

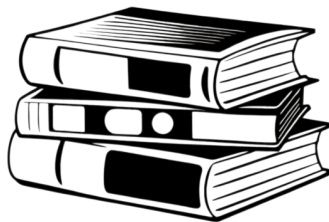
Fluidodinamica

Teoria Parte 2

Universita degli studi Roma3

Docente: **Roberto Camussi**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



NOTESTOBOOK
ELEVATE YOUR NOTES

notestobook.it

Anno Accademico 2025/2026

Indice

0.1	Ultima definizione di potenziale (non dimostrata)	5
0.1.1	Caso di flusso = sorgente + pozzo	5
0.1.2	Esempio	5
0.2	Paradosso di d'Alembert	12
0.2.1	Teorema di Kutta-Joukowski	14
0.3	Separazione dello strato limite	22
0.3.1	Caso reale	22
0.4	Flussi compressibili in condotti	24
0.5	Geometrie di condotti	25
0.5.1	Ipotesi fondamentali	25
0.5.2	Velocità in un punto arbitrario	26
0.5.3	Riduzione delle incognite	27
0.5.4	Equazioni semplificate	28
0.6	Fluidodinamica, 4 giugno	30
0.6.1	Condotto convergente	32
0.6.2	Condotto divergente	32
0.7	Relazione tra pressione e numero di Mach	36
0.8	Lezione fluidodinamica, 3 giugno	40
0.8.1	Eq. massa	40
0.9	Comportamento del condotto al variare di p_u	42
0.10	Flusso compressibile con urti	42
0.10.1	Per trovare P_2 :	43
0.10.2	Urto	45
0.10.3	Modello unidimensionale	46
0.10.4	Set di equazioni metodo unidimensionale (urto)	47
0.10.5	Esempio	51
0.10.6	Urti in differenti condotti	52
0.10.7	Relazioni di Rankine-Hugoniot	54

0.11	Esercizio dispense 6.23 e 6.24	55
0.11.1	Esercizio 6.24	56
0.12	Equazione di continuità o bilancio/conservazione della massa	57
0.12.1	Forma vettoriale	57
0.12.2	Forma indiciale	57
0.13	Equazione del bilancio della quantità di moto	58
0.14	Vorticità ed equazione della vorticità	60
0.14.1	Linea materiale composta dalle stesse particelle	61
0.14.2	Forma differenziale della vorticità	62
0.15	Equazione di bilancio dell'energia	63
0.15.1	Caso particolare: equazione di Bernoulli	65
0.16	Numero di flusso	66
0.17	Equazione quantità di moto adimensionale	66
0.17.1	Numero di Froude Fr	67
0.18	Equazione di bilancio energia termica in termini entalpici adimensionale	67
0.18.1	Numero di Eckert Ec	68
0.18.2	Numero di Prandtl Pr	68
0.18.3	Numero di Reynolds Re	68
0.19	Equazione di stato in forma adimensionale	68
0.20	Set di equazioni adimensionalizzate	69
0.20.1	Equazioni di Eulero	69
0.20.2	Potenziale φ	69
0.21	Sintesi equazioni fondamentali	70
0.21.1	Equazione conservazione/continuità massa	70
0.21.2	Equazione bilancio quantità di moto / Navier-Stokes	70
0.22	Vorticità ed equazione di trasporto della vorticità	71
0.22.1	Trattazione differenziale $\omega(x_i, t)$	71
0.22.2	Equazione di bilancio dell'energia	71
0.23	Equazioni adimensionalizzate (sintesi)	73
0.23.1	Equazione continuità / conservazione massa adim	73
0.23.2	Equazione della quantità di moto / Navier-Stokes adim	73
0.23.3	Equazione bilancio energia in termini entalpici adim	73
0.23.4	Equazione di stato adim	73
0.23.5	Equazioni di Eulero (adim.)	73
0.23.6	Equazioni di Eulero con potenziale φ (adim.)	73
0.23.7	Teorema di Bernoulli	73

0.1 Ultima definizione di potenziale (non dimostrata)

0.1.1 Caso di flusso = sorgente + pozzo

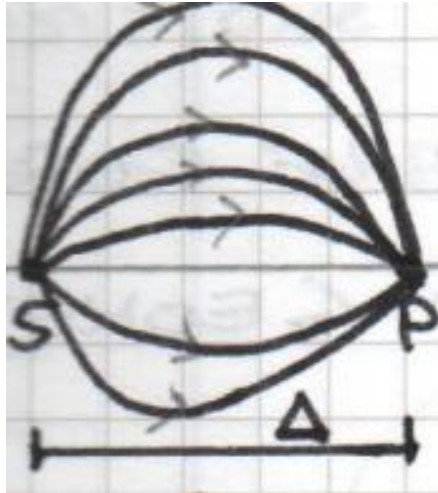


Figura 1: Diagramma di una coppia sorgente-pozzo. Una sorgente S a sinistra e un pozzo P a destra sono separati da una distanza Δ . Le linee di corrente fluiscono dalla sorgente verso il pozzo.

Non ho flusso uniforme ma tutto ciò che è generato da S viene assorbito da P.

L'unisco (non è però sovrapposizione ma è un limite):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} m \rightarrow \infty$$

Questo limite genera la doppietta (doublet):

$$\varphi_D = \frac{K \cos \theta}{r}$$

K è il prodotto tra m e Δ ma è quantità finita anche se Δ e m si portano al limite.

K è intensità della doppietta.

Abbiamo definito 4 potenziali:

Set potenziali

$$\begin{cases} \varphi = U_\infty \cos \alpha + U_\infty \sin \alpha \\ \varphi_S = \frac{m}{2\pi} \ln r \\ \varphi_V = \frac{m}{2\pi} \theta \\ \varphi_D = \frac{K \cos \theta}{r} \end{cases}$$

Adesso basta sovrapporre queste equazioni per capire come si utilizzano.

0.1.2 Esempio

φ_{CV}

Al posto del corpo, sostituisco la sorgente che mi definisce un punto in cui la corrente non è più uniforme (quindi il flusso non è più uniforme).

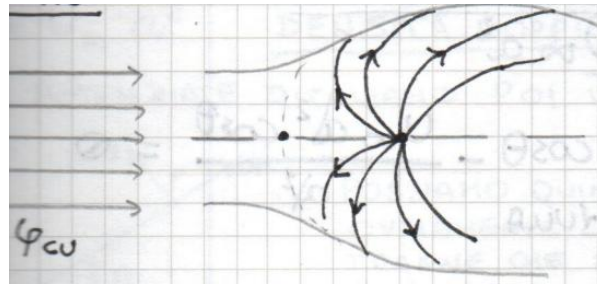


Figura 2: Diagramma che mostra le linee di corrente intorno a un cilindro. Una sorgente S e un pozzo P sono posizionati sull'asse del cilindro. Le linee di corrente fluiscono dalla sorgente verso il pozzo, creando un flusso a doppietta intorno al cilindro.

Sulle dispense ho il caso dell'ovale di Rankine:

In questo caso i calcoli sono più difficili.

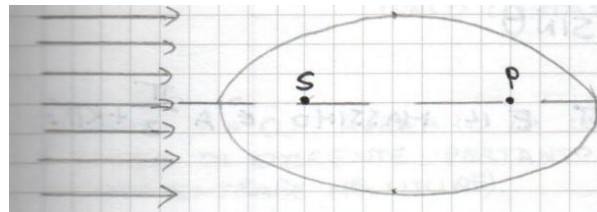


Figura 3: Diagramma che mostra le linee di corrente intorno a una forma ovale. Una sorgente S e un pozzo P sono posizionati sull'asse maggiore dell'ovale. Le linee di corrente fluiscono dalla sorgente verso il pozzo, creando un flusso a doppietta intorno all'ovale.

Esempio: caso cilindro. Ho flusso di corrente uniforme (φ_{Cu}) intorno a un cilindro.

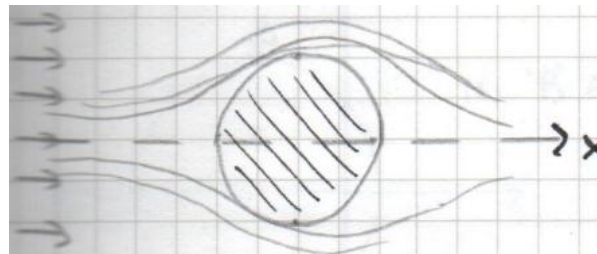


Figura 4: Diagramma che mostra le linee di corrente intorno a un cilindro. Una sorgente S e un pozzo P sono posizionati sull'asse del cilindro. Le linee di corrente fluiscono dalla sorgente verso il pozzo, creando un flusso a doppietta intorno al cilindro.

Posso usare approccio 2D? Se il cilindro è lungo a sufficienza posso studiare la parte centrale, cosa che non è possibile fare per esempio con i piloni delle autostrade che sono troppo bassi e larghi; avrei fenomeni diversi da questo caso sempre (es. turbolenza).

Potremmo che sia possibile utilizzare il modello 2D sul cilindro:

Assomiglia a un ovale di Rankine quindi tra i 4 potenziali uso solo quello della doppietta:

Così facendo stiamo calcolando le forze aerodinamiche.

Ho per esempio Re grande, conosco geometria, la velocità del vento, ecc.

$$\varphi = \varphi_{Cu} + \varphi_D = U_{\infty} r \cos \theta + \frac{K \cos \theta}{r}$$

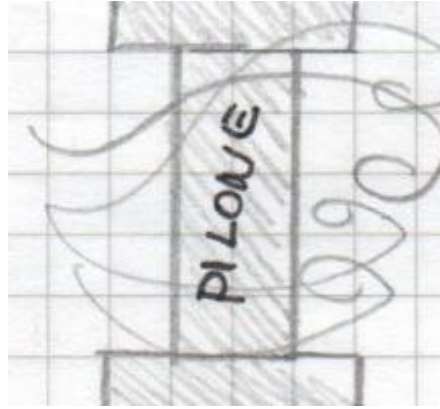


Figura 5: Diagramma di un pilone autostradale. La parola “autostrada” è scritta sopra il pilone. La parola “pilone” è scritta verticalmente sul pilone. Le linee di corrente fluiscono intorno al pilone, mostrando separazione del flusso e turbolenza.

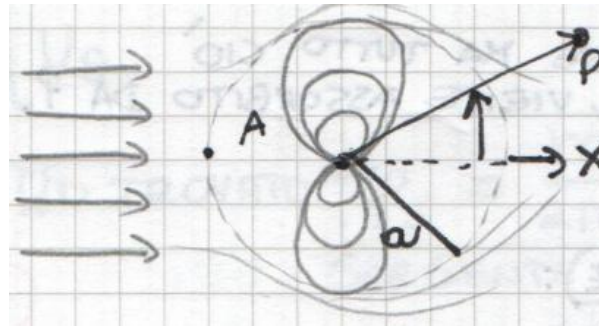


Figura 6: Diagramma di un ovale di Rankine. Un cerchio di raggio a è mostrato con un asse orizzontale x e un asse verticale y . Un punto A è marcato sul cerchio in alto, dove l'angolo θ è $\pi/2$. Le frecce indicano la direzione del flusso e la forma risultante dell'ovale.

Con riferimento cartesiano allineato con il vento ma passiamo poi a quello polare più consueto con i potenziali:

$$x \rightarrow r \cos \theta$$

Importante è non confondere α con θ :

- α = angolo di apertura tra asse x e flusso (o angolo di incidenza)
- θ = angolo del riferimento polare

Nel punto A abbiamo $\theta = \pi$ e $r = a$.

$$U_r = \frac{d\varphi}{dr} = U_\infty \cos \theta - \frac{K \cos \theta}{r^2} \quad (1)$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta} = -U_\infty \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r^2} \quad (2)$$

Densità doppietta:

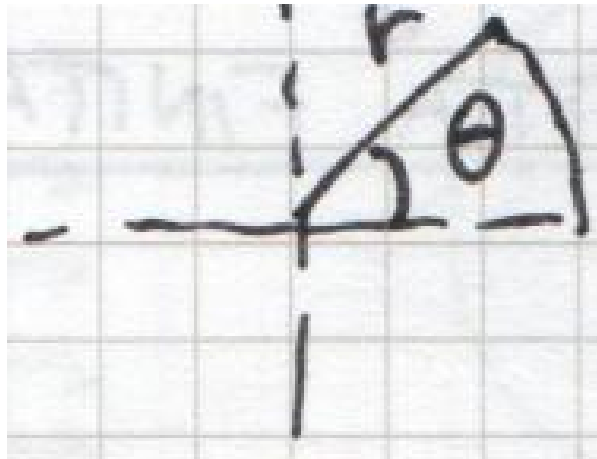


Figura 7: Diagramma che mostra la conversione da coordinate polari a coordinate cartesiane. Un punto è definito da raggio r e angolo theta dall'asse x. La proiezione sull'asse x è etichettata x.

$$U_r(\theta = \pi, r = a) = -U_\infty + \frac{K}{a^2} = 0 \rightarrow K = U_\infty a^2$$

Da cui sostituendo di nuovo nella (1): $U_\infty \cos \theta - \frac{U_\infty a^2 \cos \theta}{a^2} = 0$.

Infatti si annulla $\rightarrow U_r$ da definizione è nulla. Non posso avere flusso radiale.

Invece (2) sostituendo K:

$$U_{\theta s} = -U_\infty \sin \theta - \frac{U_\infty a^2 \sin \theta}{a^2} = -2U_\infty \sin \theta$$

Infatti vediamo che il minimo è a $\pi + K\pi$ e il massimo è a $\frac{\pi}{2} + K\pi$:

$$U_\theta \left(\theta = \frac{\pi}{2}, r = a \right) = -2U_\infty$$

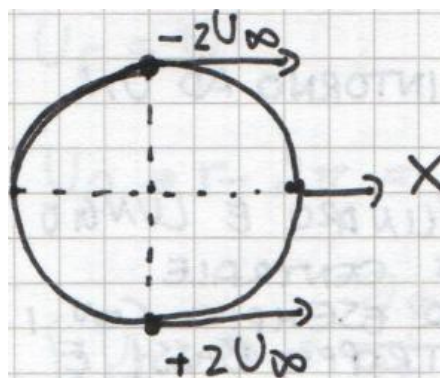


Figura 8: Diagramma di un cerchio che rappresenta le linee di corrente del flusso. Un asse orizzontale x è mostrato. In cima al cerchio, la velocità è etichettata $-2U_\infty$. In fondo al cerchio, la velocità è etichettata $+2U_\infty$.

Fluido 26 maggio

Abbiamo visto il potenziale con metodo indiretto o metodo della sovrapposizione di soluzioni semplici.

Esempio: cilindro. Abbiamo raggio a e U_∞ .

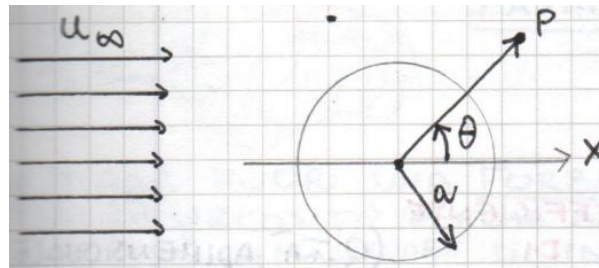


Figura 9: Diagramma di un cilindro in un campo di flusso. A sinistra, frecce parallele rappresentano il flusso uniforme U_∞ . A destra, un cerchio rappresenta il cilindro con raggio a . Un punto P è situato al di fuori del cilindro. Un vettore r collega il centro del cilindro al punto P . L'angolo θ è misurato dall'asse x al vettore r . Il vettore a rappresenta il raggio del cilindro.

Un punto generico sul piano è definito da r e θ antiorario.

$r \neq a$ in generale a meno che non prendo un punto sulla circonferenza del cilindro di raggio a .

Abbiamo quindi visto che:

$\nabla^2 \varphi = 0$ è risolvibile con set di potenziali.

Va capito, dato un problema, quali soluzioni scegliere.

$$\begin{cases} \varphi \\ \varphi_s \text{ (e } \varphi_p) \text{ Sorg. o Pozzo} \\ \varphi_v \\ \varphi_D \end{cases}$$

In questo caso (es. cilindro scorsa le 2.):

$$\varphi = \varphi_{cv} + \varphi_D$$

Soluzioni scelte grazie a simmetria cilindrica.

Se fosse stato ovale di Rankine avremmo avuto:

$$\varphi = \varphi_{cv} + \varphi_s + \varphi_p$$

Con questi dati ricaviamo potenziale globale.

$$K = U_\infty a^2$$

Densità doppietta.

Dal potenziale ricaviamo poi $\vec{u} = \nabla \varphi$.

Possiamo quindi calcolare $\vec{u}(u_\theta, u_r)$. Ovviamente la relazione $\varphi = \varphi_{cv} + \varphi_D$ è valida ovunque tranne che in singolarità. A noi non interessa \vec{u} o φ dentro al corpo; sarebbe solo una trattazione matematica. Stesso discorso varrebbe per punto contando dal corpo.

Ponendo $r = a$ avremmo la componente radiale $u_r = 0$ (corpo è impermeabile, è linea di corrente pertanto da 2° teorema di Helmholtz le particelle non possono entrare né uscire).

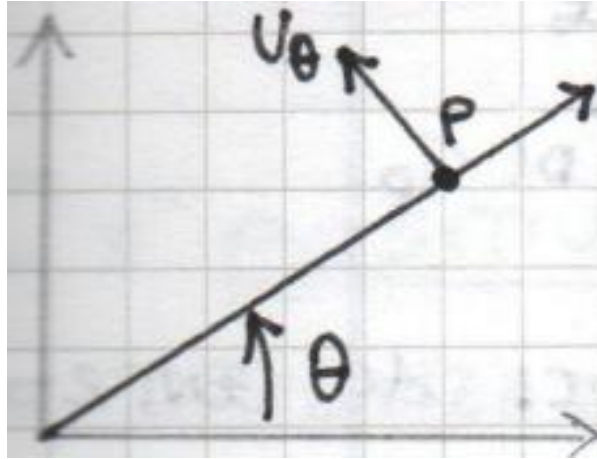


Figura 10: Diagramma che mostra un punto P in un sistema di coordinate 2D. Un vettore u_θ punta radialmente verso l'esterno da P. Un vettore u_r punta radialmente verso l'interno verso P. L'angolo theta è misurato dall'asse x al vettore u_r .

