IL GRADIENTE SAREBBE NULLO).

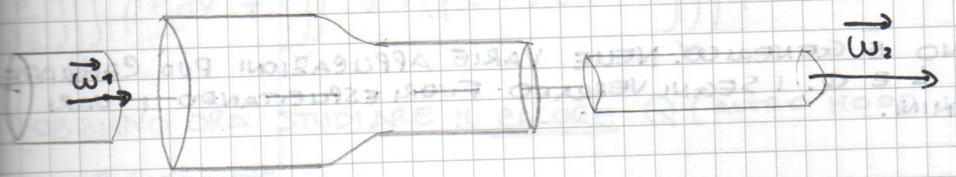
PRENDIAMO UN CONDOTTO CONVERGENTE:



ESISTE UN GRADIENTE DI VELOCITÀ
LA VORTICITÀ SARÀ DIVERSA IN INGRESSO ED USCITA

VORTICE CHE GIRA ENTRANDO VERTICALMENTE NEL CAMPO DI MOTO SARÀ SCHIACCIATO.
PER HELMOLTZ, ESSENDO FORMATO DALLE STESSE PARTICELLE, IN USCITÀ SARÀ DIVERSO
$\vec{\omega}$ SARÀ PIÙ PICCOLO IN USCITA CHE IN INGRESSO: $\vec{\omega_2} < \vec{\omega_1}$

SE AVESSI QUEST'ALTRA CONDIZIONE:



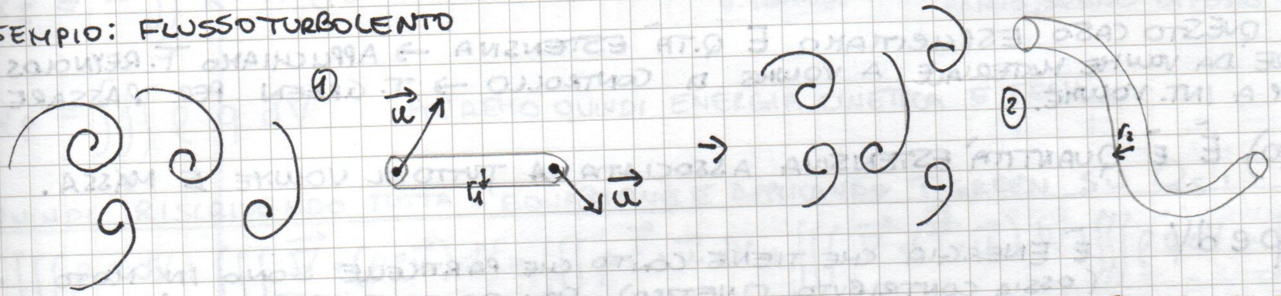
$\vec{\omega}_2 > \vec{\omega}_1$

LA VORTICITÀ VARIA NON SOLO PER EFFETTO VISCOSO E DI TRASPORTO MA ANCHE PER IL CONTRIBUTO DELLA VELOCITÀ.

VORTEX STRETCHING $\longrightarrow$ TURBOLENZA

SE IL CAMPO DI MOTO (QUINDI $\vec{u}$) È CAOTICO, L'AZIONE DELLA VELOCITÀ SPEZZA I VORTICI PIÙ GRANDI IN VORTICI SEMPRE PIÙ PICCOLI.

ESEMPIO: FLUSSO TURBOLENTO



QUINDI CONCENTRANDOCI SU SEZIONI DI INIZIO E FINE, PER IL CAMPO DI MOTO PUÒ VARIARE LA VORTICITÀ
IL VORTICE SI DEFORMA PER CUI LA PARTE FINALE SI ALLONTANA; È QUASI IMPOSSIBILE CHE TRASLI.

SE SI ALLUNGA AVREMO CHE: $\vec{\omega}_2 > \vec{\omega}_1$ E $r_2 < r_1$

È AVVENUTO TRASFERIMENTO DI ENERGIA.

CONCENTRANDOSI SEMPRE SUGLI ESTREMI, IL VORTICE VIENE DISSIPATO IN CALORE.

③ CASCATA DI ENERGIA: È LEGATA ALL'EFFETTO DEL VORTEX STRETCHING (KOLMOGOROV FORMALIZZÒ QUESTO MECCANISMO NEL 1941).

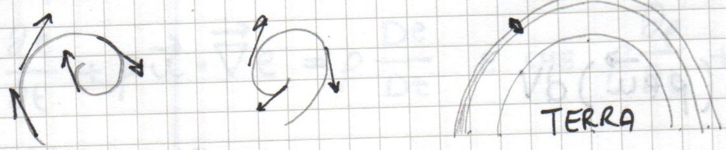
SE HO VORTICE GRANDE, A SECONDA DEI CASI ①, ② o ③ IL VORTICE DURA DI PIÙ O MENO (① DURA, ③ NO)

SE ELIMINO $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\vec{u}$ (VORTEX STRETCHING) HO DEI VORTICI DI SCALA GRANDE CHE VENGONO DISSIPATI IN UN TEMPO MOLTO PIÙ LUNGO.

SE RISCRIVIAMO EQUAZIONE IN 2D:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \underbrace{0}_{\text{SI ANNULLA}}$$

FAREMMO IL PRODOTTO TRA VELOCITÀ SUL PIANO E VORTICITÀ PERPENDICOLARE



RADIALMENTE LA DIMENSIONE DELLO STRATO << MERIDIANI E PARALLELI QUINDI CI TROVIAMO IN 2D

UN URAGANO SE TOCCA LA TERRA RISENTE DELL'EFFETTO 3D ATTIVANDO COSÌ IL MECCANISMO DEL VORTEX STRETCHING.

SU GIOVE IL VORTICE STA SEMPRE LÌ PERCHÉ I TEMPI CARATTERISTICI DI VITA SONO LUNGHI E NON C'È NULLA CHE LO PUÒ INTACCARE

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

SI PARTE DALLA I EQUAZIONE DELLA TERMODINAMICA

$$\frac{DE}{Dt} = \underbrace{L}_{\substack{\text{LAVORO}\\(\text{SU TEMPO})}} + \underbrace{Q}_{\substack{\text{CALORE}\\(\text{SU TEMPO})}}$$

POTENZE

IL SEGNO È GENERICO. NELLE VARIE APPLICAZIONI PUÒ CAMBIARE PER L E Q. I SEGNI VERRANO FUORI ESPLICITANDO I VARI TERMINI.

$L \to L_M \Rightarrow$ DI MASSA

$L \to L_S \Rightarrow$ DI SUPERFICIE

$Q \to$ PRODOTTO $\to$ ENTROPICO / ENTALPICO

$Q \to$ SCAMBIATO

ANCHE IN QUESTO CASO ESPLICITIAMO E Q.TÀ ESTENSIVA $\to$ APPLICHIAMO T. REYNOLDS PER PASSARE DA VOLUME MATERIALE A VOLUME DI CONTROLLO $\to$ T. GREEN PER PASSARE DA INT. SUP A INT. VOLUME.

I MEMBRO) E È QUANTITÀ ESTENSIVA ASSOCIATA A TUTTO IL VOLUME E MASSA.

$$E = \iiint_{V\,\text{MATERIALE}} \rho e \, dV$$

È ENERGIA CHE TIENE CONTO CHE PARTICELLE SONO IN MOTO (OSSIA CONTRIBUTO CINETICO), CON CERTA TEMPERATURA (MOTO VIBRATORIO MOLECOLARE).

$$e = \frac{1}{2}u_i^2 + U$$

U: ENERGIA INTERNA

IN CUI $\frac{1}{2}u_i^2 = \frac{1}{2}u_iu_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} u_i^2 = \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$

NON C'È LA MASSA m IN $\frac{1}{2}mu_i^2$ POICHÉ e È Q.TÀ INTENSIVA, È ENERGIA PER UNITÀ DI MASSA.

ENERGIA INTERNA

$$dU = c_v dT$$

c_v: CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE

MENTRE:

$dH = c_p dT$ È ENTALPIA MA TIENE CONTO SIA PRESSIONE CHE DI ENERGIA INTERNA PURAMENTE LEGATA ALLA TEMPERATURA.

$$\boxed{e = \frac{1}{2}u_i^2 + U}$$

ENERGIA TERMO-CINETICA $\to$ ENERGIA IN UNITÀ DI MASSA

$\frac{DE}{Dt}$ È EQUAZIONE SCALARE E SIAMO ANCORA IN OTTICA LAGRANGIANA QUINDI CON VOLUME MATERIALE

APPLICO IL TEOREMA DI REYNOLDS:

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q \to \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{V\,\text{CONTROLLO}} \rho e \, dV + \iint_S \rho e \, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS \xrightarrow{\text{T. GREEN}} \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho e \vec{u})\, dV =$$

$$\text{I MEMBRO} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e \, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u})\, dV$$

ANALIZZIAMO ORA IL SECONDO MEMBRO:

II MEMBRO) $\underbrace{L}_{\text{POTENZA}} = \underbrace{L_M}_{\text{DI MASSA}} + \underbrace{L_S}_{\text{DI SUPERFICIE}}$

POTENZA $= \vec{F}\cdot\vec{u}$

L NON È PROPRIO LAVORO MA POTENZA PER OMOGENEITÀ DELL'EQUAZIONE.

QUINDI:

$$= \iiint_{V\,\text{CONTROLLO}} \rho \vec{f}\cdot\vec{u}\, dV + \iint_{S\,\text{CONTROLLO}} (\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\cdot\vec{n}\, dS$$

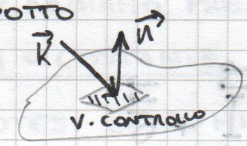
APPLICO ORA T. GREEN E PRENDENDO IL I MEMBRO:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e \, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho e \vec{u})\, dV = \iiint_V \rho \vec{F}\cdot\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\, dV + Q$$

DOBBIAMO ORA STUDIARE IL CALORE Q (ALTRO MODO IN CUI ENERGIA PUÒ VARIARE):

$$Q \begin{cases} \text{ENTRANTE} \\ \text{USCENTE} \end{cases} \rightarrow Q = \underset{\text{SCAMBIATO}}{Q_S} + \underset{\text{PRODOTTO}}{Q_P}$$

$$Q_S = -\iint_S \vec{K}\cdot\vec{n}\, dS$$



$\vec{K}$ POSITIVO SE ENTRANTE → MA LA NOSTRA NORMALE È USCENTE QUINDI $\vec{K}$ E $\vec{n}$ HANNO SEGNO OPPOSTO

$$Q_P = \iiint_V \rho q \, dV$$

AVREMO QUINDI ENERGIA CINETICA E TERMICA

QUINDI RISCRIVENDO TUTTA L'EQUAZIONE E APPLICANDO T. GREEN SU Q_S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u})\, dV = \iiint_V \rho\vec{F}\cdot\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\, dV + \iiint_V \rho q\, dV - \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{K}\, dV$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA
F. INTEGRALE

RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE IN FORMA DIFFERENZIALE ASSUMENDO ARBITRARIO IL V. CONTR.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u}) = \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{K} + \rho\vec{F}\cdot\vec{u} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA
F. DIFFERENZIALE

POSSO ANCORA SEMPLIFICARE PER FAR USCIRE LA DERIVATA MATERIALE:

VETTORE $\vec{K}$ HA 3 COMPONENTI (3 NUOVE INCOGNITE K_1, K_2, K_3). DEVO LEGARE $\vec{K}$ CON Q.TÀ CHE GIÀ HO, IN QUESTO CASO LA TEMPERATURA.