Invece abbiamo $u_{\theta s} = -2U_\infty \sin \theta$ in cui $u_{\theta s}$ indica componente angolare sulla superficie. Il $-$ è dovuto al fatto che la velocità viene dal verso opposto rispetto a velocità angolare.

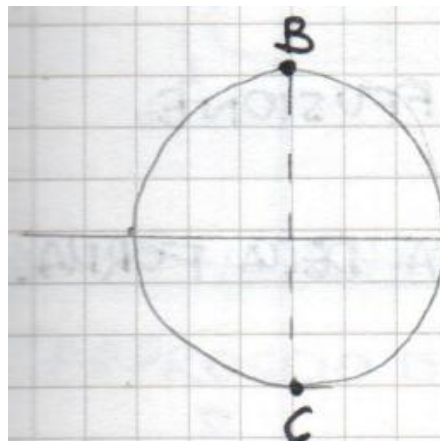


Figura 11: Diagramma di un cerchio che rappresenta un cilindro. L'asse verticale è etichettato B in alto e C in basso. Una freccia orizzontale punta a destra.

In B e C ho $|u_{\theta s \max}| = 2U_\infty$ al di là del segno che dipende da $\sin \theta$.

Adesso applico teorema di Bernoulli al cilindro:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_s + \frac{1}{2}\rho u_s^2$$

Devo conoscere P_∞ (es. $P_\infty = P_{\text{ATM}}$) associata a flusso indisturbato.

Ciò che mi interessa è P_S .

Mi ricavo un coefficiente di pressione per procedere che è quantità adimensionale:

$$C_{P_S} = \frac{P_\infty - P_S}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (\text{pressione relativa: } P_S - P_{\text{REF}})$$

Fattore necessario per adimensionalizzare la pressione:

$$= \frac{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho U_{\theta_s}^2}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (\text{diviso tutto per } \frac{1}{2}\rho U_\infty^2) = 1 - \left(\frac{U_{\theta_s}}{U_\infty}\right)^2$$

Coefficiente di pressione (quantità adimensionale):

$$C_{P_S} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

In cui ho sostituito al posto di $U_{\theta_s} = -2U_\infty \sin \theta$.

Coefficiente di pressione.

Valido per tutti i cilindri \rightarrow ho quindi un $C_{P_S}(\theta)$ che può essere integrato lungo tutta la superficie con le ipotesi iniziali.

C_{P_S} varierà in questo modo:

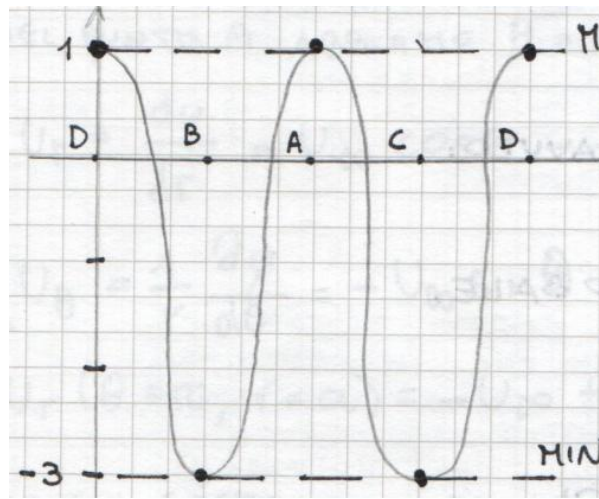


Figura 12: Grafico del coefficiente di pressione C_{P_S} in funzione dell'angolo θ per un cilindro. La curva è un'onda coseno: $C_{P_S} = 1 - 4 \sin^2 \theta$. Inizia a $(0, 1)$, raggiunge un minimo di -3 a $\theta = 90$ gradi, ritorna a 1 a $\theta = 180$ gradi, raggiunge un altro minimo di -3 a $\theta = 270$ gradi, e ritorna a 1 a $\theta = 360$ gradi. I punti A, B, C e D sono marcati sulla curva a $\theta = 0, 90, 180$ e 270 gradi rispettivamente.

Come saranno le forze associate a questo sistema posizionandoci al centro del cilindro?

$$\vec{F} \equiv (F_x, F_y) \rightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \quad (\text{risultante})$$

Poiché la geometria simmetrica rende nulle le forze: tanto compresso da una parte, tanto compresso dall'altra ma con verso opposto.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0 \quad \text{su tutti e due gli assi.}$$

Questo risultato non rispettava però la realtà poiché c'è separazione del fluido (la cosiddetta scia) poiché non si tengono conti gli effetti viscosi (da cui nasce vorticità) nel modello del potenziale.

Nella realtà si genera una resistenza che è legata a differenza di pressione.

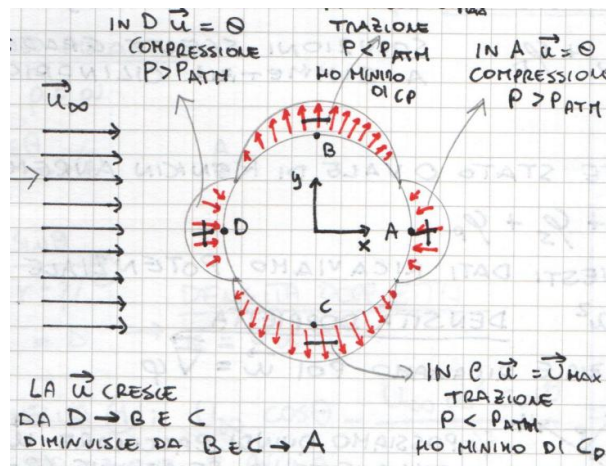


Figura 13: Diagramma di un cilindro in un campo di flusso. Le linee di flusso (freccie) sono mostrate da sinistra a destra. Il cilindro è etichettato con i punti A, B, C e D. Il punto A è al punto di ristagno anteriore ($\theta = 0$), il punto B è in alto ($\theta = 90$), il punto C è al punto di ristagno posteriore ($\theta = 180$), e il punto D è in basso ($\theta = 270$). Le etichette indicano le condizioni di flusso: “in D $u = 0$ ” (compressione, $P > P_{ATM}$), “in B $u = u_{max}$ ” (trazione, $P < P_{ATM}$, minimo C_P), “in A $u = 0$ ” (compressione, $P > P_{ATM}$), e “in C $u = u_{max}$ ” (trazione, $P < P_{ATM}$, minimo C_P). Una nota afferma “la u cresce da D \rightarrow B e C diminuisce da B \rightarrow C \rightarrow A”.

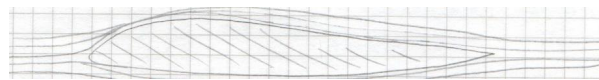


Figura 14: Diagramma di un profilo alare che mostra le linee di corrente e la separazione del flusso (la “scia”) che si stacca dal bordo posteriore.

La resistenza di forma: oggetto genera resistenza a causa della forma.

In un profilo alare si genera resistenza di attrito che si crea per il legato agli sforzi di taglio alla parete e non a differenza di pressione.

Se immagino un corpo di forma qualsiasi lo posso sostituire con cilindretti. Faccio i conti con la teoria del potenziale, integro e trovo Θ (con tutte le ipotesi).

Anche in questo caso la risultante è nulla.

0.2 Paradosso di d’Alembert

Per tirar fuori una forza diversa da 0 non posso considerare la ipotesi di viscosità perché andrebbe contro le ipotesi iniziali. Posso però immaginare di inserire vortice, cioè faccio rotare il quadro mo, oltre linee di corrente e doppietta, linee di flusso intorno. Aggiungo quindi singolarità di vortice che rompe simmetria.

$$\varphi = \varphi_{CU} + \varphi_D + \varphi_V$$

In questo caso l’espressione del C_p non è più valida.

Definiamo la rotazione in senso orario facendo i conti (prendo φ , K , ω , φ_V e trovo velocità con il gradiente, da lì ricavo velocità su superficie, $\Gamma = \omega$ e poi trovare pressione con Bernoulli. [Prova a farlo e calcola dove $u_\theta = 0$]).

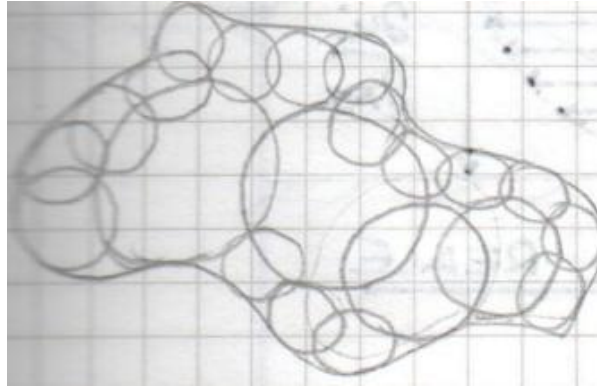


Figura 15: Diagramma che mostra una forma complessa composta da molti piccoli cerchi, che rappresenta un corpo fatto di cilindri.

I punti A e D si spostano verso il basso → per cui si spostano le linee di corrente:

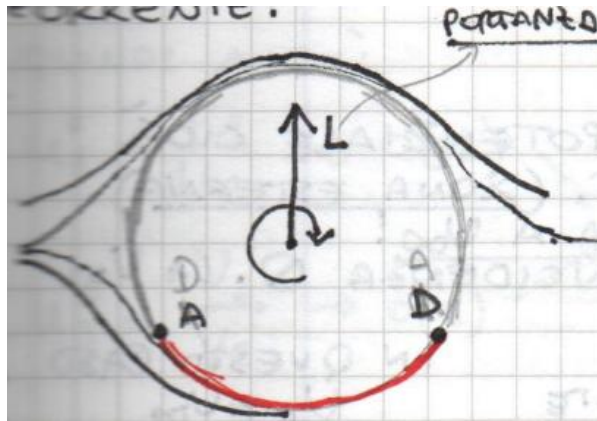


Figura 16: Diagramma di un cilindro circolare con un vortice al centro. I punti A e D sono marcati sulla superficie. Le frecce indicano la direzione del flusso e una freccia di vortice indica la rotazione. Una linea rossa è tracciata lungo la superficie inferiore.

Potenza.

Mi aspetto che le particelle che passano sopra siano più veloci:

Nasce quindi F_y perché tra monte e valle è tutto simmetrico mentre $F_x = 0$. La forza spinge in alto: infatti P è più bassa poiché le particelle sono più veloci.

Se avessimo rotazione in senso antiorario i punti di ristagno sono in alto.

Γ è positiva se rotazione è antioraria, negativa se oraria.

La portanza è legata a circolazione Γ al di là del segno.

Se calcolo C_p ottengo valore $\neq 0$ (integrando C_p e dimensionalizzando):

$$L = -\rho V_\infty \Gamma$$

↑ Per verso orario.

0.2.1 Teorema di Kutta-Joukowski

Erano due russi che misero le basi sull'aerodinamica. Al secondo intitolarono un paese.

Vale per tutti i corpi in cui si genera portanza perché posso immaginare profilo con cilindretti ognuno con propria circolazione. L'insieme dei cilindretti mi danno Γ e $-\Gamma$:

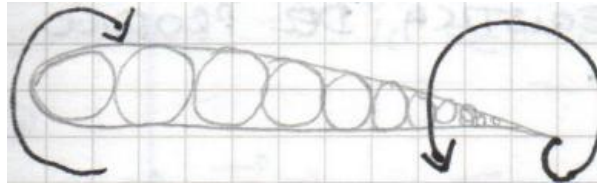


Figura 17: Diagramma che mostra una serie di piccoli cerchi (cilindri) disposti lungo un profilo, con frecce che indicano la direzione del flusso e la circolazione.

Come si fa ad aumentare Γ ?

Aumento l'angolo di incidenza, aumentando così la velocità delle particelle di sopra e di sotto, aumentando così Γ .

La resistenza D rimane però indeterminata.

(L'approccio diretto porta agli stessi risultati.)

La resistenza D è legata a forze viscosse che se non teniamo in conto non possiamo trovarla.

Grazie all'inserimento del vortice salviamo questo approccio che ci permette di calcolare la portanza. La resistenza è importante intorno alle pareti.

Con il modello del potenziale, in prossimità della parete, avremo una condizione di questo genere in cui il gradiente è nullo.

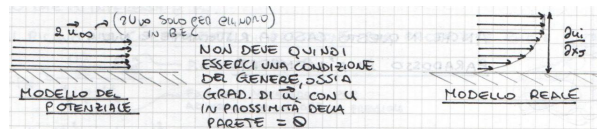


Figura 18: Diagramma che confronta il modello di flusso potenziale e il modello di flusso reale vicino a una parete.

Il diagramma mostra due profili di velocità vicino a una parete. A sinistra, etichettato “modello del potenziale”, la velocità \vec{u}_∞ è costante e parallela alla parete, con una nota “($2U_0$ solo per il vento) in B.E.”. A destra, etichettato “modello reale”, il profilo di velocità si curva verso la parete, con una freccia verticale che indica il gradiente $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Il testo sotto il modello di flusso potenziale afferma: “non deve quindi esserci una condizione del genere, ossia gradiente di \vec{u} con u in prossimità della parete = 0”.

Esiste quindi una zona in cui la velocità varia in maniera significativa pertanto l'effetto viscoso è rilevante in prossimità delle pareti. Quindi Re in prossimità parete è finito $\rightarrow Re \sim 1$. L'effetto è in genere limitato a parete. Il modello del potenziale non va bene nella realtà.

La zona in cui il gradiente varia per effetti viscosi è definito strato limite e tramite questo semplifichiamo la trattazione.

Dividiamo il campo in due zone: una in cui u rimane costante e uguale a U_∞ e una in cui ho gradiente. Tra le due zone cambia modello matematico.

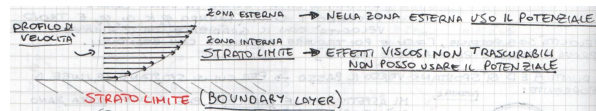


Figura 19: Diagramma del profilo di velocità che mostra la zona esterna e lo strato limite.

Il diagramma mostra un profilo di velocità con una regione esterna costante e una regione interna curva. La regione esterna è etichettata “zona esterna” e ha una freccia che punta al testo “nella zona esterna uso il potenziale”. La regione interna è etichettata “zona interna strato limite” e ha una freccia che punta al testo “effetti viscosi non trascurabili non posso usare il potenziale”. L’intera regione interna è anche etichettata “strato limite (boundary layer)”.

Definiamo (U_e) = velocità che in un punto calcolo con il potenziale cioè è per “esterno” con modello inviscido o modello potenziale (zona esterna). È importante ricordare che U_e non è uguale per forza a U_∞ . Sono uguali solo nel caso della lastra piana con incidenza $\theta = 0$. La U_∞ è ammessa con la struttura.

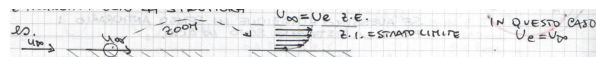


Figura 20: Diagramma dello strato limite per una lastra piana e una superficie curva.

Il diagramma mostra due casi. A sinistra, per una lastra piana, la velocità di corrente libera U_∞ è uguale alla velocità al bordo U_e , con una nota “200m”. A destra, per una superficie curva, la velocità di corrente libera U_∞ non è uguale a U_e , con una nota “200m”. Un’etichetta “z.l. = strato limite” punta allo strato limite. Una nota cerchiata dice “in questo caso $U_e \neq U_\infty$ ”.

Se ho superficie curva:

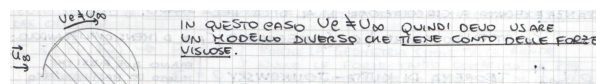


Figura 21: Diagramma di una superficie curva che mostra lo strato limite.

Il diagramma mostra una superficie curva con uno strato limite. La velocità di corrente libera U_∞ non è uguale alla velocità al bordo U_e . Una nota afferma “in questo caso $U_e \neq U_\infty$ quindi devo usare un modello diverso che tiene conto delle forze viscosi”.

Dobbiamo prima di tutto fare questa considerazione:

Il diagramma mostra uno strato limite di spessore δ su una superficie. Una condizione è elencata: $L_0 \gg \delta$ con L_0 lunghezza caratteristica del profilo e δ spessore strato limite.

Se la ipotesi non è soddisfatta, bisogna usare set completo di equazioni.

A questo punto, con ipotesi valida, dobbiamo usare due scale adimensionali diverse:

$$U_i^* = \frac{U_i}{U_0} \quad \text{e} \quad x_i^* = \frac{x_i}{L_0} \quad (\text{con 1 sola scala per adimensionalizzare}).$$

Con strato limite le cose cambiano.

Scelgo un sistema di riferimento di parete che non corrisponde ad assi vento né assi corpo.

\vec{v}_e

Associo a:

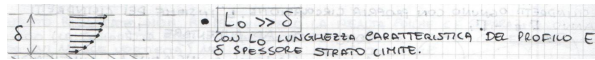


Figura 22: Diagramma dello spessore dello strato limite.



Figura 23: Diagramma di un sistema di coordinate con assi x e y . Un vettore v_e è mostrato che punta verso l'alto dall'origine. Una linea tratteggiata rappresenta un confine o una parete.

$$y \sim \delta x \sim l_0$$

Sto cercando di capire come adimensionalizzare.