SVOLGO LE DERIVATE DEI PRODOTTI:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u}) = \dots \quad \text{OSSIA} \quad \rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u}) = \dots$$

METTO INSIEME $\rho\vec{u}$ E e PER $\vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{u})$ COSÌ DA SEMPLIFICARLO:

$$\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e + e\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \vec{\nabla}\cdot[\rho e\vec{u}]$$

QUINDI SAPENDO CHE:

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e = \rho\frac{De}{Dt} \quad \text{E CHE} \quad \rho\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}\cdot[\rho\vec{u}] = 0$$

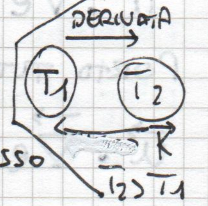
AVREMO CHE:

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \iiint_V \rho\vec{F}\cdot\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\, dV + \iiint_V \rho q\, dV - \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{K}\, dV}$$

EQ. BILANCIO ENERGIA CON SEMPL. I MEMBRO

ADESSO VEDIAMO IL II MEMBRO:

$\vec{K}$ VA LEGATO A Q.TÀ PRIMITIVO, IN QUESTO CASO LA TEMPERATURA T.



$$\boxed{\vec{K} = -\kappa\vec{\nabla}T}$$

IL MENO È DOVUTO AL FATTO CHE LA DIREZIONE DEL VETTORE FLUSSO È OPPOSTA A DIREZIONE GRAD. TEMP. FLUSSO. κ È CONDUCIBILITÀ TERMICA

LA DERIVATA È POSITIVA SE CRESCE

IL CALORE SCAMBIATO È OC GRADIENTE DI TEMPERATURA

QUINDI POSSIAMO SOSTITUIRE:

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{K} = +\kappa\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}T)$$

$$\frac{\nu}{\kappa} \uparrow \text{DIFFUSIVITÀ}$$

FACCIAMOLO CON GLI INDICI:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \kappa\nabla^2 T$$

$$\boxed{-\vec{\nabla}\cdot\vec{K} = \kappa\nabla^2 T}$$

ADESSO ANALIZZIAMO $\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\sigma}}$

ADESSO FACCIAMO TENSORE T PER $\vec{u}$ E POI DIVERGENZA:

$$\vec{\nabla}\cdot(-p\vec{\vec{I}}\cdot\vec{u} + \vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u}) \qquad \text{(F. VETTORIALE)}$$

($\vec{\vec{\sigma}}$ LO POSSIAMO ANCHE ESPLICITARE MA NON CI INTERESSA ORA):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(-p\delta_{ij}u_j + \sigma_{ij}u_j) = -p\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}u_j) = u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

INDICE RIPETUTO MI DA SOMMATORIA

INDICI DEVONO ESSERE UGUALI

$$-p(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) \qquad \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p$$

QUINDI METTENDO INSIEME LA SEMPLIFICAZIONE DEL II MEMBRO:

$$\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \rho\vec{F}\cdot\vec{u} - p(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u}) + \rho q + \kappa\nabla^2 T}$$

IN CUI ABBIAMO $\vec{\vec{\varepsilon}}$

ASSOMIGLIA A $\nu\nabla^2\vec{u}$ FA LO STESSO EFFETTO DELLA VISCOSITÀ

CASO IN CUI EQUAZIONE SI SEMPLIFICA:

EQUAZIONE DI BERNOULLI IN FORMA GENERALE

- FLUSSO INCOMPRIMIBILE: $\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ IN PART. $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$
- FLUIDO INVISCIDO $\nu = 0$ (EFFETTI VISCOSI TRASCURABILI) $\rightarrow \vec{\vec{\sigma}} = 0$
- $q = 0$ (NO PRODUZIONE DI CALORE)
- $k = 0$ (NO SCAMBIO DI CALORE) } FLUSSO = 0 NON LA CONDUCIBILITÀ CHE È UNA PROPRIETÀ
- FORZE DI MASSA CONSERVATIVE: $\rho\vec{F} = -\rho\vec{\nabla}G$
- FLUSSO STAZIONARIO: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

L'EQUAZIONE SI SEMPLIFICA NOTEVOLMENTE

$$\boxed{\underbrace{\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e}_{\text{RIMANE SOLO TERMINE CONVETTIVO}} = \underbrace{-\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}G}_{\text{HO INVERTITO MA È P. SCALARE NON CAMBIA}} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p}$$

DIVIDO TUTTO PER ρ:

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e = -\vec{u}\cdot\vec{\nabla}G - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$ È LECITO FARLO

PORTO TUTTO AL PRIMO MEMBRO:

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}G + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$$

ESPLICITO e:

$$\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}u_i^2+U+G+\frac{P}{\rho}\right)}_{H}=0$$

POSSO RISCRIVERLO IN UN MODO PIÙ COMPATTO:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}H=0}$$

T. BERNOULLI

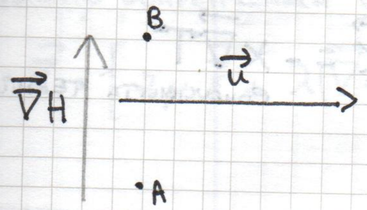
H È ENTALPIA TOTALE OSSIA ENERGIA CHE TIENE CONTO DI TUTTE LE ALTRE ENERGIE CHE ABBIAMO PRESO IN CONSIDERAZIONE.

$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}H=0$ SE $H=$ COSTANTE

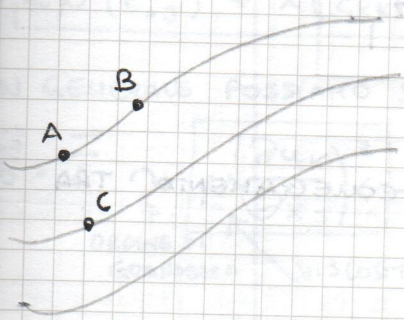
- VALIDO SOTTO UNA PRECISA SERIE DI IPOTESI LA SOMMA DI QUESTI TERMINI È COSTANTE.

RISPETTO AD IDRODINAMICO LA U NON COMPARIVA PERCHÈ NON ERANO TENUTI IN CONTO (ANCHE SE FLUSSO È INCOMPRIMIBILE).

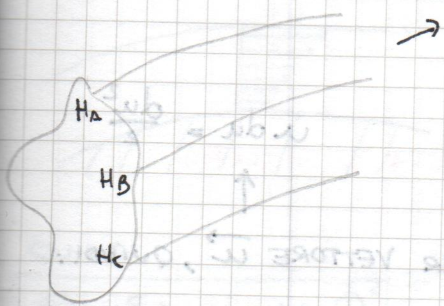
ALTRA SITUAZIONE IN CUI $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}H=0$ È QUANDO $\vec{u}\perp\vec{\nabla}H$:



$H_B\neq H_A$ PERCHÈ IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE AD $\vec{u}$.
L'IMPORTANTE È CHE H VARI CON GRADIENTE PERPENDICOLARE A VELOCITÀ.



$H_A=H_B$ ALTRIMENTI AVREMMO GRADIENTE PARALLELO AD $\vec{u}$
$H_A\neq H_C$ PERCHÈ $\vec{\nabla}$ PERP. $\perp$ AD $\vec{u}$
QUINDI H È COSTANTE LUNGO LE LINEE DI FLUSSO/CORRENTE.



($H=$ COSTANTE LUNGO LE LINEE)

CIÒ CHE SI CONSERVA È LA DISTRIBUZIONE SPAZIALE DI H.
OGNI LINEA HA LA SUA ENTALPIA LOCALE.
L'ENERGIA SI CONSERVA LUNGO LE LINEE.
È FLUSSO ISOENERGETICO, OSSIA LA Q.TÀ DI ENTALPIA NON VARIA LUNGO LE LINEE.

SE $H_A=H_B=H_C$ → FLUSSO OMOENERGETICO

ISO → COSTANZA SU LINEA DI FLUSSO

OMO → COSTANZA IN TUTTO IL FLUSSO

LEZIONE 12 MAGGIO

EQ. ENERGIA È L'ULTIMA EQUAZIONE DI GOVERNO.

$\frac{DE}{Dt} = L + Q$ EQUAZIONE SCALARE

IL PUNTO DI PARTENZA È SEMPRE PRINCIPIO PRIMO:

$$E = \iiint_{V_{MAT.}} \rho e \, dV = \frac{1}{2} u_i^2 + U \quad \text{I PRINCIPIO TERMODINAMICA}$$

IN CUI e È ENERGIA PER UNITÀ DI VOLUME

PER ARRIVARE A DEFINIRE L'EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA ABBIAMO APPLICATO IL TEOREMA DI REYNOLDS AL PRINCIPIO PRIMO, POI IL TEOREMA DI GREEN PER PASSARE DA INTEGRALI DI SUPERFICIE A INTEGRALI DI VOLUME ED INFINE, POSTA L'ARBITRARIETÀ AL VOLUME, TROVATA LA FORMA DIFFERENZIALE; ABBIAMO INOLTRE MANIPOLATO LA DERIVATA PER RISCRIVERE IL PRIMO MEMBRO CON $\rho DE/Dt$.

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{F} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\vec{T}} \cdot \vec{u}) + \underbrace{\rho q}_{\text{CALORE PRODOTTO}} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{K}}_{\text{CALORE SCAMBIATO}} \qquad \vec{K} = -\chi \vec{\nabla} T$$

CONDUCIBILITÀ TERMICA

AVREMO:

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p - p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{u}) + \rho q + \chi \nabla^2 T}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA

ADESSO SEMPLIFICHIAMO L'EQUAZIONE IN MODO DI AVERE UN COLLEGAMENTO TRA TERMINE CINETICO E TEMPERATURA.
VOGLIO SEMPLIFICARE LA PARTE DI U.

RICORDANDO CHE $e = U + \frac{1}{2} u_i^2$ E $dU = c_v \, dT$

CERCO EQUAZIONE PER ENERGIA CINETICA DEL TIPO:

$\frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt}$ DA SOTTRARRE A $\frac{DU}{Dt}$ $\qquad u \, du = \frac{du^2}{2}$

PERTANTO MOLTIPLICHERÒ L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES PER VETTORE $\vec{u}$, QUINDI:

$$\frac{D \frac{u_i^2}{2}}{Dt} = (N.S.) \cdot \vec{u} \qquad \text{EQ. SCALARE}$$

QUINDI: MOLTIPLICHIAMO SCALARMENTE PER $\vec{u}$ L'EQUAZIONE DI N.S.

$$\left[\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F} \underbrace{- \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{T}}} \right] \cdot \vec{u} = \rho \frac{D u_i^2/2}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}})$$

IL PRIMO MEMBRO SI DIMOSTRA CHE DIVENTA QUELLO CHE CERCHIAMO $\left(u \, du = \frac{du^2}{2} \right.$

ADESSO DEVO FARE L'EQUAZIONE $\rho \frac{De}{Dt} = \dots$ — L'EQUAZIONE $\rho \frac{D u_i^2/2}{Dt}$

POICHÈ $U = e - \frac{1}{2} u_i^2$

FACENDO I CALCOLI MI RIMANE:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + (\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) + \cancel{\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}})} - \cancel{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{\sigma}}} + \rho q + \chi \nabla^2 T$$

HO SVILUPPATO PRODOTTO TRA DERIVATE

SAPPIAMO INOLTRE CHE IL TERMINE:

$$\vec{\vec{\sigma}} \cdot (\vec{\nabla}\vec{u}) = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}}$$

MATRICE SIMMETRICA

SCOMPOSTO CI DA PARTE SIMMETRICA E ANTISIMMETRICA QUINDI PRENDO SOLO PARTE SIMMETRICA $\vec{\vec{\varepsilon}}$ POICHÈ $\vec{\vec{\Omega}}$ SI ANNULLA CON IL PRODOTTO SCALARE.

ADESSO SOSTITUIAMO AL POSTO DI $\frac{DU}{Dt} = c_V \frac{DT}{Dt}$ IN CUI ABBIAMO EFFETTUATO IL PASSAGGIO DA DERIVATA A DER. MATERIALE IN $dU = c_V\, dT$ E IN CUI ABBIAMO CONSIDERATO c_V COSTANTE

$$\rho c_V \frac{DT}{Dt} = -p\, \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} + \rho q + \chi \nabla^2 T$$

QUESTA EQUAZIONE STA A SIGNIFICARE: COME VARIA NELLO SPAZIO E NEL TEMPO LA TEMPERATURA VARIA PER PRESSIONE (CON $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \neq 0$) CIOÈ CASO <u>COMPRESSIBILE</u>, TERMINE DI SCAMBIO DI CALORE χ, CALORE PRODOTTO q ED INFINE $\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}}$ CIOÈ LA <u>VISCOSITÀ</u>.

POSSIAMO SEMPLIFICARLA ULTERIORMENTE:

$$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} = \left[2\mu \vec{\vec{\varepsilon}} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{\vec{I}} \right] \cdot \underset{\text{F. INDICIALE}}{\vec{\vec{\varepsilon}}} = 2\mu \underbrace{\varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ij}}_{\text{P. SCALARE}} + \lambda \varepsilon_{kk} \underbrace{\delta_{ij}\, \varepsilon_{ij}}_{\varepsilon_{kk}} \qquad \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

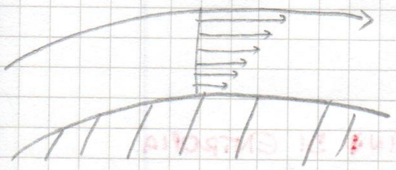
$$= \boxed{2\mu (\varepsilon_{ij})^2 + \lambda (\varepsilon_{kk})^2 = \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}} \qquad \text{IN CUI } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

IN GENERALE POSSIAMO SEMPLIFICARE QUESTA ESPRESSIONE:

$$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} \sim \boxed{\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)^2}$$

ORDINE DI GRANDEZZA — VISCOSITÀ — GRADIENTE DI VELOCITÀ $\leftrightarrow$ <u>IL PRODOTTO DEI TENSORI È LEGATO A VISCOSITÀ E VELOCITÀ</u>

IL CALORE CRESCE CON GRADIENTE DI VELOCITÀ. È TERMINE CHE MI CONSUMA ENERGIA CINETICA CONVERTENDOLA IN E. TERMICA.



VICINO AD UN CORPO C'È GRADIENTE DI VELOCITÀ. LA PRESENZA DEL GRADIENTE RENDE IMPORTANTE LA TEMPERATURA, CHE QUINDI NON VA TRASCURATA.

PORTARSI DIETRO TUTTI QUESTI TERMINI NON È BUONO

QUINDI:

$$\boxed{\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \mu \phi^2}$$

LO RISCRIVIAMO COSÌ; NON CI IMPORTA DI ϕ, CI DEVE SOLO FAR RICORDARE CHE C'È LA VELOCITÀ AD INFLUENZARE IL FENOMENO.

QUINDI: EQ. EN. IN TERMINI EN. INTERNA

$$\boxed{\rho c_V \frac{DT}{Dt} = -p\, \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu \phi^2 + \rho q + \chi \nabla^2 T} \qquad \text{I} \qquad (\underline{\text{ENERGIA INTERNA}})$$

<u>EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA TRAMITE ENTALPIA</u>

IN TERMODINAMICA ABBIAMO ANCHE ENTALPIA h (PARENTE DELL'ENERGIA INTERNA MA TIENE CONTO ANCHE DELLA PRESSIONE)

$$h = U + \underset{\uparrow \text{V. SPECIFICO}}{\overset{\text{PRESSIONE} \downarrow}{p\, v}} = U + \frac{p}{\rho} \qquad \text{E} \qquad dH = c_p\, dT$$

DOBBIAMO TROVARE UN'EQUAZIONE DI BILANCIO TRAMITE ENTALPIA:

$U = h - \frac{P}{\rho}$ E DERIVO: $\left(\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt} \right.$ LI TRATTIAMO ALLO STESSO MODO$\left. \right)$:

$$dU = dh - d\left(\frac{P}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho}dP + \frac{P}{\rho^2}d\rho$$

IN CUI $d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$

IL DIFFERENZIALE DIVENTA DERIVATA MATERIALE:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} + \frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{DU}{Dt}$$

QUINDI:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} + \frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$

$$\frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + P\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \rightarrow P\left(\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho = 0$$

EQ. CONSERVAZIONE DELLA MASSA

QUINDI I DUE TERMINI SI ELIDONO:

$$\boxed{\rho C_p\frac{DT}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T} \quad \mathrm{II}$$

EQ. EN. IN TERMINI ENTALPIA

EQUAZIONE ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI TEMPERATURA RICAVATA DALL'ENTALPIA E FORMA CHE SI USA PIÙ FREQUENTEMENTE

LA PRESSIONE VARIA NELLO SPAZIO $\left(\frac{DP}{Dt}\right)$, C'È DISSIPAZIONE DI CALORE $\mu\phi^2$, PRODUZIONE DI CALORE ρq E SCAMBIO CALORE $k\nabla^2 T$.

ORA RICAVIAMO EQUAZIONE ANALOGA IN TERMINI DI ENTROPIA (II PRINCIPIO TERMODINAMICA)

$$dS = \frac{dQ}{T}$$ MISURA IL GRADO DI DISORDINE DEL SISTEMA

$$\boxed{\rho T\frac{DS}{Dt} = \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T} \quad \mathrm{III}$$

EQ. EN. IN TERMINI DI ENTROPIA ← CAPITA ALL'ORALE

EQUAZIONE DI BILANCIO ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI ENTROPIA

L'UNICA DIFFERENZA È CHE LA PRESSIONE NON FA VARIARE L'ENTROPIA

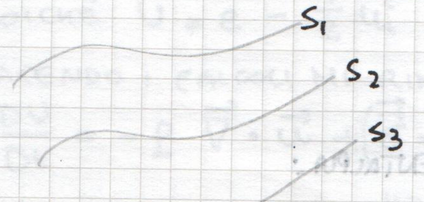
DIVIDENDO TUTTO PER ρT (POICHÉ SONO VARIABILI SEMPRE POSITIVE) OTTENGO IN PARTICOLARI CONDIZIONI (CIOÈ SOTTO ALCUNE IPOTESI, ES. SCAMBIO DI CALORE NULLO, VISCOSITÀ TRASCURABILE, ...)

$$\boxed{\frac{DS}{Dt} = 0}$$

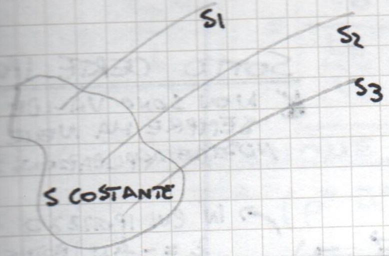
CON IPOTESI DI STAZIONARIETÀ INOLTRE:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}S = 0 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\nabla}S = 0$$

FLUSSO ISENTROPICO → ENTROPIA È COSTANTE LUNGO LINEE DI FLUSSO QUINDI SI CONSERVA



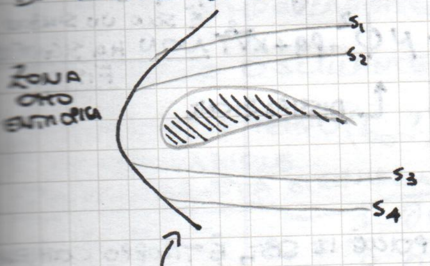
POSSIAMO ANCHE AVERE IL CASO DI FLUSSO OMOENTROPICO
LUNGO TUTTE LE LINEE (SI MANTIENE COSTANTE ED UGUALE IN OGNI PUNTO).



$S_1 = S_2 = S_3$

TEOREMA DI CROCCO (ERA UN ITALIANO)

CROCCO DIMOSTRÒ CHE SOTTO CERTE CONDIZIONI (ALCUNE IPOTESI DI SOPRA) SE ABBIAMO DIFFERENZA DI ENTROPIA TRA LINEE ALLORA ABBIAMO VORTICITÀ.



→ ANCHE SE PARTIAMO DA FLUSSO OMOENTROPICO, LE LINEE DI CORRENTE AVRANNO DIFFERENTI ENTROPIE DA CUI CROCCO DIMOSTRÒ CHE ESISTE VORTICITÀ

$$\vec{\nabla} S \rightarrow \vec{\omega}$$

ONDA D'URTO DOVUTA A VARIAZIONE IMPROVVISA DI PRESSIONE ED ENTROPIA

SE FACCIAMO L'INTEGRALE DI TUTTA L'EQUAZIONE III DELL'ENERGIA (CON ENTROPIA) CONSIDERANDO ρg POSITIVO, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE

$$\boxed{\iiint_V T \frac{DS}{Dt} dV \geq 0}$$

LA VARIAZIONE DI ENTROPIA PUÒ ESSERE SOLO POSITIVA O RIMANE COSTANTE

ABBIAMO DIVISO TUTTO PER ρ

CLASIUS - DUHEN

LEZIONE FLUIDODINAMICA 13/5/16

ABBIAMO RAGGIUNTO UN SISTEMA COMPLETO DI EQUAZIONI

VARIABILI IN GIOCO: $\vec{u}$ (u_i), T, p, ρ

EQ. CONSERVAZIONE MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{(I FORMA)}$$

EQ. NAVIER-STOKES

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

ESTENDILA

IN CUI IPOTIZZO $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ IPOTESI DI STOKES

EQ. ENERGIA (IN TERMINI DI ENTALPIA)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \rho c_p \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T$$

DISSIPAZIONE

$\mu \phi^2 = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}$ PER

È SOLO UN SIMBOLO NON HA SIGNIFICATO FISICO

EQ. DI STATO

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

SOTTO CERTE IPOTESI

NON SONO VALIDE SEMPRE MA NELLE NOSTRE APPLICAZIONI SI.

NELLA REALTÀ QUESTE EQUAZIONI SONO MOLTO DIFFICILI DA RISOLVERE POICHÉ IL SIST. È TROPPO COMPLESSO

POSSO ELIMINARE IL CONTRIBUTO VISCOSO PER CERTE APPLICAZIONI. ($\mu \nabla^2 \vec{u}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$) IN NAVIER

OPPURE POSSO CONSIDERARE $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$

SCRIVERE LE EQUAZIONI IN FORMA ADIMENSIONALE

TEOREMA DI BUCKINGHAM

ADIMENSIONALIZZAZIONE → VARIABILI INDIPENDENTI E DIPENDENTI

DEVO FARE IN MODO CHE TUTTE Q.TÀ IN GIOCO ABBIANO LO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA (CI SONO MELE, PERE, ECC MA LI VOGLIO SEPARARE DALLA LORO NATURA COSÌ DA CONFRONTARLI)

$$\boxed{\underbrace{u_i, T, p, \rho}_{\text{DIPENDENTI}}, \underbrace{x_i, t}_{\text{INDIP.}}}$$

EQUAZIONI DIMENSIONALI

SET DI VARIABILI ADIMENSIONALI

$$\boxed{u_i^*, T^*, p^*, \rho^*, x_i^*, t^*}$$

EQUAZIONI ADIMENSIONALI

L'OBIETTIVO DELLA ADIM. È FARE CONFRONTI TRA TERMINI DI NATURA DIVERSA IN MODO TALE DA TRASCURARE I TERMINI PIÙ PICCOLI.

$$\boxed{A^*_{ADIM} = \frac{A^{DIM}}{A_0^{DIM}_{RIF}}} \; *$$

$A = A^* A_0$

DEVO SCEGLIERE LA GRANDEZZA DI RIFERIMENTO^{DIM} PER OTTENERE LA GRANDEZZA ADIMENSIONALE A^*

LA CONDIZIONE NECESSARIA È A/A_0 DEVE ESSERE Q.TÀ DELL'ORDINE DI 1 OSSIA 1 ORDINE DI GRANDEZZA PER SCEGLIERE Q.TÀ DI RIFERIMENTO. ↳ DA $O(1)$ A $O(9)$

ES. EQ. MASSA IN F. ADIMENSIONALE

FORMA DIMENSIONALE EQ. MASSA:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0} \quad \text{I FORMA}$$

SOSTITUIAMO $A^* = A/A_0$ NELLE VARIE GRANDEZZE:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho^* \rho_0)}{\partial(t^* t_0)} + \frac{1}{L_0} \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \rho_0 \vec{u}^* u_0) = 0}$$

$* \rightarrow$ ORDINE DI 1 (L'HO DECISO IO)

(DA WIKIPEDIA)
* PER ORDINE DI GRANDEZZA È LA CLASSE DI SCALA O GRANDEZZA DI UNA QUANTITÀ.