Devo quindi usare due scale diverse:

$$y^* = \frac{y}{\delta} = O(1)$$

$$x^* = \frac{x}{l_0} = O(1)$$

Voglio dire che se adimensionalizzo y con δ avrei trovato valore molto più piccolo di 1, più grande x con δ .

Sintetizzando:

Il problema dello strato limite è un problema a 2 scale, quindi quando passo da visione globale a locale non ho più 1 scala ma 2. Adimensionalizzando non vedo più la differenza.

Nello strato limite dobbiamo considerare che ci sia piccola componente in y , quindi: \leftrightarrow (grandezze di riferimento)

$$\vec{v}_e = (v_e, v_e) \quad \text{dove } v_e \gg v_e \leftarrow (\text{servono come grandezze per adimensionalizzare})$$

Quindi avrò:

$$u_1^* = \frac{U_1}{v_e} \rightarrow O(1)$$

$$u_2^* = \frac{U_2}{v_e} \rightarrow O(1)$$

Al posto di U_1 e U_2 si userà $u \cdot \vec{e}_N$.

Stessa operazione va fatta nel caso di gruppi adimensionali:

$$Re = \frac{\rho_0 U_e l_0}{\eta} = \infty \quad \leftarrow (\text{quantità associate a mondo esterno}) \quad (\text{è campo potenziale})$$

$$Re = \frac{\rho_0 v_e \delta}{\eta} \sim 1 \quad (\text{è piccolo poiché è strato limite})$$



Figura 24: Diagramma di un dominio circolare con tratteggio diagonale. Sei frecce puntano verso l'esterno dal confine, rappresentando un sistema di riferimento.

Le equazioni che tratteremo avranno una serie di ipotesi:

Devo riprendere set equazioni complete e adimensionalizzate ←

- Continuiamo a lavorare in 2D $\rightarrow u \in (u, \eta)$
- $St \rightarrow \infty \rightarrow$ flusso stazionario
- $Fr \rightarrow \infty \rightarrow$ forza di massa trascurabile
- $\eta < 0,3$ e $Bo \ll 1$ flusso incompressibile $\rightarrow E \ll 1$
- ρ costante il set di equazioni diventerà

Uguale a prima ma Re non c'è ma ce St.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \vec{f}$$

Non c'è equazione di energia.

Le incognite saranno u, η, p (3).

$$\text{L'equazione di continuità diventerà: } \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

Set equazioni di strato limite non adimensionalizzate.

Devo esplicitare le altre equazioni:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Equazione Navier-Stokes proiettata lungo x.

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Equazione Navier-Stokes proiettata lungo y.

Per effettuare la adimensionalizzazione:

$$u^* = \frac{u}{V_e} = O(1)$$

$$v^* = \frac{v}{V_e} = O(1)$$

$$y^* = \frac{y}{\delta} = O(1)$$

$$x^* = \frac{x}{L_0} = O(1)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} = O(1)$$

Lezione fluidodinamica 27 maggio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

Sotto particolari ipotesi il set di equazioni diventa così. Sono equazioni generali che non riguardano solo strato limite. Con ulteriori semplificazioni arriviamo a equazioni applicate a strato limite.

La semplificazione delle equazioni al di là delle ipotesi del gruppo adimensionale, sta nella visione 2D e nelle 2 scale dimensionali.

Dobbiamo scegliere grandezze di riferimento per adimensionalizzare:

$$x^* = \frac{x}{L_0} = O(1)$$

$$y^* = \frac{y}{\delta} = O(1)$$

$$u^* = \frac{u}{V_e}$$

$$v^* = \frac{v}{V_e}$$

V_e, L_0, V_e, δ .

Devo utilizzare 2 scale diverse nella zona viscosa.

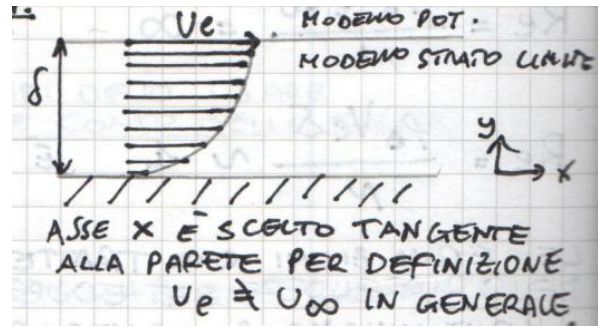


Figura 25: Diagramma di un profilo dello strato limite. Un asse verticale rappresenta la velocità u e un asse orizzontale rappresenta la distanza dalla parete y . Il profilo mostra una forma simile a una parabola che inizia dalla parete ($y=0$) e raggiunge una velocità di corrente libera V_e al bordo dello strato limite. Lo spessore dello strato limite è indicato da δ . Il diagramma è etichettato “modello pot.” e “modello strato limite”. Sotto il diagramma, afferma “asse x è scelto tangente alla parete per definizione” e “ $V_e \approx U_\infty$ in generale”.

Posso definire due numeri di Reynolds, $Re_{\text{strato limite}}$ e $Re_{\text{campo esterno}}$:

$Re = \frac{\rho_0 V_e L_0}{\mu}$ è grande: è associato al flusso potenziale esterno.

Associato al flusso potenziale.

Adimensionalizziamo:

Equazione di continuità / equazione di conservazione della massa:

$$\frac{u_e}{L_0} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_e}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Divido per $\frac{V_e}{L_0}$ arbitrariamente (potrei farlo anche con $\frac{V_e}{\delta}$):

$$\underbrace{\frac{u_e}{V_e} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{L_0}{\delta} \frac{V_e}{V_e} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{o(1)} = 0 \rightarrow \text{anche } \frac{V_e}{\delta} \frac{L_0}{V_e} \text{ deve essere di ordine di } 1 \sim o(1)$$

Quindi $\frac{V_e}{V_e} \sim \frac{\delta}{L_0}$. Il rapporto tra scale di lunghezze deve essere uguale a scale di velocità.

Equazione di Navier-Stokes (adimensionata solo 1 equazione, stesso ragionamento per l'altra).

Devo considerare ρ costante (non adimensionata) e considero $p^* = \frac{p}{p_0}$:

$$\rho \frac{u_e^2}{L_0} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho \frac{V_e V_e}{\delta} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{p_0}{L_0} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \frac{u_e}{L_0^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \mu \frac{u_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\text{Divido } \rho \frac{u_e^2}{L_0} \rightarrow u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \underbrace{\rho \frac{V_e V_e}{\delta} \frac{L_0}{\rho u_e^2} v^*}_{o(1)} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \dots$$

$o(1)$ quindi lo posso eliminare.

Quindi:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{p_0}{L_0} \frac{L_0}{\rho V_e^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dots$$

$\frac{1}{\text{Re}}$ numero di Ruark \rightarrow scegliamo pressione di riferimento = pressione dinamica $\Rightarrow \text{Re} = 1$. È la pressione di V_e che assumiamo = pressione di riferimento. Poiché è la pressione esterna.

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\mu \frac{V_e}{L_0^2} \frac{L_0}{\rho V_e^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}}_{1/\text{Re}} + \mu \frac{V_e}{\delta^2} \frac{L_0}{\rho V_e^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Adesso semplifichiamo:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\delta^2} \frac{L_0 \mu}{\rho V_e} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Quindi raggruppiamo l'ultimo termine in modo diverso:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left(\frac{L_0^2}{\delta^2} \right) \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

In cui ho moltiplicato e diviso per L_0 così da far apparire Re .

\rightarrow Scegli (u, v) .

Quindi se V_e è associata a campo potenziale $\rightarrow \text{Re} \rightarrow \infty$.

Per far scomparire termine viscoso nell'equazione, $\left(\frac{L_0}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\text{Re}} \sim 1$. Se non facessi questa assunzione $1/\text{Re}$ andrebbe a 0, quindi saremmo solo in campo potenziale quando invece l'equazione è generica.

Quindi $\frac{\delta}{L_0} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ stima per ordini di grandezza.

$L_0, L_0 = 1 \text{ m}$ e $\text{Re} \sim 10^6$ (non eccessivamente grande) $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{1}{10^3} \rightarrow \delta = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$.

L'altra equazione si tratta allo stesso modo. Riscriviamo i risultati trovati.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial y^*} \end{array} \right.$$

Divido tutto per ρ . Faccio tendere $\text{Re} \rightarrow \infty$ quindi sparisce uno dei due termini viscosi e rimane quello in y .

$$\text{Re} \frac{\delta}{L_0} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

Facendo tendere $\text{Re} \rightarrow \infty$ si ottiene un risultato particolare:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

Al posto di tutta l'equazione di Navier-Stokes ci è solo 1 termine che rimane dell'ordine di 1.

La pressione non è quindi incognita.

p_e essendo nel mondo potenziale è legata a U_e .

$$p(y) = \text{costante}$$

Quindi $p_w = p_e$ poiché p è costante lungo y ma non lungo x .

Quindi per calcolare il nuovo strato limite la posso calcolare tramite la p_e corrispondente lungo y . La 2° equazione cioè.

Quindi la 2° equazione di Navier-Stokes non mi serve più.

$$p^* = p_e^* \rightarrow p^*(x) = p_e^*(x) \quad \text{quindi la } p \text{ dipende da } x \text{ ma non da } y.$$

Le equazioni nuovo strato limite non sono più 2 ma 3.

Prendo l'equazione di Bernoulli e derivando:

$$p_e + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = \text{costante} \quad (\text{in un dato } x \text{ intorno al corpo})$$

← Non ci sono gli asterischi.

$$\frac{dp_e}{dx} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = 0 \quad (\text{abbiamo derivato Bernoulli})$$

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

Equivalente a scrivere: ↓

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = u_e^* \frac{dU_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Queste equazioni (equazione di continuità + Navier-Stokes) si chiamano:

Equazioni di Prandtl (equazioni dentro strato limite) ←

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \end{array} \right.$$

Equazione adimensionale ←

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = U_e^* \frac{dU_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \Leftrightarrow u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p_e^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{array} \right.$$

E in forma dimensionale: ←

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

0.3 Separazione dello strato limite

Queste equazioni ci servono nello studio dei flussi intorno ai corpi (flussi che si distaccano). Flusso si stacca da parete.

0.3.1 Caso reale

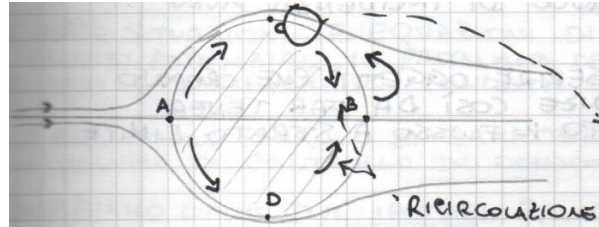


Figura 26: Diagramma della separazione del flusso intorno a una superficie curva. Le linee di corrente sono mostrate che si avvicinano da sinistra, seguono la superficie fino al punto A, poi si curvano intorno al punto B, e infine si riattaccano al punto C. La regione tra B e C è etichettata “ricircolazione”.

Flusso non riesce ad agliare la parete → il flusso si stacca dalla parete. Le 2 linee di corrente non seguono più parete.

Ingrandiamo parete: (analisi qualitativa)

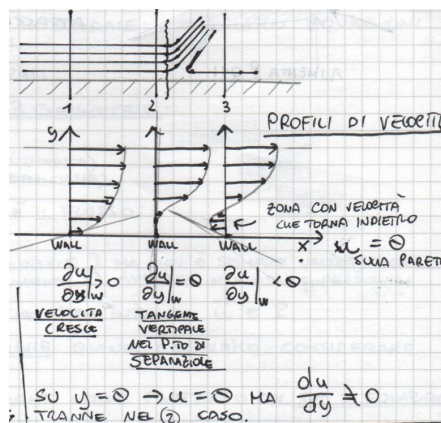


Figura 27: Tre diagrammi di profilo di velocità (1, 2, 3) che mostrano il flusso vicino a una parete. Il profilo 1 mostra il flusso attaccato con uno strato limite. Il profilo 2 mostra la separazione del flusso con una zona di ricircolazione. Il profilo 3 mostra la separazione del flusso con una zona di ricircolazione e una scia. L’asse x è etichettato “parete” e l’asse y è etichettato “y”. I profili sono etichettati “profili di velocità”.

$u = 0$ sulla parete.

$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ velocità cresce.

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ tangente verticale nel punto di separazione.

$\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ zona con velocità che torna indietro.

Su $y = 0 \rightarrow u = 0$ ma $\frac{du}{dy} \neq 0$ tranne nel 2° caso.

Va guardato nel punto $y = 0$ (W).

1° caso: flusso attaccato $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_W < 0$ concavità verso il basso.

2° caso: punto di separazione $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_W > 0$ concavità verso l'alto.

3° caso: flusso separato $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_W > 0$ concavità verso l'alto.

Ciò mi dice che la derivata seconda deve essere positiva cioè $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$ affinché ci sia separazione; non ci garantisce però che sia separato: è condizione necessaria ma non sufficiente \rightarrow se $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ ho flusso separato.

In condizioni incompressibili.

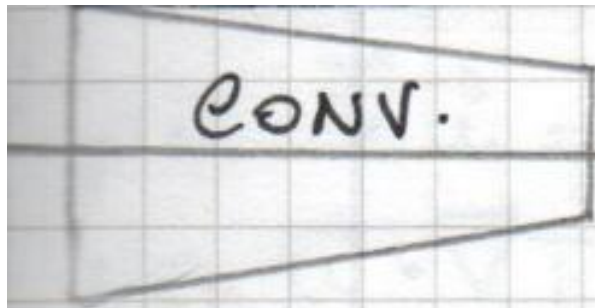


Figura 28: Diagramma di un condotto convergente etichettato “conv.” con una freccia che punta a destra.

$\frac{dP_e}{dx} < 0$, $u \uparrow$. Non ho separazione.

Quando ho gradiente di pressione $< 0 \rightarrow$ no separazione.

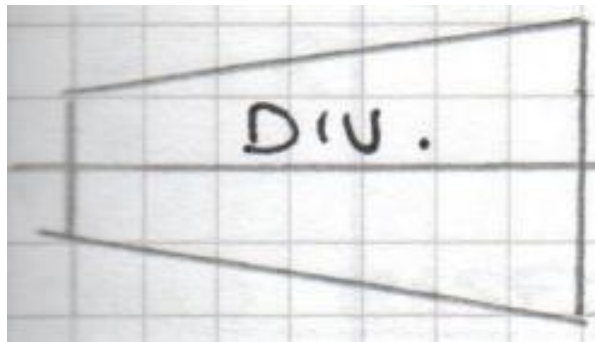


Figura 29: Diagramma di un condotto divergente etichettato “div.” con una freccia che punta a destra.

$\frac{dP_e}{dx} > 0$, $u \downarrow$. Posso avere separazione.

Gradiente di pressione $> 0 \rightarrow$ posso avere separazione.

$$\frac{dP_e}{dx} > 0$$

$\frac{dP_e}{dx} > 0$ è condizione avverso \rightarrow

Per rendere gradiente piccolo (quindi variazione di pressione piccola) la posso avere con condotti debolmente variabili.

Nella galleria del vento il diffusore () è molto lungo; negli aerei la presa dinamica (diffusore) non la si può fare lunga; si cerca di comprimere il flusso prima (all'esterno).

Ciò spiega perché aumentando l'angolo di incidenza avrò separazione prima:

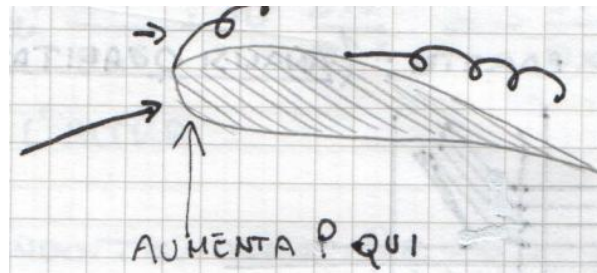


Figura 30: Diagramma di un profilo alare che mostra la separazione del flusso. Una freccia indica il flusso da sinistra a destra. Il flusso si separa dalla superficie superiore, creando una regione di flusso ricircolante (ombreggiata con linee diagonali). Il testo “aumenta P qui” punta a questa regione separata.

Posso inserire oggetti che creano turbolenze così da far tener attaccato il flusso a strato limite.

0.4 Flussi compressibili in condotti

Nei flussi compressibili ρ gioca un ruolo importante.

In certe situazioni le equazioni di governo si semplificano. Abbiamo visto flussi potenziali, il problema dello strato limite e adesso vediamo i flussi compressibili in condotti che devono rispettare alcune caratteristiche.

Le equazioni saranno di carattere integrale: integriamo equazioni a volume di controllo di condotti.

Dobbiamo fare due ipotesi principali:

1) Condotti sono in generale in 3 geometrie:

- Condotta a sezione costante
- Condotta divergente (sezione aumenta)
- Condotta convergente (sezione diminuisce)

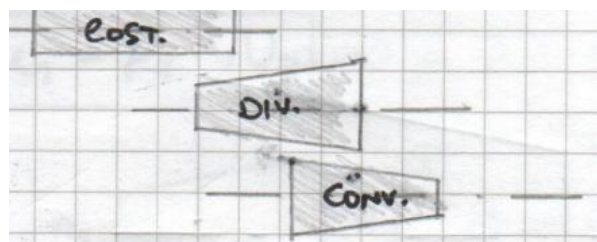


Figura 31: Diagramma che mostra tre tipi di geometrie di condotto: un rettangolo orizzontale per “cost.” (sezione trasversale costante), un trapezio che si allarga a destra per “div.” (divergente), e un trapezio che si restringe a destra per “conv.” (convergente).

0.5 Geometrie di condotti

Il condotto è la geometria, un condotto è il flusso.

In generale possiamo dire che:

- Se sezione aumenta \rightarrow velocità diminuisce, ma non è sempre valida, come avviene in flussi supersonici.
- Viceversa l'opposto \rightarrow pressione aumenta.