DA CUI:

$$\boxed{\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \vec{\nabla}^* (\rho^* \vec{u}^*) = 0}$$

COSTANTI DIMENSIONALI (NON SO QUAL'È L'ORDINE)

ADESSO DIVIDO PER $\frac{\rho_0 u_0}{L_0}$ E OTTENGO COSÌ

$$\frac{L_0}{t_0 u_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*)}_{O(1)} = 0$$

IL SECONDO TERMINE SICURAMENTE DELL'ORDINE DI 1; NON HO Q.TÀ CHE LO MOLTIPLICANO. A SECONDA DELL'ORDINE DI CIÒ CHE RIMANE CAPISCO SE È TRASCURABILE O SE MOLTO RILEVANTE.

DEFINIAMO NUMERO DI STROUHAL:

$$\boxed{St = \frac{t_0 u_0}{L_0}} = \boxed{\frac{t_0}{\frac{L_0}{U_0}}}$$

SOLUZIONE ASINTOTICA

- $St \to \infty \to$ FLUSSI STAZIONARI
  IL TERMINE DERIVATA NEL TEMPO SPARISCE

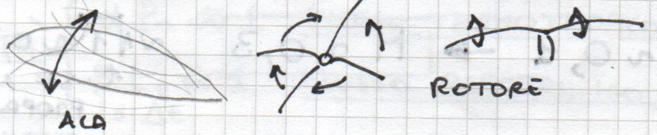
DA CUI L'EQUAZIONE DELLA MASSA DI PRIMA DIVENTA:

$$\boxed{\frac{1}{St}\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0}$$ FORMA ADIMENSIONALE (1)

EQ. MASSA + NUMERO DI STROUHAL (St) = F. ADIM

A PRIORI NON ESISTONO FLUSSI STAZIONARI: SI DEVONO SCEGLIERE GR. DI RIFERIMENTO E CALCOLARE STROUHAL. A SECONDA DEL VALORE CAPISCO SE È STAZIONARIO O MENO.
ES. t_0 È TEMPO CARATTERISTICO FENOMENO

UN PROFILO OSCILLANTE



$\frac{L_0}{V_0}$ (2) È TEMPO CHE PERCORRE PARTICELLA A U_0 IN L_0 SPAZIO

(1) PRENDEREI IL TEMPO (t_0?) DI OSCILLAZIONE

STAZIONARIETÀ SIGNIFICA CHE I DUE TEMPI DEBBANO ESSERE UGUALI IN ORDINE DI GRANDEZZA

$\rho(P, T)$ $\quad \alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$ E $\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}$

FENOMENO CON TEMPI CARATTERISTICI PIÙ LENTI DI QUELLI DEL FLUIDO

EQ. MASSA DIMENSIONALE: $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (II FORMA DIFF.) (2)

SE ABBIAMO DIPENDENZA DA P E T ALLORA: ESPRIMO $D\rho/Dt$ COME DER. COMPOSTA

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial P}\cdot\frac{DP}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T}\cdot\frac{DT}{Dt}$$ MA DIVENTA: $$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \alpha\rho\frac{DP}{Dt} + (-\beta\rho)\frac{DT}{Dt}}$$

RICORDANDO CHE $\boxed{d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P}dP + \frac{\partial \rho}{\partial T}dT}$

QUINDI RISCRIVENDO L'EQUAZIONE OTTENIAMO (SOSTITUENDO $\frac{D\rho}{Dt}$ IN (2)

$$\boxed{\alpha\rho\frac{DP}{Dt} - \beta\rho\frac{DT}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0}$$

ABBIAMO 2 NUOVI GRUPPI ADIMENSIONALI
PER ARRIVARE A P_0 E Δt MA SVILUPPATA L'EQ. (DISPENSE)

MODO OGGETTIVO PER DEFINIRE I FLUSSI

$\alpha P_0 \to \frac{1}{P}\cdot P_0 = o(1)$ $\quad \to$ SE $\alpha P_0 \ll 1 \to \rho(T)$ FLUSSO TERMOTROPICO (1)

2 GRUPPI ADIMENSIONALI

$\beta \Delta t \to \frac{1}{T}\cdot T = o(1)$ $\quad \to$ SE $\beta\Delta t \ll 1 \to \rho(P)$ FLUSSO BAROTROPICO (2)

SI SCRIVE COSÌ E NON t_0 PER CONVENZIONE

NON MI INTERESSA QUANTO VALGONO RISPETTIVAMENTE α, P_0, β O Δt: È IL PRODOTTO CHE CONTA.

NUMERO DI MACH

SERVE A CAPIRE SE (FLUSSO COMPRIMIBILE O INCOMPRIMIBILE)

C_0 = VELOCITÀ DEL SUONO $\to$ VELOCITÀ CON CUI SI PROPAGANO PERTURBAZIONI
$\to$ NEL CASO DEGLI URTI LA VARIAZIONE DELL'ENTROPIA VARIA

$$C_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$$ ENTROPIA COSTANTE ISOENTROPICA

ARIA = 340 m/s
ACQUA = 1500 m/s

$C_0^2 = \gamma R T \to C_0 = \sqrt{\gamma R T}$

È IN UN CERTO SENSO L'INVERSO DELLA SENSIBILITÀ DELLA ρ SU P: L'INVERSO È QUINDI L'OPPOSTO

$$\boxed{M = \frac{u_0}{C_0}}$$ VELOCITÀ DEL FLUSSO / VELOCITÀ DEL SUONO

U_0 = VELOCITÀ DEL CAMPO/FLUSSO

$R = 287 \frac{J}{Kg\,K}$ PER ARIA

$$\alpha_0 p_0 = \frac{1}{\rho_0}\, p_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) = \frac{p_0}{\rho_0}\cdot\frac{1}{C_0^2}\cdot\frac{u_0^2}{u_0^2} = \left(\frac{u_0^2}{C_0^2}\right)\left(\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}\right) = M^2 Ru^{-1}$$

"$\partial\rho/\partial p = 1/C_0^2$"

$= M^2$; TUTTE E DUE Q.TÀ ADIMENSIONALI, IL SECONDO È RAPP. DA p_0 DI RIF. E PRESSIONE DINAMICA

$$\boxed{Ru = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0}} \quad \begin{matrix}\text{P. DIN.}\\ \text{P. RIF.}\end{matrix} \qquad \boxed{\alpha_0 p_0 = M^2 Ru^{-1}}$$

NELLE NOSTRE APPLICAZIONI FLUIDODINAMICHE CONSIDERIAMO P. DIN = P. DI RIF.

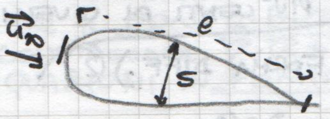
$\boxed{Ru = 1} \rightarrow M^2 = \alpha p_0$

<u>INCOMPRESSIBILITÀ</u> $\begin{cases}\alpha p_0 \ll 1\\ \beta\Delta t \ll 1\end{cases}$ OPPURE $\begin{cases}M^2 \ll 1\\ \beta\Delta T \ll 1\end{cases}$

$M^2 \ll 1 \rightarrow M^2 \sim 1 \rightarrow \boxed{M \sim 0,3}$ $\quad \sim\sqrt{1} \sim 0,3$ SE NON È PROPRIO 1

<u>CONTINUO</u> (PARTE MANCANTE CHE HA FATTO PRIMA DI EQ. MASSA ADIM)

HO STRUTTURA ALARE CON FLUSSO AD UNA VELOCITÀ CHE CHIAMO $\vec{u}_\infty$ DI MODULO $|\vec{u}_\infty| = u_\infty$



PER ADIMENSIONALIZZARE LO SPAZIO $\vec{x}$ CHE COSA SCELGO? UNA LUNGHEZZA:

$x_i^* = \dfrac{x_i}{L_0}$ COME SCELGO L_0? SE NON DO INFORMAZIONI, PRENDO L_0 MOLTO GRANDE QUINDI x_i^* È PICCOLO (ES. L_0 = DISTANZA TRA LUNA E TERRA) MA NON HA SENSO. SE SCEGLIESSI UN NUMERO PICCOLO OTTERREI x_i^* TROPPO GRANDE. SCEGLIAMO UNA LUNGHEZZA CARATTERISTICA DEL PROFILO ALARE, ES. LA CORDA. STESSO VARREBBE PER UN TUBO IN CUI SCELGO IL DIAMETRO DEL TUBO.

NON CONSIDERO PRODUZIONE DI CALORE POICHÉ È COMPLICATO ESPRIMERE ρq CON GR. DI RIFERIMENTO.

DEVO SOSTITUIRE QUINDI: ES. CASO STRATO LIMITE

$u_i \rightarrow u_i^*$
$x_i \rightarrow x_i^*$
$t \rightarrow t^*$

DA CUI $\rho = \rho_0 \rho^*$ E $p = p_0 p^*$

$u_i = u_i^* u_0 \rightarrow u_i^* = \dfrac{u_i}{u_0}$ → STO ASSUMENDO CHE TUTTE E TRE LE COMPONENTI HANNO ORDINE 1 — NON È SEMPRE VALIDO

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \frac{u_1}{u_0}\\ u_2^* &= \frac{u_2}{u_0}\\ u_3^* &= \frac{u_3}{u_0}\end{aligned}\right\} = \frac{u_i}{u_0}$$

STESSO RAGIONAMENTO PER $x_i = x_i^* L_0$ ASSUMENDO $x_i^* = \dfrac{x_i}{L_0}$ UGUALE A SOPRA

<u>NOTA 1</u>: $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$

QUANDO ADIMENSIONALIZZO x: $\rightarrow \dfrac{1}{L_0}\underbrace{\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1^*}, \dfrac{\partial}{\partial x_2^*}, \dfrac{\partial}{\partial x_3^*}\right)}_{\nabla^*} = \dfrac{1}{L_0}\nabla^*$

VETTORE CON DERIVATE ADIM.

<u>NOTA 2</u>: $t = t^* t_0 \rightarrow \dfrac{d}{dt}$

→ TUTTE LE <u>GR. DI RIFERIMENTO</u> SONO COSTANTI E NON VARIABILI, RESTANO NEL LORO ORDINE DI GRANDEZZA. <u>LE VARIABILI DIVENTANO</u> QUELLE CON L'ASTERISCO.

$\vec{u}^*, \rho^*, x_i^*, t^*$ $O(1)$

$\vec{u} = u_0 \vec{u}^*$

$\rho = \rho_0 \rho^*$

2) SOSTITUZIONE
3) DIVIDIAMO PER ALCUNE COSTANTI COSÌ DA AVERE UN TERMINE SENZA COEFF. DI ORDINE DI 1
4) CONFRONTO IL RIMANENTE PER CAPIRE LA RILEVANZA

EQ. CONSERV. MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0 \rightarrow \frac{\rho_0}{t_0}\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0}\vec{\nabla}^*(\rho^* \vec{u}^*) = 0$$

COSA SUCCEDE QUANDO GRUPPO ASINTOTICO $\rightarrow 0/\infty$? CIOÈ QUANDO VARIA?