Il numero di Mach ci dà informazioni su \bar{u} e \bar{p} .

0.5.1 Ipotesi fondamentali

1. $M > 0,3$: poiché il flusso è compressibile, dobbiamo considerare l'intero set di equazioni.
2. Fatte queste ipotesi, dobbiamo farne altre partendo dal set di equazioni:
 - $Re \rightarrow \infty$: la dimensione dei condotti è a livello industriale, quindi ci parla di condotti di almeno qualche cm di diametro, quindi non sono piccoli. Pertanto U_0 lo sono abbastanza grandi \rightarrow da cui Re grande.
 - $Fr \rightarrow \infty$: forze di massa trascurabili. Avremo gas o aria, quindi è levato considerare ciò. Inoltre, condotti hanno in genere stessa altezza, quindi la gravità non influisce molto.
 - $St \rightarrow \infty$: flusso stazionario. Il tempo caratteristico del fenomeno è molto lungo.
 - $Ru = 1$: non siamo in presenza di cavitazione $\rightarrow p_{ref} = p_{din}$.
 - $\rho g = 0$.
 - $\bar{R} = 0 \rightarrow$ ma comunque si eliminerà per via di $\frac{1}{RePr} \rightarrow$ condotto adiabatico: riprendi eq. adimensionalizzate.

Il set di equazioni diventa:

Non c'è scambio di calore attraverso le pareti.

Per giungere a questo set si è partiti da eq. adimensionalizzate e, una volta applicate le ipotesi, si ridimensionalizza.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p \\ \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \vec{u} \cdot \nabla p \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases} \quad (1)$$

Voglio trasformare l'equazione da forma differenziale a forma integrale.

Adesso semplifico il set con l'introduzione di un condotto generico:

- Scegliamo un sistema di riferimento.
- Allineiamo asse x con u_0 (e in questo passo è allineato anche con asse geometrico).

Ho flusso che si muove con direzione preferenziale.

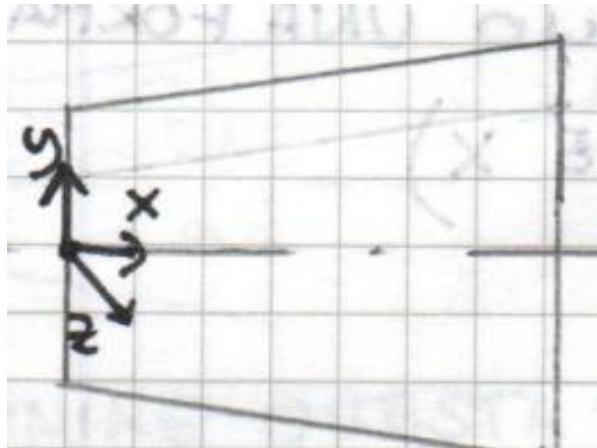


Figura 32: Diagramma di un condotto generico con sistema di coordinate (x, y) e vettore velocità u_0 che punta a destra.

0.5.2 Velocità in un punto arbitrario

In un punto arbitrario nel condotto avrò: $\vec{u}(u, \eta, w)$ (3D).

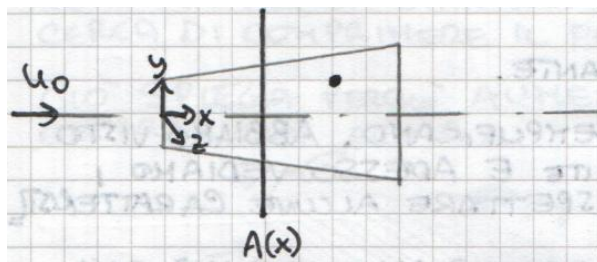


Figura 33: Diagramma di un sistema di coordinate 3D (x, y, z) con vettore u e sezione trasversale $A(x)$.

Considerando una sezione generica $A(x)$ avrò che:

$$\frac{dA}{dx} \neq 0 \text{ ma assumo che } \frac{dA}{dx} = \text{piccolo} \quad (2)$$

Il condotto è a sezione debolmente variabile.

La prima conseguenza la trovo su componenti della velocità.

Per le ipotesi che abbiamo fatto la velocità è parallela alla parete, quindi non ho strato limite (non ho il gradiente).



Figura 34: Diagramma di un condotto rettangolare con profili di velocità u e w mostrati come frecce parallele.

Se la sezione varia poco ci possiamo aspettare che le componenti trasversali η e w sono più piccole di u :

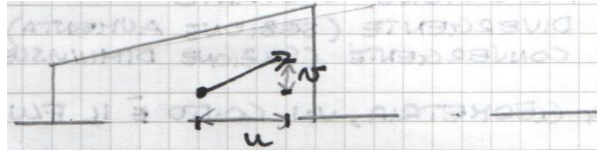


Figura 35: Diagramma di un condotto rettangolare con profilo di velocità u e vettore normale n .

$$u \gg \eta \quad \text{e} \quad u \gg w \tag{3}$$

Se avessimo condotto del tipo: ciò non sarebbe più vero poiché η e w avrebbero stesso ordine di grandezza di u .

0.5.3 Riduzione delle incognite

Altra ipotesi che consegue da queste considerazioni è che le incognite (6) diventano (4):

$$(u, \eta, w, p, T, \rho) \rightarrow (u, p, T, \rho) \tag{4}$$

Dove: $\rho(x, y, z)$; $u(x, y, z)$, $T(x, y, z)$ e $p(x, y, z)$.

Adesso consideriamo lo stesso condotto:

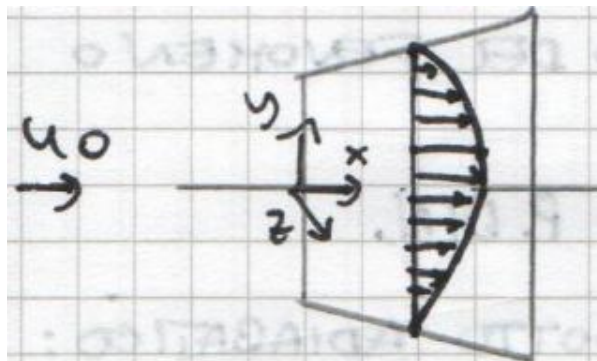


Figura 36: Diagramma di un condotto con contorno curvo e profilo di velocità u .

Se ci fosse lo strato limite la velocità potrebbe variare anche solo con componente u che varia sia in x che in $y \rightarrow u(x, y)$.

Ciò non è accettabile dalle ipotesi poiché ci sarebbero termini viscosi; quindi u dipende solo da x : $u(x)$.

Spostandoci lungo x ovviamente u può variare di intensità; lo stesso discorso si estende a p, T e ρ :

$$\rho(x); \quad u(x); \quad p(x) \text{ e } T(x) \tag{5}$$

Quindi avremo di conseguenza che tutte le derivate diverranno:

$$\frac{d\circ}{dy} = \frac{d\circ}{dz} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\circ}{dx} \neq 0 \tag{6}$$

Sono ipotesi che semplificano molto l'equazione.

L'obiettivo è quello di integrare le equazioni; voglio una forma del tipo:

$$\frac{d}{dx}(\dots) = 0 \quad (\text{in } x \text{ poiché la var. indipendente è } x) \quad (7)$$

Integro:

$$(\dots) = \text{costante} \quad (8)$$

0.5.4 Equazioni semplificate

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (1) \quad (9)$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (2) \quad (10)$$

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \frac{dp}{dx} \quad (3) \quad (11)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{già integrata}) \quad (4) \quad (12)$$

Scelgo volume di controllo con volume del condotto:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \rightarrow \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \xrightarrow{\text{risolvo come in idro}} \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad (13)$$

Ove $\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = -\iint_{A_1} \rho_1 u_1 dS = -\rho_1 u_1 A_1$

Costanti su y e z.

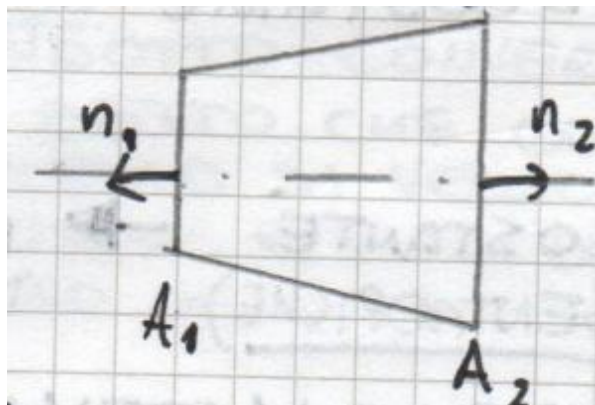


Figura 37: Diagramma di una sezione di tubo con area A_1 a sinistra e A_2 a destra. Vettori normali n_1 e n_2 puntano verso l'esterno. Freccie indicano la direzione del flusso da sinistra a destra.

Qualunque volume di controllo prendo nella sezione:

$$\boxed{\rho u A = \text{costante}} \quad \text{in cui } \rho \rightarrow \rho(x); u \rightarrow u(x); A \rightarrow A(x) \quad (14)$$

Conservazione portata in massa.

Non riesco a scrivere $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$ della quantità di moto poiché non posso portare le variabili all'interno. Ci si torna dopo.

Prendo ora l'equazione dell'energia:

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \frac{dp}{dx} \xrightarrow{\text{dalla (2)}} \rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \left(-\rho u \frac{du}{dx} \right) \rightarrow \text{porto tutto al primo membro; e riscrivo come:} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx}(c_p T) + u \frac{du}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(c_p T) + \frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = 0 \rightarrow \boxed{c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante}} \quad (17)$$

C'è termine che assomiglia ad Eckert.

Quindi riscrivendo il set di equazioni:

L'equazione della quantità di moto non posso usarla.

$$\begin{cases} \rho u A = \text{costante} & (\text{eq. massa}) \\ c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} & (\text{eq. energia}) \\ \frac{p}{\rho} = RT & (\text{eq. stato}) \end{cases} \quad (18)$$

Manca una equazione.

L'ultima equazione riguarderà la trasformazione che subisce il flusso in un condotto.

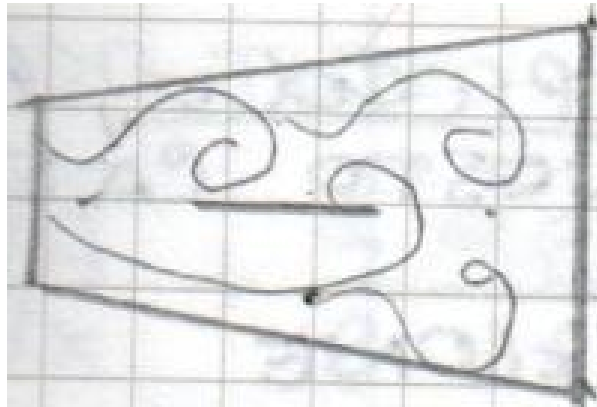


Figura 38: Diagramma di una sezione di tubo con una linea ondulata all'interno, che rappresenta una trasformazione o processo che si verifica all'interno del flusso.

Avremo che ρ, p, T e u cambiano ma che trasformazione termodinamica subisce il fluido?

Per definire questa trasformazione, riprendiamo eq. energia in forma entropica.

Arrivando a questo risultato:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S \quad (19)$$

Se abbiamo variazione di entropia nel fluido:

- Dissipazione: $\rho\Phi^2$
- Produzione calore: ρq
- Scambio calore: $\rho c_p \nabla^2 T$

Ma con le nostre ipotesi vanno via tutte e 3, da cui:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0} \rightarrow S = \text{costante lungo una linea di flusso} \quad (20)$$

Flusso isoentropico (non lo sto ipotizzando ma è conseguenza delle ipotesi).

Quindi il set di equazioni sarà: flussi compressibili del modello quasi-1D.

$$\begin{cases} \rho u A = \text{costante} \\ \rho c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante} \\ (\text{isoentropiche}) \end{cases} \rightarrow \text{con entropia costante posso usare una delle 3 relazioni entropiche. Maniera alternativa} \quad (22)$$

Questo modello matematico è definito quasi-1D.

È modello molto usato nella gas dinamica; poiché c'è solo variabile x , il quasi indica che l'area cambia in funzione di x . Sarebbe unidimensionale con condotto costante. Dovremmo quindi considerare anche $A(x)$ come variabile oltre a ρ, p, T, u .

Conoscendo quindi quantità in ingresso e la geometria posso calcolare la quantità in uscita con questo set di equazioni.

È approccio molto usato nella progettazione.

In generale, però, la variabile cinematica non è mai il [???] ma il numero di Mach (sempre $M > 0, 3$).

Presa dinamica.

0.6 Fluidodinamica, 4 giugno

Abbiamo scritto equazioni integrali in condotti con sezione debolmente variabile considerando flussi compressibili.

Il dominio è definito in maniera arbitraria (da A_1 a A).

Noi conosciamo ρ, p, T in A_1 da cui abbiamo trovato un set di equazioni:

→ [???] ρ sezione variabile e non costante.

Modello quasi-1D:

$$\begin{cases} \rho u A = \text{costante} & (\text{eq. massa o eq. continuità}) \\ \rho c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} & (\text{eq. energia in termini entalpici}) \\ \frac{p}{\rho} = RT & (\text{eq. di stato}) \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante} & (\text{equazione per sostituire equazione di quantità di moto e flusso isoentropico tra sezione } A_1 \end{cases} \quad (23)$$

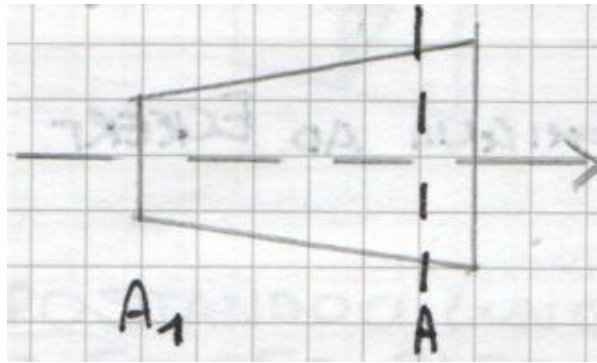


Figura 39: Diagramma di un condotto con sezione trasversale variabile. Il condotto inizia con una sezione trasversale A_1 e termina con una sezione trasversale A . L'area A è indicata da una linea tratteggiata. Una freccia punta a destra, indicando la direzione del flusso.

L'ipotesi fondamentale è che la variazione di area sia piccolo, per cui le variabili sono in funzione di un solo asse, in questo caso x e non y o z .

Fissato valore di x , tutte le quantità sono note in tutta la sezione (conosciamo anche $A(x)$ fissando x).

L'area la considero comunque assegnata.

Se ho $A(x)$ assegnato, abbiamo 4 incognite per 4 equazioni (che posso quindi risolvere).

Dato un $A(x) \rightarrow$ trovo le altre variabili (C_p , R e γ sono "costanti" a meno che non effettuiamo applicazioni particolari, ps. ΔT non troppo alta).

Per continuare voglio tirare fuori il numero di Mach da queste equazioni:

Si parte da $\rho u A = \text{costante}$. Cosa succede alle variabili se modifico M ?



Figura 40: Diagramma di un condotto convergente. Una forma trapezoidale si restringe da sinistra a destra. Una freccia etichettata 'x' punta a destra. L'area è ombreggiata con linee diagonali.

$$\frac{dA}{dx} < 0 \tag{24}$$

Condotto convergente.

$$\frac{dA}{dx} > 0 \tag{25}$$

Condotto divergente.

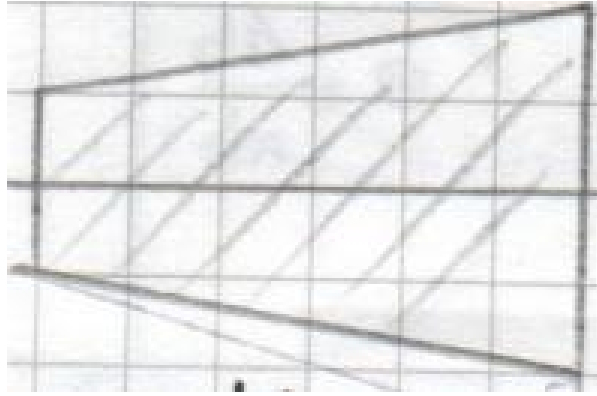


Figura 41: Diagramma di un condotto divergente. Una forma trapezoidale si allarga da sinistra a destra. Una freccia etichettata 'x' punta a destra. L'area è ombreggiata con linee diagonali.

Non si deve confondere la geometria con il comportamento fisico del flusso:

Un condotto convergente non è detto che comporti un aumento di velocità del flusso. Quindi le variabili non posso dedurle a priori.

Non va quindi confusa la geometria con: da eq. diff. quantità di moto. Caratteristica geometria non è caratteristica fisica.

0.6.1 Condotto convergente

$$\frac{dA}{dx} < 0 \quad (26)$$

Non è ugello propulsivo: $\rho \downarrow, u \uparrow$.

Come avviene in idrodinamica:

- In genere è parte finale che genera spinta in un motore a reazione; u cresce \uparrow , ρ diminuisce \downarrow .

0.6.2 Condotto divergente

$$\frac{dA}{dx} > 0 \quad (27)$$

Non è diffusore (o presa dinamica): $u \downarrow, \rho \uparrow$.

- Flusso rallenta; u diminuisce \downarrow , ρ aumenta \uparrow , genera u più bassa.

Se riprendiamo eq. differenziale della quantità di moto:

Equazione che non siamo riusciti a semplificare in più.

$$\rho u \frac{du}{dx} = - \frac{dp}{dx} \quad (28)$$

Se cresce uno, diminuisce l'altro.

Quindi è totalmente diverso dall'idrodinamica.

Analizziamo eq. di continuità in cui c'è informazione sulla geometria. Vogliamo combinare geometria con velocità.

$$\frac{dA}{dx} \leftarrow \frac{du}{dx} \quad (29)$$

Voglio combinare queste due derivate.

Derivo in $x \rightarrow \rho u A = \text{costante}$, quindi:

$$\rho u \frac{dA}{dx} + \rho A \frac{du}{dx} + u A \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad \leftarrow (\text{costante}) \quad (30)$$

Legame geometria-fisica. Derivazione $\rho u A$.

Divido tutto per $\rho u A$:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0 \quad (31)$$

L'elemento che devo manipolare è $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx}$ perché gli altri li ho trovati.

Utilizzo quindi l'eq. di quantità di moto ma devo effettuare un doppio passo:

$$\boxed{p \rightarrow \frac{1}{c_0^2} \rightarrow \frac{1}{c_0^2} \text{ E.Q.M.}} \quad \text{passaggi tra relazioni differenziali} \quad (32)$$

Uso $c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ velocità del suono \rightarrow entropia è costante (flusso isoentropico).

Quindi riscrivo:

$$\partial p = c_0^2 \partial \rho \quad (33)$$

Allora derivo per x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot c_0^2 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (34)$$

Allora da equazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c_0^2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} c_0^2 = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (35)$$

Ho trovato $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, quindi sostituisco il risultato nello sviluppo fatto prima di $\rho u A$:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{in cui abbiamo spostato i termini diverso da A al secondo membro} \quad (36)$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{u^2}{c_0^2} - 1 \right) \quad (37)$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} (M^2 - 1) \tag{38}$$

Relazione fondamentale: A è u con M.

Flussi supersonici e flussi subsonici.

Ciò che definisce flusso compressibile è $M > 1$ o $M < 1$.

Flussi sonici $\rightarrow M = 1$.

A seconda se $M > 1$ o $M < 1$ cambia il segno della derivata, poiché $\partial u / \partial x$ cambia segno a seconda del valore di $(M^2 - 1)$.

	$M < 1$	$M > 1$
$\frac{\partial A}{\partial x} < 0$ (convergente)	$\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ Ugello propulsivo	$\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ Diffusore
$\frac{\partial A}{\partial x} > 0$ (divergente)	$\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ Diffusore	$\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ Ugello propulsivo

Nel caso di $M > 1$ (flussi supersonici):

Essendo $\rho u A = \text{cost}$, ad un aumento di u e variazioni di A corrisponde una compensazione della densità.

Flusso quasi incompressibile con competizione tipica. Comportamento diverso da quello tipico.

Esempio pratico di questo comportamento atipico:

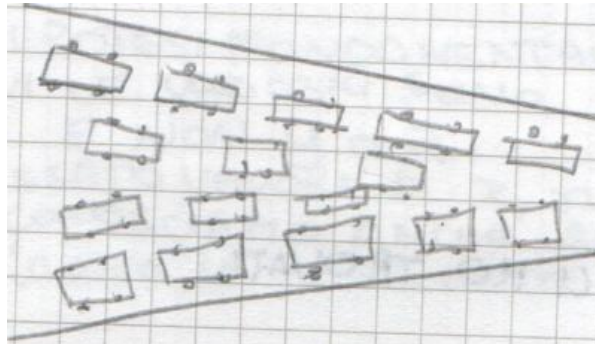


Figura 42: Diagramma che mostra una griglia di auto nel traffico, che rappresenta un ingorgo o congestione.

Macchine in strettoia. È comportamento di fluidi incompressibili o in generale di liquidi. Traffico in strettoia.

Prendiamo ora il caso di $M = 1$, avremo:

$$M = 1 \text{ quando } \frac{dA}{dx} = 0 \text{ (infatti } \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = -\frac{1}{u} \frac{du}{dx} (M^2 - 1)\text{)}.$$

Si annulla con $M = 1$.

- Sono due casi in cui $dA/dx = 0 \leftrightarrow M = 1$:
 - Condotta costante (quindi avremo $M = 1$ in tutto il condotto).
 - Quando area è a minimo o massimo.

Il caso (2) è raramente usato (matematicamente corretto). Il caso (1) è quello ingegneristicamente più utile.

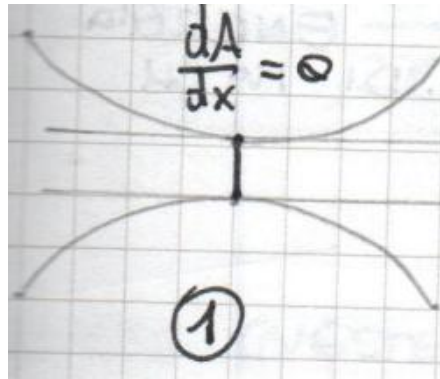


Figura 43: Diagramma di una sezione di ugello (1) che mostra un punto di area minima dove $dA/dx = 0$. Il flusso è subsonico ($M < 1$) su entrambi i lati.

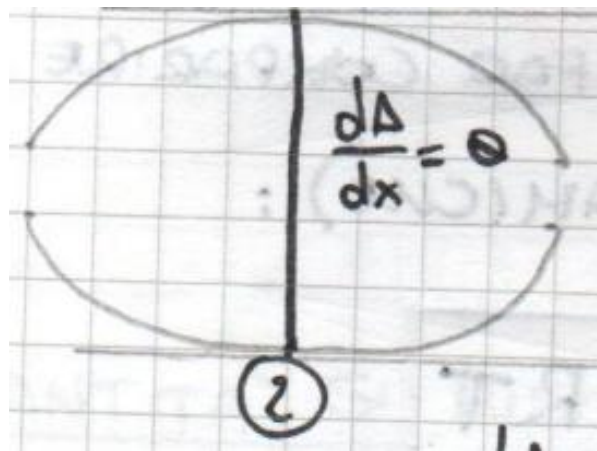


Figura 44: Diagramma di una sezione di ugello (2) che mostra un punto di area massima dove $dA/dx = 0$. Il flusso è supersonico ($M > 1$) su entrambi i lati.

Quindi solo nelle sezioni $\frac{dA}{dx} = 0$ ho $M = 1$, altrove no! L'area minima (1) si chiama gola (throat).

Ovviamente non significa che se ho una gola allora avrò per forza $M = 1$: se impongo flusso e per qualche motivo ho $M = 1$ allora sarà situato nella gola per definizione.

C'è situazioni in cui si deve passare da $M > 1$ a $M < 1$ o viceversa. Se passo da $M < 1$ a $M > 1$ o da $M > 1$ a $M < 1$ avrò per forza un $M = 1$ da qualche parte.

(Guarda la tabella)

Passaggio tra Mach. Convergente-divergente.

Accelerazione.

La condizione $M = 1$ corrisponde a massima portata smaltita in un condotto:

$Q_{\max} \Rightarrow M = 1$ da definizione.

$M = 1$ limita la portata in condotto (condizione di choking). Soffocamento.

Più di tot. massa non può passare, esempio:

Pensiamo a condotto solo convergente o solo divergente; il flusso è accelerato (conv.) gradualmente dall'apertura di una valvola che regola la pressione in uscita. Se un serbatoio fissa p_{in} , la valvola aumenta la diff. di pressione, aumentando la velocità del flusso. Seguendo minima, ma

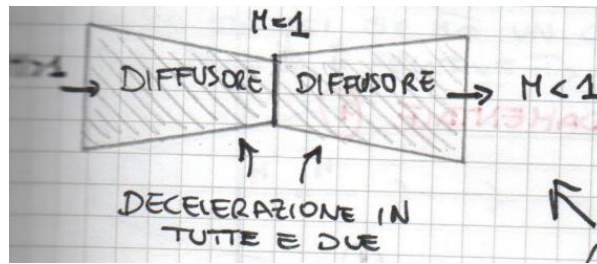


Figura 45: Diagramma di un diffusore. Il flusso entra da sinistra con $M > 1$, passa attraverso una gola con $M = 1$, ed esce a destra con $M < 1$. Il flusso è decelerato in entrambe le sezioni. Un piccolo grafico mostra una linea di Fanno subsonica con un'onda d'urto.

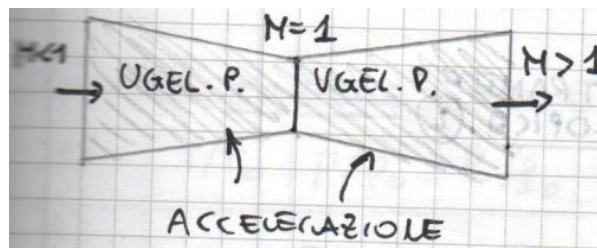


Figura 46: Diagramma di un ugello convergente-divergente. Il flusso entra da sinistra con $M < 1$, accelera attraverso una gola con $M = 1$, ed esce a destra con $M > 1$. Il flusso è accelerato in entrambe le sezioni. Un piccolo grafico mostra una linea di Fanno supersonica con un'onda d'urto.

se continuo ad accelerare si arriva a $M = 1$ nella [???]. $M = 1 \rightarrow$ portata è massima e sempre quella.

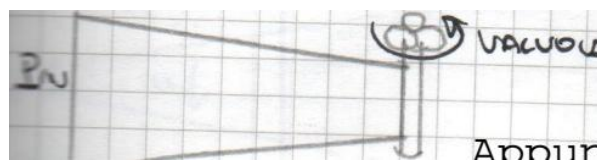


Figura 47: Diagramma di un ugello convergente con una valvola alla gola. L'ugello è etichettato 'VALVOLA'.

Solo aumentando sezione ho Mach diverso (dopo conv. \rightarrow ci vuole diverg.).

0.7 Relazione tra pressione e numero di Mach

Voglio ora legare p a M : $p \rightarrow M$, $T \rightarrow M$ e $\rho \rightarrow M$ (stesso discorso per le altre variabili).

Ritorno a equazioni integrali (l'eq. di prima non riesco ad integrare):

Riparto da equazione di bilancio dell'energia:

Equazione bilancio energia tra A_1 e A_2 .

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (39)$$

Ho considerato volume di controllo su equazione di energia.

Devo cercare di far comparire il numero di Mach.

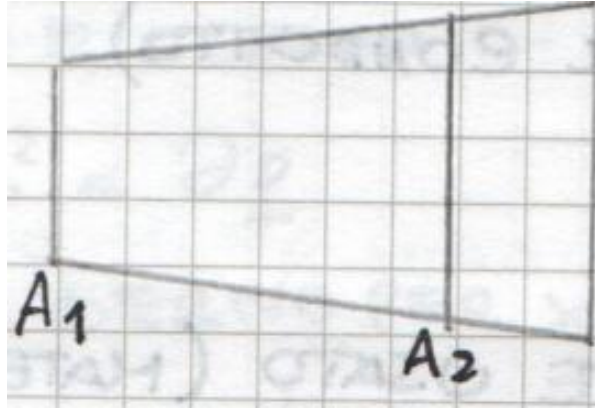


Figura 48: Diagramma di un volume di controllo (V. CONTROLLO) che mostra una sezione trasversale con area A_1 a sinistra e area A_2 a destra. Una linea tratteggiata indica il percorso del flusso attraverso il volume di controllo.

Ricordandoci che (relazioni termodinamiche):

$$c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)} \quad (40)$$

$$u^2 = M^2 c_0^2 = M^2 \gamma R T \quad (41)$$

Sostituendo:

$$\frac{\gamma R T_1}{(\gamma - 1)} + \frac{M_1^2 \gamma R T_1}{2} = \frac{\gamma R T_2}{(\gamma - 1)} + \frac{M_2^2 \gamma R T_2}{2} \quad (42)$$

Moltiplico per $(\gamma - 1)$ e metto in evidenza T_1 e T_2 :

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) \quad (43)$$

Da cui:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \quad (44)$$

Relazione fondamentale (1).

Per trovare le altre uso le relazioni isentropiche:

Da qui:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (45)$$

Relazione fondamentale (2) tramite applicazione di relazione isentropica.

E inserendo nell'equazione di stato \rightarrow

$$\frac{p_2}{p_1} = p_1 (M_2, M_1) \quad (46)$$

→ Trovo $\frac{p_2}{p_1}$.

In generale:

$$\frac{T_2}{T_1} = H(M_1, M_2) \quad (47)$$

Relazione fondamentale (3).

In cui H è certa quantità f di M_1 e M_2 .

Spesso nei problemi ci sono condizioni in cui $u = 0$, ossia condizioni di ristagno e si indicano con pedice zero (0).

$T_0, p_0, \rho_0 \rightarrow$ lo 0 sta per $M = 0$.

In altri testi si trova con pedice t:

$T_t, p_t, \rho_t \rightarrow t$ per "totale".

Equazione dell'energia diventa:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} = H_0 \quad (48)$$

In sezione generica. Entalpia totale. Condizione di ristagno.

Se divido tutto per c_p :

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} \quad (49)$$

Temperatura di ristagno o temperatura totale.

In genere queste quantità si riscrivono con:

$A_1 \rightarrow$ sezione di ristagno: T_0, p_0, ρ_0 ($M_1 = 0$).

$A_2 \rightarrow$ sezione generica con [???].

Quindi non parliamo più di sezione di ingresso e sezione di uscita ma sez. A_1 con $M_1 = 0$ e sez. A_2 con M_2 generico.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \rightarrow \frac{T}{T_0}(M) \text{ è funzione di Mach} \quad (50)$$

Esistono relazioni isentropiche:

$$\frac{p}{p_0}(M) \text{ e } \frac{\rho}{\rho_0}(M) \leftarrow \text{li trovo con } M_1 = 0 \text{ e } M_2 = \text{generico} \quad (51)$$

Quindi, in sintesi, se ho un certo M , con queste relazioni trovo p, T e ρ avendo $M_1 = 0$ e relative T_0, p_0 e ρ_0 .

Esistono tabelle (vedi dispense) con tutti i valori di queste variabili:

Infatti: $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_2 u_2}$ e ricordando che:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{c_1 M_1}{c_2 M_2} = \frac{\sqrt{\gamma R T_1} \cdot M_1}{\sqrt{\gamma R T_2} \cdot M_2} \quad (\text{ritorna } T_1/T_2 \text{ e } M_1/M_2) \quad \text{quindi: } \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 \sqrt{\gamma R T_1} \cdot M_1}{\rho_2 \sqrt{\gamma R T_2} \cdot M_2} \quad (52)$$

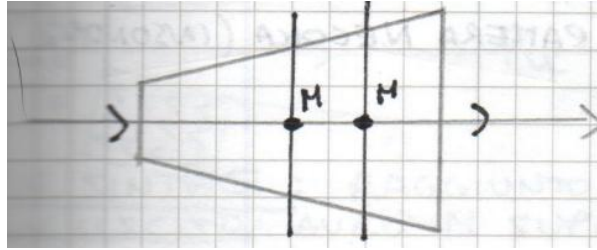


Figura 49: Diagramma che mostra un sistema di coordinate con un asse verticale e un asse orizzontale. Due punti sono marcati sull'asse verticale, etichettati M e M. Un segmento di linea collega questi due punti, rappresentando una relazione tra numeri di Mach.

M	T/T ₀	p/p ₀	ρ/ρ ₀	A ₂ /A ₁	Note
0,1					Abbiamo nella tabella anche l'informazione su A(x): Posso trovare A ₂ /A ₁ in funzione di (M ₁ , M ₂) Basta utilizzare eq. massa:
0,2					
0,3					
0,4					
0,5					

$$\frac{A_2}{A_1}(M_1, M_2) \text{ ho usato l'eq. massa per giungere a questo risultato (3)} \quad (53)$$

È ovvio che il caso $M_1 = 0$ non posso inserirlo nel rapporto A_2/A_1 , altrimenti dovrei avere area infinita!

$$M_1 < 1 \quad \downarrow \quad (54)$$

$$A_2 = A_1 \frac{c_1 M_1}{c_2 M_2} \rightarrow A_2 = \infty \text{ se } M_1 = 0 \quad (55)$$

A_1 quindi sarebbe $A_1 = \infty$ X.

Quando ragiono sulle aree $\frac{A_2}{A_1}$ devo assumere $M_1 = 1$ in A_1 .

Genericamente chiamata $(A^*) = A_1$. Sezione minima.

Mentre A_2 rimane generica.

$$\frac{A}{A^*}(M, M_1 = 1) \rightarrow \frac{A}{A^*}(M) \quad (56)$$

Quindi il rapporto è funzione di solo M generico e non di M_1 . Quindi solo nel rapporto tra le aree avremo $M = 1$ mentre gli altri rapporti no.

Nelle tabelle ci sono altre due colonne ($M^* \approx 1 \rightarrow$ è M particolare e un'altra ancora).

$$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \text{eq. energia}; \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \text{isentropiche}; \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \text{eq. stato}; \quad \frac{A_2}{A_1} \rightarrow \text{eq. massa} \quad (57)$$

0.8 Lezione fluidodinamica, 3 giugno

Abbiamo visto le tabelle relative a flussi isentropici compressibili, sviluppate durante gli anni '40 e '50.

Le informazioni sulle tabelle sono: $\frac{p}{p_0}(M)$, $\frac{\rho}{\rho_0}(M)$, $\frac{T}{T_0}(M)$.

L'input che inseriamo è il numero di Mach $M \rightarrow$ trovo questi rapporti.

Nel caso di $M_1 = 0$ si parla di p_0, T_0 e ρ_0 (o con pedice 0).

Invece di parlare di $M_1 = 0 \rightarrow$ possiamo dire $M^2 \ll 1$.

Laboratorio fluidodinamica Roma3, posizionato in camera anecoica (insonorizzata).

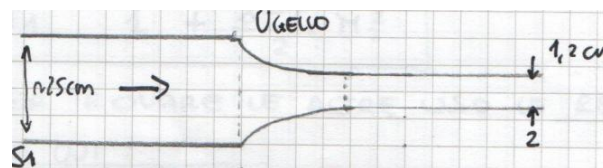


Figura 50: Diagramma di una galleria del vento. Un condotto orizzontale ha una sezione etichettata 'UGELLO' (ugello) con un'altezza di 1,2 cm. La velocità del flusso è indicata come 25 cm/s. La sezione trasversale è etichettata S1. Un piccolo diagramma a destra mostra una griglia di frecce che rappresentano la direzione del flusso.