SOLUZIONI ASINTOTICHE

$$\boxed{\frac{1}{St}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})}_{O(1)} = 0}$$

È SEMPRE IMPORTANTE SCEGLIERE GR. DI RIFERIMENTO IN MODO CORRETTO. SONO COSTANTI, NON SONO VARIABILI

$St \rightarrow \infty$ STAZIONARIO

↳ HO TOLTO ASTERISCHI MA SONO TUTTE GR. ADIMENSIONALI

A PRIORI NON ESISTONO FL. STAZIONARI. DEVO STUDIARE St.

$\rho(P,T) \rightarrow$ INCOMPRIMIBILITÀ $\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 & \text{FLUSSO TERMOTROPICO} \\ \beta t_0 \ll 1 & \text{FLUSSO BAROTROPICO} \end{cases}$ $\circ\ \Delta t$

$\rightarrow \infty$ VA INTESO IN SENSO INGEGNERISTICO: QUANDO St È GIÀ DI UN ORDINE DI GR. SUPERIORE, SIGNIFICA CHE È FL. STAZIONARIO

SONO ALTRE SOLUZIONI ASINTOTICHE

$Ru = 1$

POICHÉ SCELGO P_0 = P. DINAMICA

$$M = \frac{u_0}{c_0} = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma RT}}$$

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 \\ \beta t_0 \ll 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M^2 \ll 1 \\ \beta t_0 \ll 1 \end{cases} \longrightarrow M \sim 0,3$$ POICHÉ $M^2 \sim 1 \rightarrow \sqrt{0,1} \sim 0,3$

AL DI LÀ DELLA COMPRIMIBILITÀ, PER $M > 0,3$ SI POSSONO VERIFICARE SITUAZIONI SPECIFICHE:

1) FLUSSI SUBSONICI $M \leq 0,8$

$0,3 < M < 0,8$

URTO: $M > 1$) $M < 1$

$M\ 0,9 \rightarrow$ ... $M\ 0,9$

SIGNIFICA CHE SE HO FENOMENO FISICO A $M = 0,6$ È LO STESSO DI $M = 0,3$ O $M = 0,8$. QUINDI A LIVELLO SPERIMENTALE È MEGLIO.

2) FLUSSI TRANSONICI

$0,8 < M < 1,2$

PICCOLA VARIAZIONE DI MACH FA VARIARE L'ESPERIMENTO. QUINDI IL M VA PRESO UGUALE

3) FLUSSI SUPERSONICI

$M > 1,2$ E $1,2 \leq M \leq 4-5$

COME PRIMA, LA SITUAZIONE FISICA È STABILE QUINDI POSSO USARE M MINORI.

SE $M > 5 \rightarrow$ PLASMA (FLUIDO IONIZZATO)

ESISTE PERÒ UN LIMITE SUPERIORE DI 4,5 ABBIAMO FLUSSI IONIZZAZIONE DEL FLUIDO $\rightarrow$ ATOMI NEUTRI DIVENTANO IONI E ABBIAMO

4) FLUSSI IPERSONICI

BOLLA SUPERSONICA È FENOMENO CHE PORTA IL MACH A VALORE MAGGIORE MA TRAMITE URTO RITORNA AL MACH PRECEDENTE. L'URTO PUÒ ESSERE DELETERIO PER GLI AEREI.

$M\ 0,9 \rightarrow$ $\rightarrow M = 1$) $M < 1$ $M = 0,9 \rightarrow$

QUANDO IL MACH È ELEVATO VA TENUTO CONTO DEL NUMERO DI REYNOLDS:

$$Re = \frac{u_0 \rho_0 L_0}{\mu}$$

FLUSSO SONICO

$M = 1$

BOEING E AIRBUS STUDIARONO STRUTTURE CHE HANNO PERMESSO DI EVITARE LA FORMAZIONE DELL'URTO.

QUANDO IL MACH È GRANDE IN GENERE Re È GRANDE:

NON È SEMPRE VERO

- UNMANNED AIR VEICLE (UAV) $\rightarrow$ VELOCITÀ BASSA QUOTA BASSA
- UNMANNED SPACE VEICLE (USV) $\rightarrow$ VELOCITÀ BASSA QUOTA ALTA

$\rightarrow$ $\boxed{\text{MACH ELEVATO MA } Re \text{ PICCOLO}}$

EQ. Q.TÀ DI MOTO ADIMENSIONALIZZATA

PRENDO EQ. NAVIER-STOKES E ESPANDO MA INSERISCO ANCHE FORZA DI MASSA AL POSTO DI $\vec{f}$:

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P + \mu\nabla^2\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$$ IN CUI $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

EFFETTUO LA SOSTITUZIONE DELLE Q.TÀ DIM $\rightarrow$ Q.TÀ ADIM. CON COEFF.

$$\frac{\rho_0 u_0}{t_0}\rho^*\frac{d\vec{u}^*}{dt^*} + \rho_0\frac{u_0^2}{L_0}\rho^*\vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}^*\vec{u}^* = -\frac{P_0}{L_0}\vec{\nabla}^*P^* + \mu\frac{u_0}{L_0^2}\nabla^{2*}\vec{u}^* + \frac{\mu}{3}\frac{u_0}{L_0^2}\vec{\nabla}^*(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{u}^*) +$$

$$+\rho_0\left(\frac{\vec{g}}{g}\right)_{=g^*} g\, \rho^* \quad \text{IN CUI } g=|\vec{g}| \;\text{ e }\; \vec{g}=g\vec{g}^* \;,\; \vec{g}^*=\frac{\vec{g}}{g}$$

ADIMENSIONALIZZARE $g \rightarrow$ MOLTIPLICO E DIVIDO PER IL MODULO DEL VETTORE FACENDO APPARIRE $\vec{g}/g$ = VERSORE DI $g = g^*$

$$\rho_0\left(\frac{\vec{g}}{g}\right) g\rho^* = \frac{\vec{g}^* L_0\rho_0}{u_0^2\rho_0}\rho^*$$ IN CUI HO MOLTIPLICATO PER $\frac{L_0}{u_0^2\rho_0}$ (O DIVISO PER $\frac{u_0^2\rho_0}{L_0}$ PER SEMPL. TERMINE COMPLESSO)

MOLTIPLICHIAMO PER $\frac{L_0}{u_0^2\rho_0}$ COSÌ DA CONFRONTARE LE FORZE CON FORZA DI INERZIA

$\rightarrow$ DOVREI DIVIDERE PER $\frac{u_0^2\rho_0}{L_0}$

QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\underbrace{\frac{\rho_0 u_0}{t_0}\cdot\frac{L_0}{\rho_0 u_0^2}}_{\frac{1}{St}}\cdot\rho^*\frac{d\vec{u}^*}{dt^*} + \cancel{\frac{L_0}{u_0^2\rho_0}}\cdot\cancel{\rho_0\frac{u_0^2}{L_0}}\rho^* u^*\cdot\vec{\nabla}^*\vec{u}^* = -\underbrace{\frac{P_0}{L_0}\cdot\frac{L_0}{\rho_0 u_0^2}}_{\frac{1}{Ru}}\vec{\nabla}^* P^* + \underbrace{\mu\frac{u_0}{L_0^2}\frac{L_0}{u_0^2\rho_0}}_{=\frac{1}{Re}}\nabla^{*2}\vec{u}^*$$

$$+\underbrace{\frac{\mu}{3}\frac{u_0}{L_0^2}\cdot\frac{L_0}{u_0^2\rho_0}}_{=\frac{1}{3Re}}\vec{\nabla}^*(\vec{\nabla}^*\cdot\vec{u}^*) + \frac{L_0\rho_0}{u_0^2\rho_0}g^*\rho^* = \frac{L_0}{u_0^2}\rho^* g g^* \rightarrow \frac{1}{Fr}\rho^* g^*$$

NUMERO DI CAVITAZIONE

Fr = NUMERO DI FROUDE

SOL. ASINTOTICA: $Fr \rightarrow \infty$
F. DI MASSA SOLO TRASCURABILI

QUINDI TOGLIENDO GLI ASTERISCHI, L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\boxed{\frac{1}{St}\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{Ru}\cdot\vec{\nabla}P + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{3Re}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \frac{1}{Fr}\rho\frac{\vec{g}}{g}}$$

EQUAZIONE Q.TÀ DI MOTO ADIMENSIONALIZZATA

QUANDO $Re \rightarrow \infty$ POSSO TRASCURARE FENOMENI VISCOSI $\rightarrow$ EQ. EULERO (FL. EULERIANI)
QUANDO $Re \rightarrow 0$ HO FLUSSI STOKESIANI CON FENOMENI VISCOSI RILEVANTI

EQUAZIONE BILANCIO DI ENERGIA IN FORMA ADIMENSIONALE (IN TERMINI DI ENTALPIA)

EQ. IN TERMINI ENTALPICI E NON CONSIDERO ρq, CIOÈ PONGO $\rho q = 0$ (NO PROD. CALORE) POICHÉ COMPLICHEREBBE L'EQUAZIONE:

$$\boxed{\underbrace{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p\vec{u}\cdot\underset{①}{\vec{\nabla}T}}_{\rho c_p\frac{DT}{Dt}} = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u}\cdot\underset{②}{\vec{\nabla}P}}_{\frac{DP}{Dt}} + \mu\phi^2 + k\nabla^2 T + \underset{\rho q}{0}}$$

VA RISCRITTO ESTESO PER FARE LA ADIM. $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$

1) SOSTITUISCO
2) DIVIDO PER UN DATO TERMINE. HO DUE TERMINI NON-LINEARI ① E ② MA DIVIDO PER IL COEFF. LEGATO ALLA TEMP. E NON ALLA PRESSIONE.

COSÌ FACENDO TROVO NUOVO GRUPPO ADIMENSIONALE:

$$\underset{\text{NUMERO ECKERT}}{Ec} = \boxed{\frac{u_0^2}{c_p T_0}} = \boxed{\frac{u_0^2}{\gamma R T_0}(\gamma-1)} = \boxed{M^2(\gamma-1)}$$

(EN. CINETICA / EN. TERMICA) HO DIVISO TUTTO PER $\rho_0\frac{c_p u_0 T_0}{L_0}$

IN CUI c_p L'HO ESPRESSO IN MODO DIVERSO IN FUNZ. DI R.

OTTENGO QUINDI:

$$\boxed{\frac{1}{St}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = \frac{Ec}{Ru\,St}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}P + \frac{Ec}{Re}\phi^2 + \frac{1}{Re\,Pr}\nabla^2 T}$$

EQ. BILANCIO ENERGIA ADIMENSIONALIZZATA IN TERMINI ENTALPICI

$P \rightarrow Ru$

DER TEMPO $\rightarrow St$

$C_p T_0 \rightarrow Ec$

$K \rightarrow Pr$

SPESSO SI FA   MOLTIPLICO E DIVIDO PER $\rho \rightarrow k$ CONDUCIBILITÀ   VISCOSITÀ CINEMATICA

$$= \frac{K}{\rho C_p} \quad \text{E} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

DIFFUSIVITÀ TERMICA

IN CUI NUMERO DI PRANDTL $\Rightarrow \boxed{P_r = \frac{c_p \mu}{k}}$ MENTRE $Re = \frac{u_0 L_0 \rho_0}{\mu}$ $P_r = \frac{\nu}{K}$ DIFF.

ANALIZZIAMO ULTIMO TERMINE; STUDIAMO COME SIAMO ARRIVATI A Pr:

$$k\nabla^2 T \longrightarrow k \cdot \frac{T_0}{L_0^2} \cdot \frac{L_0}{\rho_0 c_p u_0 T_0} = \frac{k}{L_0 \rho_0 c_p u_0} \cdot \frac{\mu}{\mu} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{k}{c_p \mu} = \frac{1}{Re\, Pr}$$

DA $\nabla^{*2} T^*$

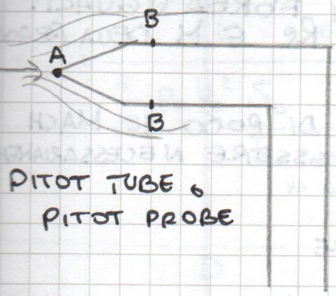
MOLTIPLICO E DIVIDO PER μ PER TROVARMI Re

LE SOLUZIONI ASINTOTICHE ASSOCIATE ALL'EQ. SONO LE STESSE DELLA EQ. CONS. MASSA.
IL Pr NON POSSO CONSIDERARLO ASINTOTICO POICHÈ DIPENDE DA PROPRIETÀ FLUIDO. QUINDI NON POSSO FARLO VARIARE.