Conosciamo $A(x)$ e misuriamo T_0 e p_0 in uscita (sezione 2) e troviamo T_0 e p_0 in S_1 .

Abbiamo un $M_1 \approx 0,01$ in ingresso mentre in uscita $M \approx 0,8$. Quindi il flusso che arriva è a velocità bassa mentre in uscita aumenta. Ho pertanto una condizione di ristagno in ingresso.

Posso assumere, per tale motivo ($M \approx 0,01$ è ristagno) che $M_1 = 0$.

Posso trovare ancora:

$$\frac{T}{T_0} \text{ o } \frac{p}{p_0} \text{ usando le tabelle} \quad (58)$$

Altra informazione che troviamo nelle tabelle è info geometrica:

$\frac{A_2}{A_1} \rightarrow$ non posso riferirmi a condizione di ristagno poiché se $M_1 = 0 \rightarrow A_2 = \infty$.

Quindi ci poniamo nel caso $M_1 = 1$ da cui:

$A_1 = A^*(M = 1)$ condizione di chocking.

I vari rapporti li abbiamo trovati tramite set di equazioni (sotto note).

Eq. energia:

$$\bullet c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \xrightarrow[\text{condizioni di ristagno}]{\text{tramite}} \frac{T}{T_0}(M) \xrightarrow[\text{isentropiche}]{\text{ausilio}} \frac{p}{p_0}(M) = \frac{\rho}{\rho_0}(M) \quad (59)$$

0.8.1 Eq. massa

Non posso applicare c. ristagno ma $M_1 = 1$ (sez. minima).

$$\rho u A = \text{costante} \rightarrow \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{M_2}{M_1} \right) \xrightarrow{\text{ristagno}} \frac{A}{A^*}(M) \quad (60)$$

Assegna un'area $A \rightarrow \frac{A}{A^*}$ è legge non lineare.

Infatti ottengo 2 soluzioni:

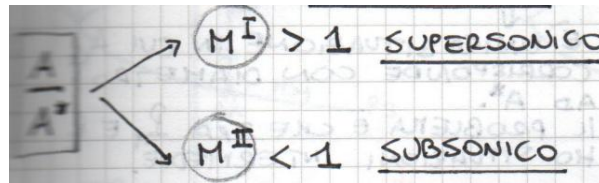


Figura 51: Diagramma che mostra la relazione tra il rapporto di area $\frac{A}{A^*}$ e il numero di Mach M . La curva è etichettata con $M_I > 1$ SUPERSONICO e $M_{II} < 1$ SUBSONICO.

Esempio:

$$\frac{A}{A^*} = 2 \begin{cases} M_I = 0,2 \\ M_{II} = 2,2 \end{cases} \quad (61)$$

Questo indica il fatto che data sezione generica, non conosco la storia del flusso. Non sappiamo quale è la geometria del condotto. Se il flusso è passato da subsonico a supersonico avrò sezione A^* con condizione critica.

$$A^* = M = 1 \quad (62)$$

Consideriamo $A^*(= A_1)$ quanto $M = 1$.

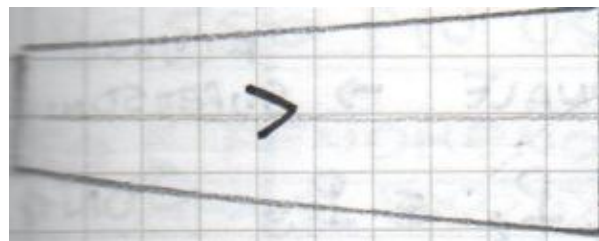


Figura 52: Diagramma di una forma di ugello con una sezione di diffusore.

→

- Se è diffusore subsonico $\rightarrow M_I = 0,2$.
- Se è ugello prop. supersonico $\rightarrow M_{II} = 2,2$.

Se ho un serbatoio (tuo/condotto/serbatoio) con p_0, T_0, ρ_0 a seconda della pressione in uscita avrò M_I o M_{II} .

- Se p_u è basso $\rightarrow u \uparrow$ supersonico.
- Se p_u è alta $\rightarrow u \downarrow$ subsonico.

In sintesi: raggiunto $M = 1 \rightarrow$ a seconda di pressione che impongo in uscita avrò M supersonico o subsonico \rightarrow scelgo quanto una delle 2 soluzioni.

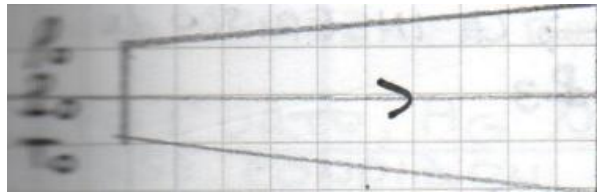


Figura 53: Diagramma di una forma di ugello con una sezione di diffusore.

0.9 Comportamento del condotto al variare di p_u

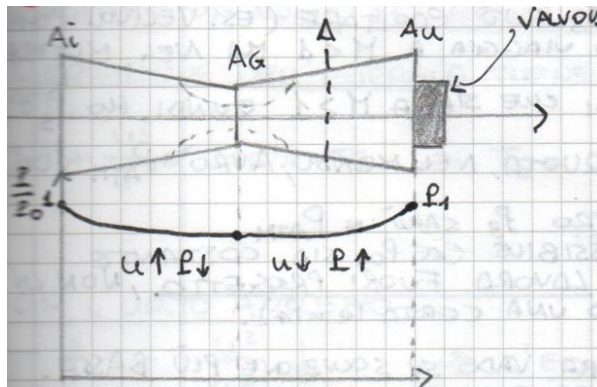


Figura 54: Diagramma che mostra la variazione dell'area A e della pressione P lungo un condotto. Include etichette A_i , A_g , A_u , p_i , p_g , p_u , e un simbolo di valvola. Un grafico mostra P vs x con un minimo a x_g .

Considero valvola: quando la apro abbasso la pressione in uscita. Ho inoltre condotto cond. div. così da avere $M = 1$ in $dA/dx = 0$ ossia in gola.

- Prendiamo in analisi situazione subsonica siamo inizialmente con flusso in quiete. Apro piano piano la valvola \rightarrow siamo sempre in situazione incompressibile.

Non è detto che ho $M = 1$! Dipende da p_u !

Conosco A , data condizione $\frac{p}{p_0}$, quale p_0 M ho in A generico?

$$\frac{A(x)}{A_g} \rightarrow \tag{63}$$

$A_g \neq A^*$ non è detto che ritrovi in $M = 1$ in A_g . In generale ho $M \neq 1$.

Esiste quindi una gola virtuale che corrisponde ad A^* .

Quindi per entrare nelle tabelle devo prima trovare $A_g = A^* \rightarrow M = 1$.

A^* può non essere l'area di gola, può essere un'altra area di gola con $M \neq 1$.

0.10 Flusso compressibile con urti

Sia il flusso accelerato fino a raggiungere $M = 1$. In questo caso $A_G = A^*$, quindi con $p_u = p_2$.

È l'unica situazione in cui A_G corrisponde al diametro A^* . Il problema è che tra P_1 e P_2 ho situazioni intermedie.

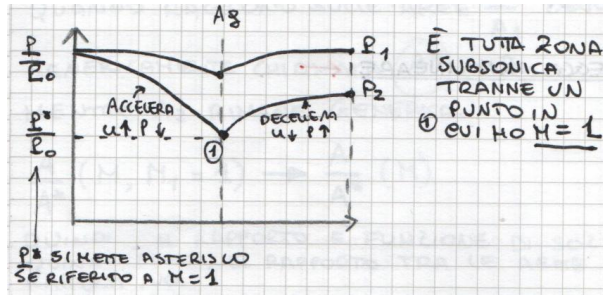


Figura 55: Grafico del rapporto di pressione p/p_0 vs rapporto di area A/A_g . La curva inizia a (1,1) e va a destra. Il punto P_1 è sul ramo subsonico ($M < 1$), P_2 è sul ramo supersonico ($M > 1$), e P_3 è sul ramo subsonico. Le frecce indicano la direzione del flusso: da P_1 a P_2 (accelerazione) e da P_2 a P_3 (decelerazione).

Tra P_1 e P_2 non posso usare le tabelle.

Se A_G è in chocking, entro nelle tabelle con $\frac{A}{A^*} \rightarrow$ trovo p, T, ρ .

Con cui trovo numero di Mach $\frac{M I}{M II}$.

Solo con P_3 più bassa ho M_{II} .

Flusso subsonico M_I .

Flusso supersonico M_{II} .

- P_2 soluzione quasi-unidimensionale \rightarrow subsonico M_I
- P_3 soluzione quasi-unidimensionale \rightarrow supersonico M_{II}

È importante ricordare che P_1, P_2 e P_3 sono assegnati con valvola.

0.10.1 Per trovare P_2 :

$\frac{A_u}{A^*} \rightarrow$ entro in tabelle e trovo 2 soluzioni \rightarrow scelgo $M_I \rightarrow$ la inserisco in $p/p_0(M)$ e trovo p (cioè P_2). Se scegliessi $M_{II} \rightarrow P_2 = P_3$.

Ora riprendiamo il caso di sopra in cui ho sempre $A_G = A^*$.

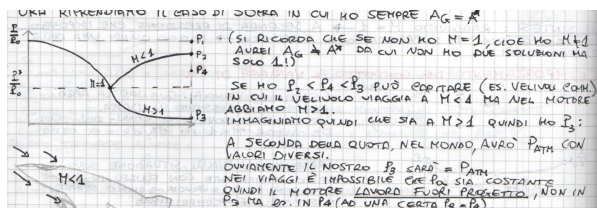


Figura 56: Grafico del rapporto di pressione p/p_0 rispetto al rapporto di area A/A_g . La curva inizia da (1,1) e procede verso destra. Il punto P_1 è sul ramo subsonico ($M < 1$), P_2 è sul ramo supersonico ($M > 1$), e P_3 è sul ramo subsonico. Le frecce indicano la direzione del flusso: da P_1 a P_2 (accelerazione) e da P_2 a P_3 (decelerazione).

(Si ricorda che se non ho $M = 1$, cioè ho $M \neq 1$, avrei $A_G \neq A^*$ da cui non ho due soluzioni ma solo 1!)

Se ho $P_2 < P_4 < P_3$ può capitare (es. velivoli commerciali) in cui il velivolo viaggia a $M < 1$ ma nel motore abbiamo $M > 1$. Immaginiamo quindi che sia a $M > 1$, quindi ho P_3 :

A seconda della quota, nel mondo, avrò P_{atm} con valori diversi.

Ovviamente il nostro P_3 sarà $= P_{atm}$. Nei viaggi è impossibile che P_{atm} sia costante, quindi il motore lavora fuori progetto, non in P_3 ma in P_4 (ad una certa $P_2 = P_4$).

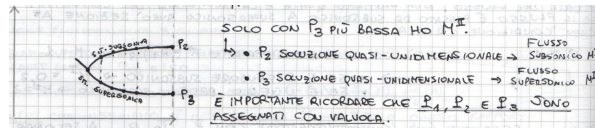


Figura 57: Grafico del rapporto di pressione p/p_0 rispetto al rapporto di area A/A_0 . La curva ha due rami: subsonico ($M < 1$) e supersonico ($M > 1$). I punti P2 e P3 sono sul ramo subsonico, e P1 è sul ramo supersonico. Le frecce indicano la direzione del flusso: da P1 a P2 (accelerazione) e da P2 a P3 (decelerazione).

Se $P_4 < P_2 \rightarrow$ allora vado su soluzione più bassa. Sto quindi scegliendo di seguire la curva che porta a P_3 ossia a Mach supersonico ($M > 1$); ma con questa curva non arrivo a P_4 ma devo rallentare.

Il rallentamento però avviene in divergente:

Se ho: $\frac{dA}{dx} > 0$ e $M > 1$ ho un ugello propulsivo. $du/dx > 0$.

Quindi non può rallentare. Deve quindi verificarsi un **urto**.

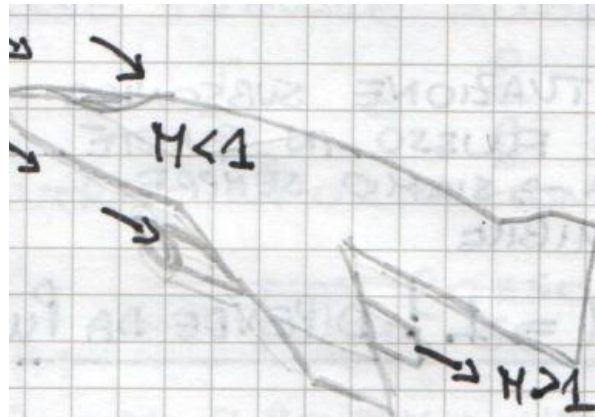


Figura 58: Diagramma di un ugello che mostra l'accelerazione del flusso ($M < 1$) e la decelerazione ($M > 1$). Le frecce indicano la direzione del flusso.

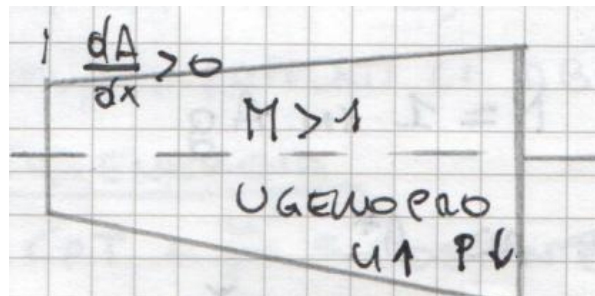


Figura 59: Diagramma di un ugello che mostra l'accelerazione del flusso ($M < 1$) e la decelerazione ($M > 1$). Le frecce indicano la direzione del flusso.

$$\frac{dA}{dx} > 0$$

$$M > 1$$

Ugello propulsivo: $u \uparrow, p \downarrow$

0.10.2 Urto

Un urto è un fenomeno in cui la pressione P sale molto e il flusso da supersonico ($M > 1$) diventa subsonico ($M < 1$) (es. da $M = 3$ si passa a $M = 0,5$). Non è un fenomeno isentropico. Dopo l'urto il flusso rallenta, raggiungendo P_4 (pressione più bassa), quindi il flusso deve necessariamente comprimersi.

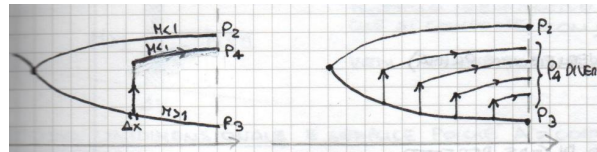


Figura 60: Due diagrammi che illustrano il processo di onda d'urto. Il diagramma sinistro mostra un'onda d'urto in posizione x con spessore Δx , che separa il flusso con numero di Mach $M > 1$ (punti P1, P2, P3) dal flusso con numero di Mach $M < 1$ (punto P4). Il diagramma destro mostra una vista più dettagliata dell'onda d'urto, con vettori di velocità e livelli di pressione P1, P2, P3, P4 che indicano un cambiamento significativo nelle proprietà del flusso attraverso l'urto.

Nello spazio Δx si ha che il flusso passa da (es.) 500 m/s a 70 m/s. Il gradiente di velocità cambia enormemente.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \nabla \cdot \vec{u}$$

Se \vec{u} varia \rightarrow gli effetti viscosi non sono trascurabili \rightarrow non posso più pensare a flusso isentropico.

\rightarrow La quarta equazione del set $\frac{P}{\rho} \cdot x = \text{costante}$ non la posso più usare per il modello quasi-unidimensionale.

Avendo una equazione ho 4 incognite in 3 equazioni \rightarrow non risolvibile.

L'urto è un fenomeno dissipativo, in cui cade quindi la trascurabilità degli effetti viscosi. Le relazioni isentropiche con cui troviamo la quarta equazione non valgono più. Non posso più usare il metodo quasi-unidimensionale.

L'urto è un fenomeno molto concentrato (qualche decina di micron), pertanto poco prima e poco dopo il Δx ho di nuovo il modello quasi-unidimensionale (quindi modello isentropico).

Non devo usare un nuovo metodo per tutto il condotto ma solo per un Δx . Da ingresso a poco prima dell'urto e da poco dopo l'urto a uscita ho modello isentropico/quasi-unidimensionale. La soluzione che troveremmo con la presenza dell'urto tramite modello quasi-unidimensionale non è corretta.

Dopo l'urto, A_G non è più A^* \rightarrow è come se avessi un condotto con diverse condizioni di partenza: P_0 (o P_T) a valle dell'urto \neq a monte dell'urto.

Avremo quindi P_{0V}, P_{0H}, T_{0V} e P_{0H}, P_{0M} e T_{0M} che sono diversi tra loro. È come se cambiassi il serbatoio.

Poiché è un fenomeno dissipativo avrò carico diverso.

Proviamo un nuovo set di equazioni per il nuovo metodo:

L'equazione dell'energia tiene conto del rallentamento o della compressione dell'urto.

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \quad \rightarrow \quad T_0 = T + \underbrace{\frac{u^2}{2C_p}}_{\substack{\text{statica} \\ \text{dinamica}}} = \text{costante}$$

Avrò $T = T_0$ quando il flusso è fermo; quando si muove la somma sarà comunque costante:
 $T_{\text{stat}} \downarrow T_{\text{din}} \uparrow$.

Con l'urto avremo:

$T \uparrow$ e $\frac{u^2}{2C_p} \downarrow \rightarrow$ l'equazione continua a valere mentre la P_0 (o P_T) varia $\rightarrow T_0$ (o T_T) si conserva.

0.10.3 Modello unidimensionale

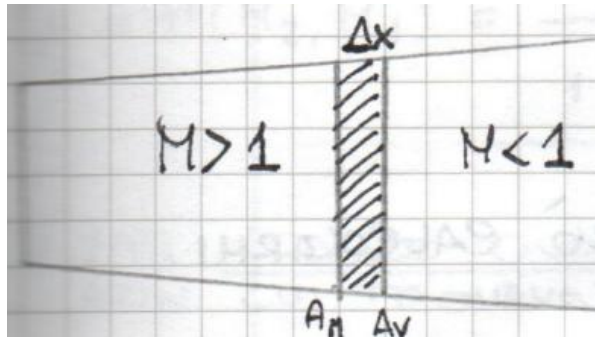


Figura 61: Diagramma di un condotto con un'onda d'urto. Il lato sinistro è etichettato $M > 1$ e il lato destro è etichettato $M < 1$. L'onda d'urto è rappresentata da una regione ombreggiata verticale di spessore Δx . Le aree della sezione trasversale sono etichettate A_M e A_V .

Prendiamo una situazione con urto (solo con $M > 1$) che mi porta a più giusta.

$A_M \sim A_V \rightarrow \Delta x$ molto piccolo.

Il nuovo set di equazioni sarà composto da equazioni simili:

1. Equazione della massa

$$A = \text{costante} (A_M = A_V) \rightarrow \boxed{\rho u = \text{costante}}$$

Per tale motivo si passa da quasi-unidimensionale \rightarrow unidimensionale.

2. Equazione dell'energia

$$C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \quad (\text{verificata prima})$$

3. Equazione di stato

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{poiché parliamo di gas perfetti}$$

4. Quarta equazione

È l'equazione che devo trovare: riprendo l'equazione della quantità di moto (quella che non abbiamo potuto integrare) cioè:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

Stavolta la possiamo integrare poiché A è costante.

È costante da equazione della massa $\rightarrow \rho u = \text{cost.}$

$$\rightarrow \frac{d\rho u^2}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \boxed{p + \rho u^2 = \text{costante}}$$

0.10.4 Set di equazioni metodo unidimensionale (urto)

$$\begin{cases} \rho u = \text{costante} \\ C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \\ \frac{p}{\rho} = RT \\ p + \rho u^2 = \text{costante} \end{cases}$$

Relazioni di salto

(Perché sto saltando attraverso l'urto)

4 incognite (u, p, T, ρ).

Con il metodo isentropico avendo $p_0, \rho_0, T_0, u_0 \rightarrow$ trovo u_M, p_M, ρ_M, T_M .

Con il metodo unidimensionale avendo $p_M, \rho_M, T_M, u_M \rightarrow$ trovo u_V, p_V, ρ_V, T_V .

Di nuovo metodo isentropico.

Quindi all'interno dell'urto, tramite metodo unidimensionale:

$$\begin{cases} \rho_M u_M = \rho_V u_V \\ C_p T_M + \frac{u_M^2}{2} = C_p T_V + \frac{u_V^2}{2} \\ \frac{p_M}{\rho_M} = RT_M \text{ e } \frac{p_V}{\rho_V} = RT_V \\ p_M + \rho_M u_M^2 = p_V + \rho_V u_V^2 \end{cases}$$

Ho solo una variabile incognita.

Da cui trovo ρ_V, p_V, T_V e u_V (o M_V).

Da valle in poi riuso il metodo isentropico ma dovrò eseguire una nuova:

$$\boxed{p_{0V} \neq p_{0M}}$$

Abbiamo studiato il modello matematico degli urti (su dispense c'è l'esperimento di Boston in condotto).

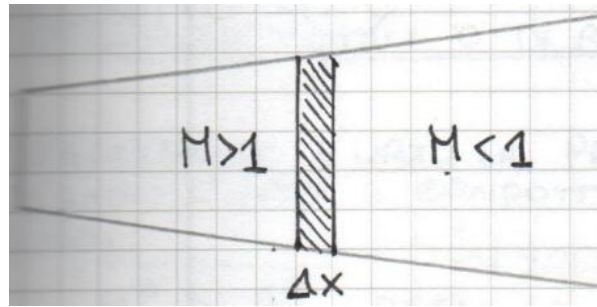


Figura 62: Diagramma di un condotto a forma di cuneo con un'onda d'urto. Il flusso è supersonico a sinistra ($M_1 > 1$) e subsonico a destra ($M_2 < 1$). L'onda d'urto è etichettata Δx .

Se P_u non è quella corrispondente nel modello isentropico, avremo un flusso che si comprime con urto.

Vedi l'esempio sulle dispense.

Il metodo unidimensionale è sempre valido poiché $A = \text{costante}$ da cui Δx è infinitesimo.

L'urto è un fenomeno dissipativo \rightarrow pressione ed entropia non si conservano \rightarrow quindi perdiamo 1 equazione \rightarrow ma l'equazione della quantità di moto si può integrare per la costanza dell'area.

Il set di equazioni diventa:

$$\begin{cases} \rho u = \text{costante} \\ C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \\ p + \rho u^2 = \text{costante} \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases}$$

Relazioni di salto \rightarrow trovo le incognite a valle.

Note le variabili a monte, si parla di urti normali perché si generano su sezioni perpendicolari al moto.

Il set di equazioni si usa in applicazioni pratiche. Quando c'è urto le perdite di carico sono dovute a quest'ultimo; l'attrito è trascurabile (no strato limite) ma il fenomeno dissipativo dell'urto ha ordini di grandezza molto maggiori rispetto alla viscosità.

In genere per definire la sezione a monte e quella a valle si scrive:

(S_1 e S_2) o (S_x o S_y) (al posto di S , qualsiasi lettera).

Noi usiamo la prima:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$\frac{p_1}{\rho_1} = RT_1 \quad \text{e} \quad \frac{p_2}{\rho_2} = RT_2$$

4 incognite (u_2, p_2, ρ_2, T_2).

Si può notare come l'equazione dell'energia è uguale nel metodo unidimensionale e in quello quasi-unidimensionale.

Allora:

$$\frac{T_2}{T_1} = H(M_1, M_2) = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \quad (e)$$

Nel modello quasi-unidimensionale usavamo relazioni isentropiche con cui trovavamo:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \text{tramite equazione della massa invece } \frac{A_2}{A_1}$$

Non avendo le relazioni isentropiche dobbiamo usare altra via:

Prendiamo l'equazione di stato: $\rho = \frac{p}{RT}$ e la sostituiamo nell'equazione di massa/continuità $\dot{m} = A \cdot \rho \cdot u$.

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad \rightarrow \quad \frac{p_1}{RT_1} u_1 = \frac{p_2}{RT_2} u_2$$

Moltiplico e divido per γ :

$$p_1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{RT_1} u_1^2 = p_2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{RT_2} u_2^2$$

Quindi:

$$p_1 + \gamma p_1 M_1^2 = p_2 + \gamma p_2 M_2^2$$

Raggruppo:

$$p_1(1 + \gamma M_1^2) = p_2(1 + \gamma M_2^2)$$

Quindi:

$$\textcircled{1} \quad \frac{p_2}{p_1} = G(M_1, M_2) = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

E ho (da prima) anche:

$$\textcircled{2} \quad \frac{T_2}{T_1} = H(M_1, M_2)$$

Adesso, inserendo $\frac{p_2}{p_1}$ e $\frac{T_2}{T_1}$ nell'equazione di stato trovo $\rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1}$:

$$\textcircled{3} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, M_2)$$

Rimane da analizzare l'equazione di continuità:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{ma} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 \sqrt{\gamma R T_1}}{M_2 \sqrt{\gamma R T_2}} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Se uso questo rapporto allora:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, M_2) = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1}{H(M_1, M_2)}} \quad \textcircled{3}$$

Ho quindi trovato una relazione che lega M_1 e M_2 (tramite equazione di continuità).

Quindi posso esprimere:

$$M_2 = E(M_1) \quad \textcircled{4}$$

Sostituendo nel set di equazioni dei rapporti (relazioni di salto):

$$\begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = H(M_1, E(M_1)) \\ \frac{p_2}{p_1} = F(M_1, E(M_1)) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = G(M_1, E(M_1)) \end{cases}$$

La quantità in input è M_1 .

$$M_2 = E(M_1)$$

Quindi dato $M_1 \rightarrow$ lo inserisco in $\frac{T_2}{T_1}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ e trovo T_2, p_2, ρ_2 (e anche M_2).

Nelle tabelle troviamo infatti queste sopra e in più abbiamo anche le pressioni totali o di ristagno:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}$$

Attraversando l'urto la pressione totale (di ristagno) cambia. È come se passando l'urto il condotto dopo A_2 fosse collegato a un serbatoio diverso, quindi:

$$A_1^* \neq A_2^* \quad \text{ossia la sezione in cui ho } M = 1$$

Immaginando di dover riaccelerare da $M < 1$ a $M > 1$ avremo un'altra sezione di gola A_2^* ma è una sezione "virtuale". Non è detto che ci sia veramente nella struttura.

È importante ricordare che:

$$T_{02} = T_{01}$$

$$P_{02} \neq P_{01}$$

Quindi tra valle e monte si conserva T_0 .

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_{01}}$$

Da tabelle isentropiche di $M = M_2(M_1)$. La ho da tabelle in funzione di M_1 metodo unidimensionale. Da tabelle isentropiche con $M = M_1$.

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_{01}} = D(M_1) \quad (5)$$

Anch'esso in tabella.

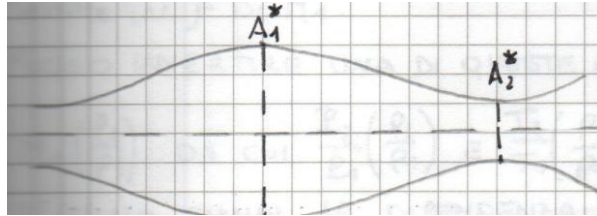


Figura 63: Diagramma di un ugello con un'area di gola A_1^* e un'area di gola virtuale A_2^* per il flusso supersonico. Il flusso è subsonico ($M < 1$) prima della gola e supersonico ($M > 1$) dopo. Una linea orizzontale rappresenta il cono di Mach.

0.10.5 Esempio

Ho un condotto con ugello propulsivo; conosco la geometria $A(x)$ e le quantità totali (o di ristagno):

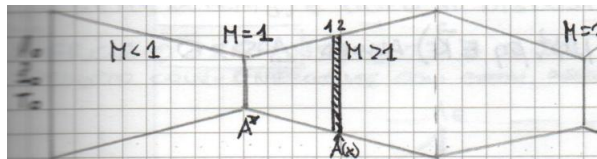


Figura 64: Diagramma della geometria di un ugello $A(x)$ che mostra il flusso subsonico ($M < 1$) a sinistra, una gola A^* dove $M = 1$, e il flusso supersonico ($M > 1$) a destra. Un cono di Mach è mostrato originato dalla gola.

Metodo quasi-unidimensionale

M	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*}$
0
1

(1)

Metodo unidimensionale

M_1	$M_2(M_1)$	$\frac{P_2}{P_1}(M_1)$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$	$\frac{P_{02}}{P_{01}}(M_1)$

(2)

- Entro in tabella (1) con $A(x) \rightarrow \frac{A}{A^*} \rightarrow$ trovo gli altri.
- Arrivo ad urto, entro con M_1 che lo trovo da modello isentropico; uso quindi la tabella (2) e trovo M_2, p_2, T_2, ρ_2 e P_{02} .

- Noto M_2 , io assegno P_0 o $A_2^* \neq A^*$. Potrei avere un caso in cui devo riportare M da > 1 a $M < 1$, quindi ho bisogno di una sezione diversa da quella di prima (A^*). Se conosco A_2 (cioè conosco $A(x)$), noto M_2 e A_2 trovo $A_2^* \rightarrow \frac{A}{A^*}$ tramite tabelle isentropiche. A_2^* è una sezione virtuale, non è detto che ci sia nel condotto.

Il problema principale nella progettazione è trovare $A(x)$. Si usano modelli numerici per ciò.

0.10.6 Urti in differenti condotti

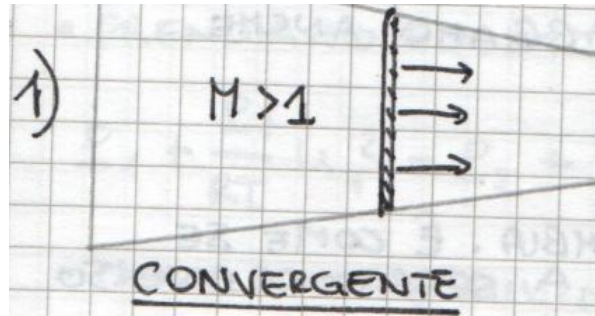


Figura 65: Diagramma di un condotto convergente con un'onda d'urto normale. Il flusso è supersonico ($M > 1$) a monte dell'urto e subsonico ($M < 1$) a valle. Il condotto è etichettato "Convergente".

1) $M > 1$

L'urto può presentarsi anche in un condotto convergente ma la sezione d'urto $A(x)$ tende a scappare via.

In convergente è instabile.



Figura 66: Diagramma di un condotto a sezione costante con un'onda d'urto normale. Il flusso è supersonico ($M > 1$) a monte e subsonico ($M < 1$) a valle. Il condotto è etichettato "Condotto costante".

2) $M > 1$

(Flussi alla Rayleigh)

Equilibrio indifferente in condotto costante.

3)

È stabile.

È importante ricordare che l'urto si forma solo con flusso supersonico ($M > 1$). Nel caso del subsonico non può formarsi per un motivo ben preciso:

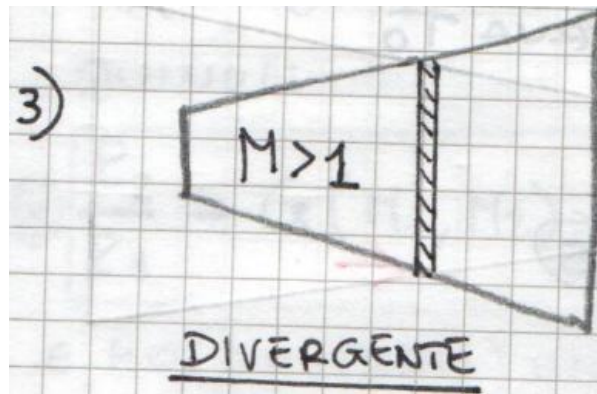


Figura 67: Diagramma di un condotto divergente con un'onda d'urto normale. Il flusso è supersonico ($M > 1$) a monte e subsonico ($M < 1$) a valle. Il condotto è etichettato "Divergente".

$\Delta S = S_2 - S_1$ è la differenza di entropia tra valle e monte.

L'entropia è una funzione di stato. Per flussi subsonici, $S_2 \rightarrow S_2 > S_1$ per il principio di Clausius-Duhem.

Se uno dei 3 effetti dissipativi è attivato ($\mu \neq 0, p_g \in \mathbb{R}$) allora $\Delta S > 0$.

Avremo (senza dimostrare) che:

$$\Delta S = \Delta S(M_1)$$

Rappresentando graficamente:

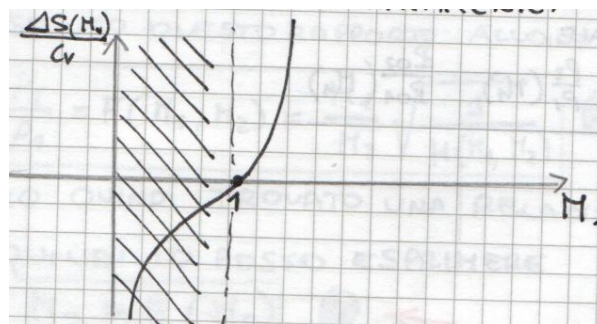


Figura 68: Grafico del cambiamento di entropia adimensionale $\Delta S/C_v$ rispetto al numero di Mach M_1 . La curva inizia a $M_1 = 1$, $\Delta S/C_v = 0$ e aumenta per $M_1 > 1$. L'area sotto la curva per $M_1 > 1$ è ombreggiata con linee diagonali. Una linea tratteggiata verticale è a $M_1 = 1$. L'asse y è etichettato $\Delta S/C_v$ e l'asse x è etichettato M_1 .

ΔS si adimensionalizza tramite C_v dato che nel grafico c'è il gruppo adimensionale M . (È prassi.)

Scritta l'equazione di ΔS , nulla vieta che $M_1 < 1$, ma sapendo che $\Delta S > 0$ per definizione, allora si toglie il grafico da $M_1 < 1$.

Ciò dimostra che non possono esserci urti per $M < 1$.

Avrei $\Delta S < 0$ cioè un aumento di energia (ma io ho solo dissipazione).

L'andamento intorno a $M_1 = 1$ si ha a tangente orizzontale (il flusso cambia concavità) cioè ci fa capire che a $M \approx 1 \rightarrow \Delta S$ è piccolo \rightarrow ho flusso isentropico.

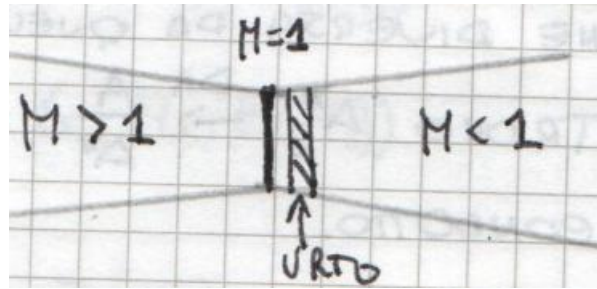


Figura 69: Diagramma di un condotto con un'onda d'urto normale. Il flusso è supersonico ($M > 1$) a monte, subsonico ($M < 1$) a valle, e l'urto è etichettato "Urto". Il condotto è etichettato " $M = 1$ " nella posizione dell'urto.

Quindi l'urto subito dopo la gola avrebbe un effetto poco dissipativo (poco intenso), cioè mi fa perdere poca energia.