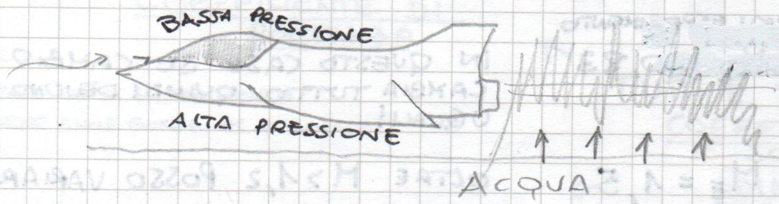
LEZIONE FLUIDO 19 MAGGIO

CHIARIMENTO SU GRUPPI ADIMENSIONALI, SU EQUAZIONI, SU VORTICITÀ E SU T. BERNOULLI. I GRAFICI E IMMAGINI SONO SULLE DISPENSE:

TUBO DI PITOT: È STRUMENTO POSIZIONATO SU VEICOLI O VELIVOLI PER IL CALCOLO DELLA VELOCITÀ
(L'EFFETTO DELL'ALTA VELOCITÀ $\rightarrow$ PRESSIONE BASSA)



PITOT TUBE o PITOT PROBE



A VALLE DEL VELIVOLO SI GENERA DEPRESSIONE DOVE È PRESENTE RISUCCHIO DELL'ACQUA

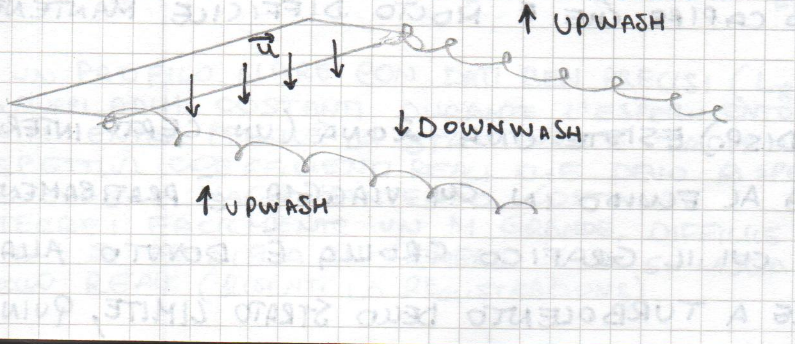
PUNTO A AVRÒ PRESSIONE TOTALE (STATICA + DINAMICA) MENTRE IN B AVRÒ SOLO PRESSIONE STATICA POICHÈ LA VELOCITÀ È PERPENDICOLARE (A PRESCINDERE DALLA NORMALE SE ENTRANTE O USCENTE) DA CUI $\nu = 0$.

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{P}_{B} + \frac{1}{2}\rho U^2}_{A} = \text{COSTANTE}}$$

QUINDI FACENDO $P_A - P_B = \rho U^2$ DA CUI ESTRAPOLO U.

GENERAZIONE E TRASPORTO DI VORTICITÀ; TEOREMI SU VORTICITÀ (VON KARMAN, HELMOLTZ)

DOWNWASH: SULLE ESTREMITÀ DELLE ALI SI GENERANO VORTICI CHE PROVOCANO QUESTO EFFETTO DEFINITO DOWNWASH.
IL DOWNWASH SPINGE L'ARIA VERSO IL BASSO PROVOCANDO UN ANGOLO DI INCIDENZA MINORE DA CUI LA PORTANZA DIMINUISCE E MAGGIORE È LA RESISTENZA DELL'ALA AL MOTO



GLI ALIANTI HANNO ALI LUNGHE E STRETTE PER MINIMIZZARE LA RESISTENZA DELL'ARIA.
CIÒ NON È POSSIBILE SUGLI AEREI POICHÈ SU UN'ALA CI SI METTONO MOTORI, MISSILI O POD.

IN GENERALE:

1) ALTA PRESSIONE → VORTICITÀ BASSA

2) BASSA PRESSIONE → VORTICITÀ ELEVATA

LA CAVITAZIONE È IL FENOMENO PER CUI SI CREANO BOLLE D'ARIA (IN CUI ARIA È COMPATTATA) CHE COLLASSANO PROVOCANDO DANNI.

NUMERO DI MACH: ABBIAMO FLUSSO INCOMPRIMIBILE SE $M < 0,3$ E $\beta T_0 \ll 1$ OPPURE $\alpha P_0 \ll 1$ E $\beta T_0 \ll 1$.

FISICAMENTE PARLANDO, PASSANDO DA MACH SUBSONICO A SUPERSONICO SI GENERANO ONDE D'URTO.

NELLA SPERIMENTAZIONE È IMPORTANTE RICORDARE CHE SOPRA $M > 1,2$ FISICAMENTE I FENOMENI A M SUPERSONICO POSSONO ESSERE STUDIATI ANCHE A MACH MINORE POICHÈ RIPRODUCONO LE STESSE CONDIZIONI. SOPRA A $M > 4$ CIÒ NON È PIÙ VERO; CAMBIANO ANCHE EQUAZIONI DI GOVERNO.

NUMERO DI REYNOLDS Re

È IL RAPPORTO TRA FORZA DI INERZIA E FORZA VISCOSA.

SIMILITUDINE DINAMICA

È SIMILITUDINE CHE MI GARANTISCE DI AVERE COEFFICIENTI DI FORZA UGUALI. DURANTE UN ESPERIMENTO DEVO CERCARE DI RAGGIUNGERE Re E M DELLA REALTÀ

es. MACH REALE → MACH ESPERIMENTO

$M_R = 0,83 \rightarrow M_E = 0,83$ IN QUESTO CASO SE CAMBIO DI POCO IL MACH CAMBIA TUTTO QUINDI DEVONO ESSERE NECESSARIAMENTE UGUALI!

$M_R = 1,6 \rightarrow M_E = 1,5$ OLTRE $M > 1,2$ POSSO VARIARE

STESSO RAGIONAMENTO VALIDO PER Re REYNOLDS

IN UN ESPERIMENTO MANTENERE ALLO STESSO TEMPO I RAPPORTI UGUALI TRA I VARI GRUPPI ADIMENSIONALI È MOLTO DIFFICILE:

es.

SE HO UN'ALA E HO L_R (LUNGH. CORDA) E PER MOTIVI DI SPAZIO NON MI ENTRA LA STRUTTURA NELLA GALLERIA DEL TEMPO ALLORA DECIDO DI DIVIDERE LA CORDA A METÀ: $L_E = \frac{1}{2} L_R$ MA PER MANTENERE LO STESSO RAPPORTO TRA I MODELLI DEVO RADDOPPIARE LA VELOCITÀ QUINDI DA V_R ARRIVO A $V_E = 2V_R$ DA CUI CAMBIA ANCHE IL NUMERO DI MACH ESSENDO $M = \frac{U_0}{C_0}$ E QUINDI CAMBIA TUTTO.

TUTTI QUESTI RAGIONAMENTI FANNO CAPIRE CHE È MOLTO DIFFICILE MANTENERE COSTANTI I RAPPORTI.

NEL CASO DI REYNOLDS (PAG 162 DISP.) ESISTE UNA ZONA (UN CERTO INTERVALLO) IN CUI LA RESISTENZA DI UNA SFERA AL FLUIDO IN CUI VIAGGIA È PRATICAMENTE COSTANTE (O QUASI). LA PARTE IN CUI IL GRAFICO CROLLA È DOVUTO ALLA TRANSIZIONE TRA FLUSSO LAMINARE E TURBOLENTO DELLO STRATO LIMITE, QUINDI

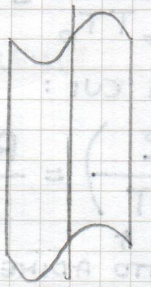
LA RESISTENZA CROLLA

PROPRIO PER QUESTO MOTIVO SULLE ALI DEGLI AEREI CI SONO DEGLI "SPUNTONI" CHE GENERANO FLUSSO TURBOLENTO PER DIMINUIRE RESISTENZA.

ANCHE LA PALLINA DA GOLF È CREATA PER GENERARE MOTO TURBOLENTO.

SI PARLA DI RESISTENZA DI FORMA

LA PORTANZA È $\propto$ PROPORZIONALE AD ANGOLO DI INCIDENZA.



GENERATORE EOLICO

NUMERO DI STROUHAL St

A PRIORI NON POSSO DIRE FLUSSO È STAZIONARIO. VA CALCOLATO St.

NUMERO DI FROUDE Fr

COME NEL CASO DI STROUHAL, SI DEVE RISPETTARE LO STESSO VALORE DURANTE L'ESPERIMENTO. È NUMERO RILEVANTE IN CAMPO IDRODINAMICO.

NUMERO DI RUARK Ru

SCAMBIA POSTO

NELLE NOSTRE APPLICAZIONI, $Ru = 1$ POICHÉ P_0 (DI RIF.) = P. DINAMICA $= \rho_0 U_0^2$

MA IN ALTRE APPLICAZIONI NON È 1.

PER FENOMENI DI CAVITAZIONE ASSUME UN NOME DIVERSO (NUMERO DI CAVITAZIONE)

LEZIONE 20 MAGGIO

SIMILITUDINE DINAMICA: (IL TERMINE DINAMICO FA PENSARE A FORZE) LA SIMILITUDINE PUÒ ESSERE EFFETTUATE SPERIMENTALMENTE O NUMERICAMENTE.

DEFINIAMO COEFFICIENTI DI PORTANZA (C_L), DI RESISTENZA (C_D) E DI MOMENTO (C_M) (RIVEDI PRIMO CAPITOLO DISPENSE)

$$\boxed{C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 S_0}}$$

L ← PORTANZA

S_0 ← SUPERFICIE DI RIFERIMENTO VA BENE ANCHE CORDA AL QUADRATO

COEFFICIENTE DI PORTANZA

TUTTI E 3 I COEFFICIENTI SONO ADIMENSIONALI

$$\boxed{C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 S_0}}$$

COEFFICIENTE DI RESISTENZA

$$\boxed{C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^2 S_0 L_0}}$$

COEFFICIENTE DI MOMENTO

IN UN ESPERIMENTO SE RIPRODUCIAMO MACH E REYNOLDS (CON I RAGIONAMENTI FATTI IN PRECEDENZA) AVREMO GLI STESSI COEFFICIENTI DELLA REALTÀ QUINDI:

SE: $Re_E = Re_R$ E $M_E = M_R \rightarrow C_{L_E} = C_{L_R}, C_{D_E} = C_{D_R}$ E $C_{M_E} = C_{M_R}$

Es.

HO UN PROFILO ALARE CON DATI BEN PRECISI (L_R, ρ_R, U_R, ecc.) DEVO MANTENERE I GRUPPI ADIM. COSTANTI DURANTE L'ESPERIMENTO: POICHÉ NELLA GALLERIA DEL VENTO NON MI ENTRA PERCHÉ LA STRUTTURA È TROPPO GRANDE, ALLORA MI CALCOLO I RISPETTIVI COEFFICIENTI REALI CHE DEVO RISPETTARE. A QUESTO PUNTO MODIFICO REYNOLDS E MACH MANTENENDO COSTANTE I COEFFICIENTI: MODIFICANDO Re OTTERREI FACILMENTE UN M GRANDE, DIFFICILE DA RIPRODURRE (ANCHE PER IL COSTO) DA CUI SI MODIFICA IN GENERE M E SI LASCIA Re NON PER FORZA UGUALE A QUELLO REALE (RISENTI LA REGISTRAZIONE).

EQ. DI STATO IN FORMA ADIMENSIONALE

$p v = nRT \rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho T} = R}$ $\quad R = 287\ J/kg\,K$ PER ARIA

ADIMENSIONALIZZIAMO SENZA USARE GLI ASTERISCHI:

$$\frac{p\, p_0}{\rho \rho_0 T T_0} = R$$ IN CUI AL POSTO DI $p \rightarrow p^*$, $\rho \rightarrow \rho^*$, ecc.

DA CUI:

$$\left(\frac{p}{\rho T}\right) = \frac{R \rho_0 T_0}{p_0} \xrightarrow[\text{DIVIDO PER } \gamma \text{ E } U_0^2]{\text{MOLTIPLICO E}} \rightarrow \frac{R \rho_0 T_0}{p_0} \cdot \frac{\gamma}{\gamma} \cdot \frac{U_0^2}{U_0^2}$$

TUTTO ADIMENSIONALE

RICORDANDO CHE $Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{p_0}$ E $M = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma R T}}$ AVREMO:

$$\left(\frac{p}{\rho T}\right) = \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{Ru}{1} = \frac{Ru}{\gamma M^2} \rightarrow \boxed{\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}}$$ EQUAZIONE DI STATO IN FORMA ADIMENSIONALE

EQUAZIONI ADIMENSIONALIZZATE (SEMPRE SENZA ASTERISCHI)

$$\begin{cases} \frac{1}{St}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 & \text{EQ. MASSA} \\ \frac{1}{St}\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{Ru}\vec{\nabla} p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr}\rho \frac{\vec{g}}{g} & \text{EQ. QTÀ DI MOTO} \\ \frac{1}{St}\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Ec}{Ru\, St}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru}\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re}\phi^2 + \frac{1}{Re\, Pr}\nabla^2 T & \text{EQ. BIL. ENERGIA TERMICA IN F. ENTALPICA} \\ \frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2} & \text{EQ. STATO} \end{cases}$$

ABBIAMO 6 INCOGNITE ($\vec{u}, p, \rho, T$) E DOBBIAMO SEMPLIFICARE L'EQUAZIONE:

- CONSIDERIAMO Re GRANDE (es $10^4, 10^5$ o 10^6), MATEMATICAMENTE $\rightarrow \infty$ DA CUI $\nu \sim 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$ QUINDI ν TRASCURABILE
- $Ru = 1$
- CONSIDERIAMO $M < 0,3$ (FLUSSO INCOMPRIMIBILE) E $\beta T_0 \ll 1$ (QUINDI ANCHE $Ec \ll 1$ POICHÈ LEGATO A M^2). INOLTRE CON $\beta T_0 \ll 1$ ANCHE LA DIFFUSIVITÀ È TRASCURABILE, CIOÈ POSSO TRASCURARE EQ. ENERGIA POICHÈ LA T NON GIOCA UN RUOLO IMPORTANTE)
  POSSIAMO QUINDI ELIMINARE EQ. STATO E EQ. ENERGIA.

POICHE $Re \rightarrow \infty$ (MATEM., MOLTO GRANDE INGEGNERISTICAMENTE) TRASCURO IL TERMINE $\frac{1}{Re}\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$ NELLA EQ. QTÀ DI MOTO.

CIÒ PERCHÈ LI STO CONFRONTANDO CON QUANTITÀ DI ORDINE 1.

- COME ULTERIORE IPOTESI CONSIDERO $Fr \rightarrow \infty$ (SEMPRE MAT.) QUINDI LE FORZE DI MASSA NON SONO IMPORTANTI (A MENO CHE NON CI OCCUPIAMO DI MOTI ONDOSI, CARENE, ecc.) E POICHÈ LA DENSITÀ È COSTANTE SI ELIMINA IL TERMINE STAZIONARIO:
  $\frac{1}{St}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ E IN $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})$ LA ρ PORTO FUORI QUINDI $\rho = 0$.

LE EQUAZIONI DIVENTANO LE SEGUENTI:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}P \end{cases}$$

EQUAZIONI DI EULERO (I FORMA)
(EQ NON LINEARE)

E AVREMO 4 INCOGNITE ($\vec{u}$, P)

IL TERMINE $\boxed{\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}}$ È NON LINEARE: È IL TERMINE CHE CREA PROBLEMI NELLA RISOLUZIONE A LIVELLO MATEMATICO

PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA INTRODUCO UN NUOVO CONCETTO.

POTENZIALE φ: GRANDEZZA IL CUI GRADIENTE È $\vec{u}$: $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$

È IMPORTANTE RICORDARE CHE $\varphi \neq \phi^2$ ANCHE SE LA LETTERA È LA STESSA.

DEVO INTRODURRE ALTRA IPOTESI PER LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA TRAMITE POTENZIALE.

- IPOTESI DI $\boxed{\vec{\omega} = 0}$ COSÌ FACENDO RENDO $\vec{\nabla}\vec{u}$ NON RILEVANTE (VISCOSITÀ TRASCURABILE).

È IMPORTANTE DEFINIRE $\vec{\omega} = 0$ IN OGNI PUNTO E NON SOLO IN UN PUNTO, QUINDI:

$\boxed{\vec{\omega}(x_i, t) = 0}$ QUINDI È 0 OVUNQUE: VORTICITÀ NULLA OVUNQUE

RICORDANDO IL T. KELVIN, CI DICEVA CHE SOTTO IPOTESI DI:

- Re GRANDE (GIÀ IPOTIZZATA)
- $\vec{F}$ CONSERVATIVA
- FLUIDO INCOMP. (IPOTIZZATA CON N. MACH E βt_0) $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

ALLORA AVREMO CHE:

$$\Gamma = \oint \vec{\omega}\, d\vec{l} \overset{\text{T. STOKES}}{=} \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot\vec{n}\, dS = \iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}\, dS = \text{COSTANTE}$$

QUINDI AVENDO IPOTIZZATO $\vec{\omega} = 0$, SEGUE CHE ESSA SI MANTIENE COSTANTE SEMPRE QUINDI BASTERÀ POSSIAMO AFFERMARE CHE:

$\vec{\omega}(x_i, t) \rightarrow \boxed{\vec{\omega}(x_i, 0)} = 0$ È SUFFICIENTE CHE SIA 0 OVUNQUE E A $t = 0$

MATEMATICAMENTE SE $\vec{\omega} = 0$ POSSO INTRODURRE φ: DATO CAMPO VETT. $\vec{u}$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \;\exists\, \varphi : \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi}$$

INFATTI AVEVAMO VISTO COME IL ROTORE DI UN GRADIENTE È NULLO:

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi \equiv 0$ MENTRE $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi = \nabla^2\varphi$

QUINDI TRAMITE IL SET DI IPOTESI (TRA CUI $\vec{\omega}(x_i, 0) = 0$) AVREMO:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}P \end{cases}$$

EQ. EULERO CON φ (II FORMA)

TRAMITE QUESTA EQUAZIONE POSSO TROVARMI $\vec{u}$ DA $\varphi \rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$

QUINDI MOLTIPLICO SCALARMENTE $\vec{n}$ AL GRADIENTE:

LA CONDIZIONE AL CONTORNO È RICHIESTA SOLO PER UNA COMPONENTE

$$(\vec{u} = \vec{\nabla}(\varphi))\cdot\vec{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

(PROIEZIONE GRADIENTE → DERIVATE CALCOLATE LUNGO LA DIREZIONE IN CUI ABBIAMO PROIETTATO)

QUINDI LA DERIVATA ALLA PARETE LUNGO n:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_W = 0$$

MENTRE LA τ NON LA DEVO PROIETTARE

LEZIONE FLUIDODINAMICA 24 MAGGIO

SINTESI: DA EQ. ADIMENSIONALI AL POTENZIALE

<u>RICAPITOLANDO</u> LE IPOTESI CHE ABBIAMO FATTO SUL <u>SET. DI EQ. ADIMENSIONALI</u>:

- $Re \to \infty$
- $Fr \to \infty$
- $M < 0{,}3$ E $\beta t_0 << 1$ DA CUI $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ OSSIA FLUIDO INCOMPRIMIBILE
- $Ru = 1$
- $\rho q = 0$
- $\vec{R}\cdot\vec{n} = 0$
- $\omega(x_i, t) = 0$

} MA COMUNQUE NON ABBIAMO PIÙ EQ. DI BILANCIO DELL'EN.

IL T. KELVIN GARANTISCE LA VORTICITÀ COSTANTE QUINDI È SEMPRE NULLA IN QUESTO CASO.
ABBIAMO POI INTRODOTTO IL POTENZIALE φ.

$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$ RICORDANDO CHE $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$

QUEST'ULTIMA TRATTAZIONE È PURAMENTE MATEMATICA POICHÉ $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$ DA CUI POSSO ESPRIMERE $\vec{u}$ COME GRADIENTE DI QUALCOSA.

COSÌ FACENDO OTTENGO $\nabla^2\varphi = 0$ <u>EQ. LAPLACE</u> (EQ. DIFF. DI 2° ORDINE)

A QUESTO PUNTO DEVO PORRE LE <u>CONDIZIONI AL CONTORNO</u> → UNA ALL'INFINITO E UNA SUL CORPO.

QUELLA ALL'∞ INDICA CHE IL POTENZIALE RIMANE INDISTURBATO, LONTANO DAL CORPO.

QUELLA SUL CORPO SI INTERPRETA COME <u>CONDIZIONE DI IMPERMEABILITÀ</u>: LA COMPONENTE NORMALE SUL CORPO DEVE ESSERE $= 0$ DA CUI:

$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_W = 0$ CALCOLATA SULLA PARETE (WALL)

NON POSSO IMPORRE CHE LA COMPONENTE TANGENZIALE $= 0$ COSTRINGENDO IL FLUSSO AD ESSERE INFLUENZATO DA TERMINI VISCOSI. ??

RICORDIAMO CHE $St \neq \infty$, NON ABBIAMO IMPOSTO CHE IL FLUSSO SIA STAZIONARIO. → $\varphi_\infty(t)$

CON <u>TUTTE QUESTE IPOTESI E CONDIZIONI</u> PUÒ ESSERE RISOLTO IL SISTEMA

RIUSCIAMO A TROVARE $\varphi(x_i, t)$

TROVATO φ → CALCOLO $\vec{\nabla}\varphi = \vec{u}$ → USO BERNOULLI PER TROVARE P.

(È EQUAZIONE ALGEBRICA E NON DIFF.)

$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho U^2 = cost}$ DOVE COST PUÒ ESSERE VALORE ALL'∞

(RICORDARE CHE NEGLI INTEGRALI DEL PROFILO ALARE SULLE DISP. VA TOLTO τ)

RISOLUZIONE POTENZIALE φ

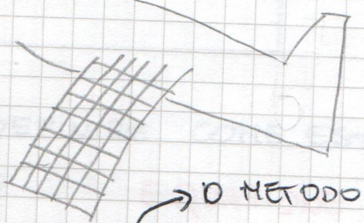
A QUESTO PUNTO DEVO SVILUPPARE $\nabla^2\varphi$; CI SONO DUE METODI:

$\boxed{\nabla^2\varphi}$ → <u>METODO DIRETTO</u>

$\boxed{\nabla^2\varphi}$ → <u>METODO INDIRETTO</u>

IL METODO DIRETTO È QUELLO PIÙ MATEMATICO MA PIÙ COMPLESSO, BASATO SU FORMULA DI GREEN (NON LO FACCIAMO). È STATO FATTO IN AMERICA DA UN PROF. DI RM3.

ASSEGNATA LA GEOMETRIA DI UNA STRUTTURA POSSIAMO CALCOLARE IL FLUSSO POTENZIALE PUNTO PER PUNTO; NELLA REALTÀ LA SUPERFICIE VIENE RAPPRESENTATA CON PEZZETTI CHIAMATI PANNELLI.



È METODO CHE USANO ALLA NASA.

IL METODO INDIRETTO (O METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONI DI SOLUZIONI SEMPLICI) È QUELLO PIÙ USATO E PIÙ SEMPLICE; ESSENDO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE E LINEARE AVRÒ φ_i SOLUZIONI CHE TRAMITE COMBINAZIONI LINEARE GENERANO UNA SOLUZIONE (QUINDI DA φ_i SOL. OTTENGO SOL. $\tilde{\varphi}$)

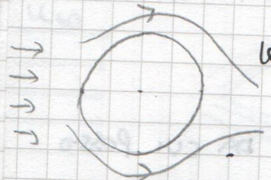
TILDE

$$\boxed{\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \rightarrow \nabla^2 \tilde{\varphi} = 0}$$

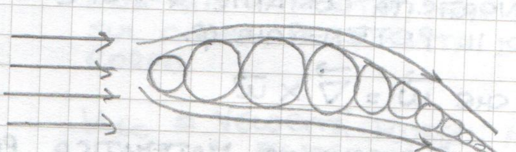
SE HO QUINDI SOLUZIONI PIÙ SEMPLICI POSSO TROVARE SOLUZIONE GLOBALE IN MODO SEMPLICE.

ESEMPIO:

DATO UN PROFILO ALARE È COME RIUSCIRE A CALCOLARE IL FLUSSO SOSTITUENDO AL POSTO DEL PROFILO UNA GEOMETRIA PIÙ SEMPLICE (ES. INSIEME DI CILINDRI) DI CUI SO CALCOLARE BENE IL POTENZIALE:

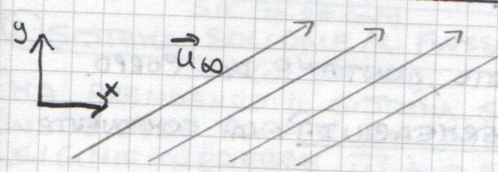


LO SOSTITUISCO A $\rightarrow$



IL REQUISITO FONDAMENTALE È CHE IL CAMPO PERTURBATO DEVE ESSERE LO STESSO DI QUELLO FATTO CON I CILINDRI; LE LINEE DI CORRENTE DEVONO ESSERE LE STESSE.

1 IMMAGINO CORRENTE UNIFORME (LINEE DI CORRENTE PARALLELE)



CONOSCO L'INTENSITÀ, VERSO E DIREZIONE $\vec{u}_\infty$

- ALTRA IPOTESI DA CONSIDERARE PER LE NOSTRE APPLICAZIONI È IL CASO 2 DIMENSIONI;

2D

$\vec{u}_\infty$ AVRÀ QUINDI 2 COMPONENTI ED UN ANGOLO α (ANGOLO DI INCIDENZA, IN AERODINAMICA). CHE È ANGOLO TRA ASSE x DI SIST. DI RIF. E FLUSSO

QUINDI: $\boxed{\vec{u}_\infty = (U_\infty \cos\alpha ; U_\infty \sin\alpha)}$

DA CUI ESSENDO $u = \vec{\nabla}\varphi$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = U_\infty \cos\alpha \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = U_\infty \sin\alpha \end{cases}$$

ESSENDO IN 2D $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} ; \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

ADESSO DEVO INTEGRARE TRA 2 Q.TÀ COSTANTI:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \rightarrow \varphi = U_\infty \cos\alpha\, x + \underbrace{\text{cost}(y)}_{\text{costante in } y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \rightarrow \varphi = U_\infty \sin\alpha\, y + \underbrace{\text{cost}(x)}_{\text{costante in } x} \end{cases}\right\} \tilde{\varphi} = \varphi_1 + \varphi_2$$

E SARÀ

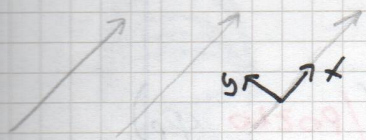
$$\boxed{\varphi = U_\infty \cos\alpha\, x + U_\infty \sin\alpha\, y + \text{costante}}$$

POTENZIALE DI CORRENTE UNIFORME

ASSUMEREMO SEMPRE COSTANTE $= 0$ PERCHÉ TANTO DERIVANDO SI CANCELLA (NELLE NOSTRE APPLICAZIONI)

CASO PARTICOLARE:

SE RIESCO A PORRE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ALLINEATO CON VELOCITÀ CIOÈ ASSE X PARALLELO A VELOCITÀ.

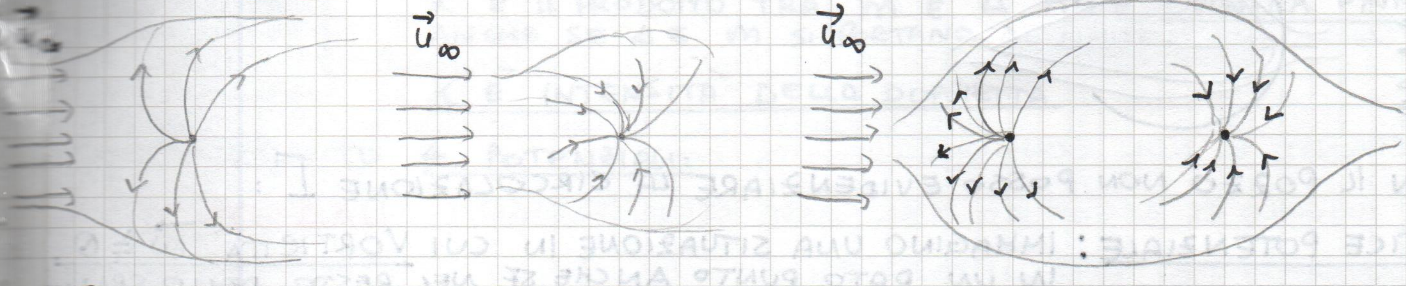


AVREMO QUINDI:

$$\boxed{\varphi = u_\infty x}$$ IN CUI $\cos\alpha = 1$

ADESSO DOBBIAMO STUDIARE UN MODO PER SIMULARE LO SPESSORE DEI CORPI E DEFINIAMO LA SORGENTE E IL POZZO (SONO SEMPRE FLUSSI)

IMMAGINO CHE DA UN PUNTO DEL CAMPO CI SIANO LINEE DI CORRENTE RADIALI. SE LE LINEE ESCONO AVREMO SORGENTE, SE SONO ENTRANTI ABBIAMO POZZO. QUINDI SONO L'UNO IL CONTRARIO DELL'ALTRO.



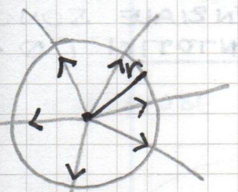
SORGENTE POZZO ES. DIREGIBILE

CONSIDERANDO UNA SORGENTE, LA PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZA LA SORGENTE È LA PORTATA m (POSITIVO PER SORGENTE, NEGATIVO PER POZZO).

$m > 0$ SORG. $m < 0$ POZZO

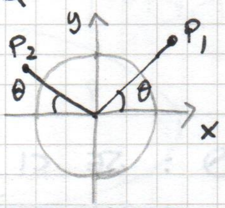
$$m = \iint \underset{\text{SE P. SCALARE È POS. (SORG), NEG. (POZZO)}}{\vec{u} \cdot \vec{n}}\, dS$$ PORTATA IN VOLUME $\left(\frac{m^3}{s}\right)$ IN IDRO: $\boxed{Q = VA}$

SCELGO LINEA SEMPLICE DI RAGGIO r



SE VOGLIO CALCOLARMI LA PORTATA NON CONVIENE INTRODURRE S. CARTESIANO MA MEGLIO POLARE.

QUINDI:



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

DA CUI ANCHE IL GRADIENTE DIVENTA: $\vec{\nabla} = \overset{\text{P. CART.}}{\left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y}\right)} \rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial r} ; \frac{\partial}{r d\theta}\right)}$

IN CUI APPARE $\frac{\partial}{r d\theta}$ PERCHÈ LEGATO ALL'ARCO E NON SEMPLICEMENTE ALL'ANGOLO.

DA CUI AVREMO CHE:

$$\boxed{\oint_C \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{r}}\, d\ell} \text{ ELEMENTO DELLA CIRCONFERENZA } \xrightarrow{\text{C. POLARI}} = \boxed{\oint_0^{2\pi} u_r \overbrace{r\, d\theta}^{d\ell}}$$

DA COMPONENTE DI VELOCITÀ PROIETTATA LUNGO $r = U_r$

SE r VARIASSE AVREI LINEE DI CORRENTE DISTORTE E NON SAREBBERO PIÙ RADIALI.

OTTENENDO COSÌ:

$$\begin{cases} U_r \cdot r \cdot 2\pi = m \\ U_\theta = 0 \end{cases}$$ NON HO COMPONENTE TANGENZIALE

$$\begin{cases} U_r = \frac{m}{2\pi r} \\ U_\theta = 0 \end{cases}$$

QUINDI:

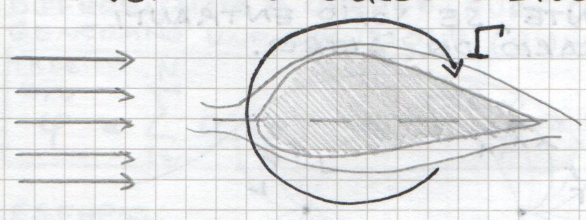
$$\begin{cases} U_r \rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow \varphi = \dfrac{m}{2\pi} \ln r \\ U_\theta \end{cases}$$

HO TROVATO $\boxed{\varphi_S = \dfrac{m}{2\pi} \ln r}$ POTENZIALE SORGENTE / POZZO φ_P)

SORGENTE

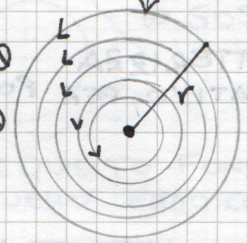
3

SE HO PROFILO ALARE, A CAUSA DELL'ASIMMETRIA GEOMETRICA, FLUSSO TRA VENTRE E DORSO È DIVERSO → HO QUINDI PORTANZA



CON IL POZZO NON POSSO EVIDENZIARE LA CIRCOLAZIONE Γ:

VORTICE POTENZIALE: IMMAGINO UNA SITUAZIONE IN CUI VORTICITÀ $\vec{\omega} \neq 0$ IN UN DATO PUNTO ANCHE SE NEL RESTO DELLO SPAZIO È 0 (LA VORTICITÀ, NON IL RESTO).



LO STESSO PUNTO DI SINGOLARITÀ LO TROVO NELLA SORGENTE E NEL POZZO.

VORTICE: È SITUAZIONE SINGOLARE. L'APPROCCIO CHE STIAMO PER USARE FUNZIONA OVUNQUE TRANNE NEL PUNTO.

I VARI PUNTI DI SINGOLARITÀ SARANNO DENTRO I CORPI STUDIATI QUINDI, SE DEVO CALCOLARE IL POTENZIALE NON MI INTERESSA IL POTENZIALE INTERNO MA POTENZIALE IN PUNTI PIÙ ESTERNI. DOVE CALCOLO IL POTENZIALE SONO PUNTI IN CUI φ È SICURAMENTE FINITO E NON HA VALORI ASINTOTICI (0 o ∞).

QUINDI: $\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}$

$$= \oint_0^{2\pi} U_\theta \, r \, d\theta$$

PER DEFINIZIONE AVRÒ $U_\theta \neq 0$ e $U_r = 0$: SE CI FOSSE COMPONENTE RADIALE, SI FORMEREBBE UN VORTICE.

$$\begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta \cdot r \cdot 2\pi = \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

APPLICANDO IL GRADIENTE COME PRIMA TRAMITE C. POLARI →

$$\rightarrow \begin{cases} U_r = 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \\ U_\theta = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi_V = \dfrac{\Gamma}{2\pi} \theta}$$

COME IN φ_S NON HO UNA COSTANTE + C.