Se avessimo un grafico diverso, cioè il pilota dell'aereo dovrebbe pilotare in modo tale da avere l'urto esattamente in gola per avere ΔS piccolo.

Se il grafico fosse stato diverso, avremmo un ΔS molto più grande.

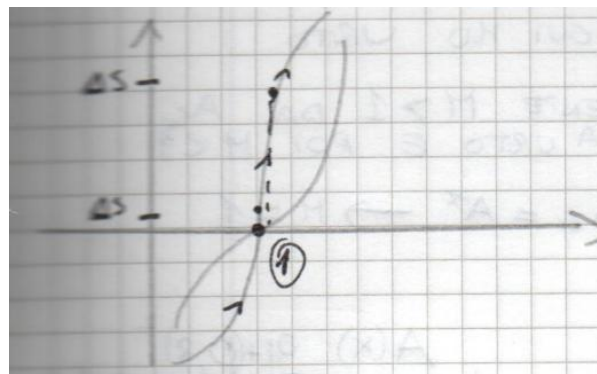


Figura 70: Un grafico disegnato a mano su una griglia che mostra una curva con un asintoto verticale. L'asse verticale è etichettato ΔS e l'asse orizzontale è etichettato M_1 . Un punto sulla curva è etichettato . Le frecce indicano la direzione della curva.

L'urto fa perdere potenza: consuma energia. O lo si elimina annullandolo in sezione di gola (molto difficile) o almeno lo si avvicina ad A^* .

Si cerca di avere un urto a Mach poco superiori a $M = 1$ così le perdite sono piccole.

Una piccola variazione di Mach porta una piccola variazione di entropia.

0.10.7 Relazioni di Rankine-Hugoniot

Sono equazioni che si ricavano rimaneggiando i rapporti $\frac{P_2}{P_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ e $\frac{T_2}{T_1}$ espressi sempre in funzione di M_1 .

Posso invertire una di queste relazioni esprimendo M_1 come funzione di $\frac{\rho_2}{\rho_1}$:

$$M_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{da cui} \quad \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{e} \quad \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

Elimino quindi la dipendenza da Mach; solitamente il Mach si trova in funzione della densità.

Se il flusso è isentropico:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \quad \leftarrow \gamma \text{ è la pendenza (scala bilogaritmica)}$$

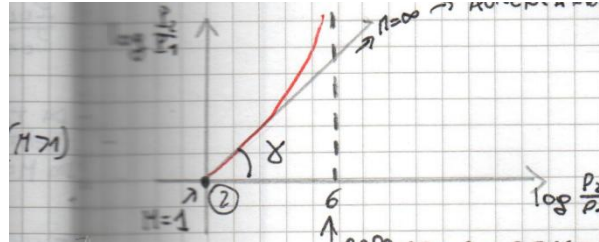


Figura 71: Un grafico che mostra la relazione tra $\log(P_2/P_1)$ e $\log(\rho_2/\rho_1)$. La curva è etichettata con il simbolo γ . Un punto sulla curva è etichettato . Una linea tratteggiata verticale è tracciata a $\log(\rho_2/\rho_1) = 6$, e una linea tratteggiata orizzontale è tracciata a $\log(P_2/P_1) = 6$. L'intersezione è etichettata . Il numero di Mach $M = 1$ è indicato sull'asse orizzontale. Una freccia punta a destra con il testo "Mach cresce".

Il rapporto di densità è 6 e non si sa perché (non esiste spiegazione fisica). Ma vi interessa perché il modello funziona fino a $M = 1$ e i modelli poiché.

Variando poco la variazione di entropia è piccola \rightarrow è vicina alla legge isentropica (la retta di pendenza γ) e dopo si discosta !

0.11 Esercizio dispense 6.23 e 6.24

Condotto con-divergente con geometria assegnata.

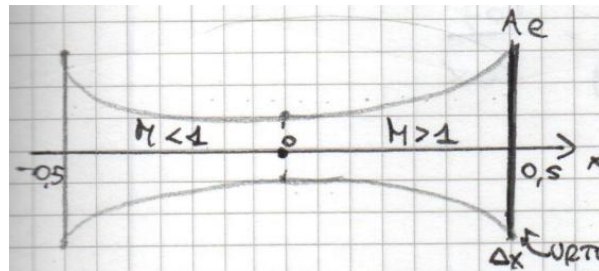


Figura 72: Un diagramma della geometria di un ugello. L'asse orizzontale è etichettato x . L'ugello ha una gola a $x = 0,5$. Il lato sinistro è etichettato $M < 1$ e il lato destro è etichettato $M > 1$. Una linea verticale a $x = 0,5$ è etichettata A_e . Una piccola freccia etichettata dx punta a destra dalla gola.

Vanno determinate le quantità termodinamiche ovunque (usando quindi i due modelli).

$$A(x) = 0,1 + x^2$$

in cui x varia tra $-0,5$ a $+0,5$.

1) Ho urto in A_e . 2) Calcola il rapporto P_y/P_{0x} cioè P_2/P_{01M} .

L'urto avviene solo su $M > 1$, quindi il flusso in ingresso è $M < 1$ (definito dall'esercizio). Quindi ho una sezione di gola critica $\rightarrow A_G = A^*$.

Entro in tabelle isentropiche con $\frac{A_e}{A^*}$ in cui $A_e \sim A_{e1} \sim A_{eM}$.

Quindi $\frac{P_x}{P_{0x}}$ nella tabella isentropica la trovo in queste tabelle.

Quindi $A_G = A^* = 0,1 \text{ m}^2 \rightarrow A_e \stackrel{M}{=} 0,35 \rightarrow \frac{A_e}{A^*} = 3,5 \rightarrow$ guardo su tabelle isentropiche.

Trovo numero di Mach $M_x = M_1 = M_{\text{monte}} \rightarrow$ entro in tabelle urti \rightarrow trovo:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{P_2}{P_1} \text{ cioè:}$$

$$\frac{P_y}{P_{0x}} = \frac{P_y}{P_x} \cdot \frac{P_x}{P_{0x}}$$

0.11.1 Esercizio 6.24

Devo determinare P_u/P_{01} .

Stesso esercizio di prima ma con $x = 0,3 \text{ m}$ in cui ho urto.

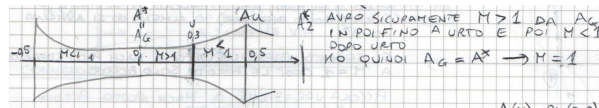


Figura 73: Diagramma del flusso in un ugello con un'onda d'urto normale a $x = 0,3 \text{ m}$. Il diagramma mostra un ugello con un'area di gola A_g . A sinistra della gola, il flusso è subsonico con numero di Mach $M_1 < 1$. A $x = 0,3 \text{ m}$, c'è un'onda d'urto normale (A_u, A_g^*). A destra dell'urto, il flusso è supersonico con numero di Mach $M_2 > 1$. Il diagramma mostra anche il rapporto di area A/A^* e la distanza $x = 0,3 \text{ m}$.

Avrò sicuramente $M > 1$ da A_g in poi fino all'urto e poi $M < 1$ dopo l'urto.

No, quindi $A_g = A_g^* \rightarrow M = 1$.

Pertanto tramite tabelle isoentropiche entro con $\frac{A(x)}{A^*} = \frac{0,1+(0,3)^2}{0,1} \approx 1,9$ che nelle tabelle corrisponde a $M_1 (= M_x) (= M_{\text{monte}}) = 2,14$ e ho anche $\frac{P_1}{P_{01}}$ se necessario.

Tramite le relazioni di salto uso $M_1 (= M_x = M_{\text{monte}})$ per trovare $\frac{P_2}{P_1} (= \frac{P_0}{P_x})$, trovo M_2 se necessario e $\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_{0M}}$.

Non ho più stessa A^* ma A_2 , quindi:

$$\frac{A_u}{A_2^*} \left(= \frac{A_2}{A_2^*} = \frac{A_{\text{valle}}}{A_2^*} \right) \rightarrow \text{entro nelle isos}$$

Mentre $\frac{A_u}{A_y} \left(= \frac{A_{\text{uscita}}}{A_{\text{valle}}} \right)$.

Da cui:

$$\frac{A_{\text{uscita}}}{A_2^*} \left(= \frac{A_y}{A_2^*} \right) = \frac{A_y}{A_2^*} \cdot \frac{A_u}{A_y}$$

Avrò trovato $\frac{A_u}{A_2^*}$, entro in isos e trovo $\frac{P_u}{P_{0y}} \left(= \frac{P_u}{P_{02}} \right)$ da cui $\frac{P_u}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_{0y}} \cdot \frac{P_{0y}}{P_{0x}}$.

0.12 Equazione di continuità o bilancio/conservazione della massa

0.12.1 Forma vettoriale

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV}_{\substack{\text{derivata} \\ \text{materiale} \\ \text{T. Reynolds}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{\substack{\text{volume} \\ \text{di} \\ \text{controllo}}} \quad (\text{forma differenziale vettoriale})$$

Derivata materiale della massa.

Teorema di Gauss-Green \rightarrow

Forma integrale (vettoriale)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV$$

Impostata l'arbitrarietà del volume di controllo:

Equazione di bilancio della massa, forma generale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Se dimostriamo che $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, ρ non varia con il tempo, ρ lo porto fuori dalla divergenza e caso particolare \rightarrow flussi newtoniani, equazione di bilancio della massa.

0.12.2 Forma indiciale

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV}_{\substack{\text{da derivata} \\ \text{materiale} \\ \text{T. Reynolds}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho u_i n_i dS}_{\substack{\text{volume} \\ \text{di} \\ \text{controllo}}} \quad (\text{forma differenziale indiciale})$$

Forma integrale (indiciale)

Teorema di Gauss-Green \rightarrow

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} dV$$

Impostata l'arbitrarietà del volume di controllo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

Se dimostro che ρ non varia nel tempo, porto fuori ρ :

$$\rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Altro metodo tramite derivata materiale:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} F$$

Forma vettoriale: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ (impostata l'arbitrarietà del volume di controllo).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$$

Attraverso la derivata materiale:

Ma $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho$, quindi diventa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Forma differenziale (vettoriale) II forma

0.13 Equazione del bilancio della quantità di moto

$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \sum \vec{F}_M + \sum \vec{F}_S$$

Derivata materiale della quantità di moto. Forze di massa. Forze di superficie.

$$\vec{Q} = m\vec{u} = \iiint_V \rho \vec{u} dV$$

Teorema di Gauss-Green.

I membro: $\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iint_S (\rho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} dS \rightarrow$ per trasformare l'integrale di superficie in integrale di volume.

$$\rightarrow \frac{D\vec{Q}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV$$

In cui $\vec{u} \otimes \vec{u}$ è il prodotto diadico, che ci dà un tensore in questo caso.

II membro: $\iint_S \rho \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_S \vec{T} \cdot \vec{n} dS =$ in cui $\vec{T} \cdot \vec{n} = \vec{\tau} \vec{n} = \vec{\tau}$ è lo sforzo, forza di massa in fluidodinamica.

\rightarrow Applico il teorema di Green = $\iiint_V \rho \vec{F} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV$.

Mettendo tutto insieme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV$$

Forma vettoriale generica.

Impostando l'arbitrarietà del volume di controllo:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}$$

Forma vettoriale

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Forma indiciale

Procediamo con la semplificazione:

I membro: possiamo semplificarlo scomponendo le derivate:

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{da derivata}} + \underbrace{\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u})}_{\text{gradiente divergenza}}$$

Il risultato deve essere necessariamente un vettore.

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})$$

Possiamo mettere in evidenza \vec{u} solo per alcuni termini in modo tale che:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right) \rightarrow \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \text{I membro}$$

Equazione del bilancio/conservazione della massa = 0.

Raggruppando:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}$$

I membro.

Da cui:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

Relazione costitutiva per fluidi compressibili e incompressibili.

Il termine λ porta conseguenze con la pressione:

(1) Fluido in quiete $\rightarrow p = -\frac{\text{tr}(\tau_{ij})}{3}$ ed $\epsilon_{ij} = 0$ (caso statico).

Da cui $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$.

(2) Fluido incompressibile $\rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ ma in moto.

(3) Fluido compressibile $\rightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + (\lambda \epsilon_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$.

Se calcoliamo la traccia di τ_{ij} :

$$\text{tr}(\tau_{ij}) = -p \cdot 3 + \lambda \cdot \epsilon_{kk} \cdot 3 + 2\mu \epsilon_{kk}$$

Dividendo per 3 e cambiando segno, raggruppando: $-\frac{\text{tr}(\tau_{ij})}{3} = p + \epsilon_{kk} (\lambda + \frac{2}{3}\mu)$.

Per molti fluidi: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Ipotesi di Stokes.

Semplifica l'equazione ma non significa che il fluido diventa incompressibile.

$$\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) \text{ viscosità volumetrica (bulk viscosity)}$$

Per le nostre applicazioni quindi $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ da cui:

$$p = -\frac{\text{tr}(\tau_{ij})}{3}$$

Quindi riprendendo l'equazione della quantità di moto in forma indiciale in forma differenziale:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \circ \quad \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \vec{\tau} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij})}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{2\partial x_i} \right)$$

In cui sempre $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right]$$

Laplaciano. Termine nuovo in loro poiché la divergenza di $\vec{u} = 0$ in fluido incompressibile.

Usando questo ulteriore passaggio:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{kk})$$

Forma indiciale

Equazione di Navier-Stokes.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Forma vettoriale

In cui si è posto $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$.

Equazione di Navier-Stokes.

0.14 Vorticità ed equazione della vorticità

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

Linea di flusso.

Linea di vorticità.

Diagram illustrating a vortex line. A curve is shown with arrows indicating the direction of the vorticity vector ω along the line. A material line is also shown, composed of the same particles.

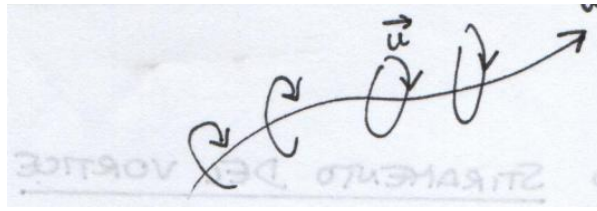


Figura 74: Diagramma che illustra la definizione di vorticità. Un campo vettoriale \vec{u} è mostrato con un elemento di curva $d\vec{l}$. Il vettore di vorticità $\vec{\omega}$ è definito come il rotore di \vec{u} , rappresentato da un vettore perpendicolare al piano dell'elemento di curva.

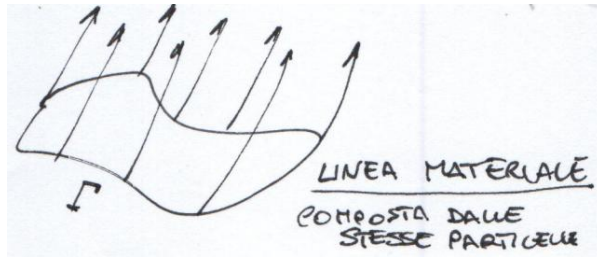


Figura 75: Diagramma che illustra una linea di vortice. Una curva è mostrata con frecce che indicano la direzione del vettore di vorticità $\vec{\omega}$ lungo la linea. Una linea materiale è anche mostrata, composta dalle stesse particelle.

0.14.1 Linea materiale composta dalle stesse particelle

Un vortice è un insieme di linee di vorticità.

Intensità del vortice

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{e}$$

Per il teorema di Stokes:

$$\Gamma = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS$$

Considerazioni di Kelvin sulla vorticità

Kelvin fece le prime considerazioni matematiche su vorticità. Le ipotesi fondamentali sono:

- $Re \rightarrow \infty \rightarrow \frac{\rho u L}{\mu} \rightarrow \infty$ (viscosità trascurabile)
- Forze conservative: $\vec{f} = -\vec{\nabla}G$
- Flusso incompressibile (Kelvin considerò flusso barotropico $\rho(P)$)

Con queste ipotesi avremo:

$$\Gamma = \text{costante} \quad \text{poiché} \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \left(\circ \frac{D\Gamma}{Dt} \right)$$

Teoremi di Helmholtz

Helmholtz si basò sulle ipotesi di Kelvin e introdusse tre teoremi:

1. Γ non può variare. Il vortice può chiudersi su se stesso o iniziare e finire agli estremi del campo.
2. Una particella esterna non può entrare; altrimenti la linea materiale varierebbe e di conseguenza varierebbe Γ e quindi $\vec{\omega}$.
3. $\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \rightarrow \Gamma = \text{costante}$ (visione fisica dell'affermazione di Kelvin).

Trattazione differenziale

Applicando $\vec{\nabla} \times$ all'equazione di Navier-Stokes per fluidi incompressibili:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = -\vec{\nabla} G - \vec{\nabla} P + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

Il termine $\frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$ si annulla poiché nei fluidi incompressibili $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\vec{\nabla} \times \left[\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) \right] = 0 + 0 + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}$$

Per fluidi con ρ costante:

$$\rho \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}) \right] = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho (-\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega}) = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \rho \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \mu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} + \rho \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

0.14.2 Forma differenziale della vorticità

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$$

dove ν è la viscosità cinematica.

Il termine $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$ è il *vortex stretching* (stiramento del vortice).

Tensore di stretching e rotazione

$$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = \vec{I}$$

dove \vec{I} è un tensore.

$$[\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}] = [\vec{\omega} \times \nabla \vec{u}] = \vec{I}$$

Il termine $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$ è il tensore di stretching e $\vec{\omega} \times \nabla \vec{u}$ è il tensore di rotazione.

$$\left(\frac{D}{Dt}\right) \vec{\omega} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}$$

0.15 Equazione di bilancio dell'energia

Si parte dal principio primo:

$$E = \iiint_V \rho e dV$$

dove e è l'energia termo-cinetica (quantità estensiva, energia su volume).

$$e = \frac{1}{2} \sum u_i^2 + U$$

dove $u_i^2 = \sum u_i^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

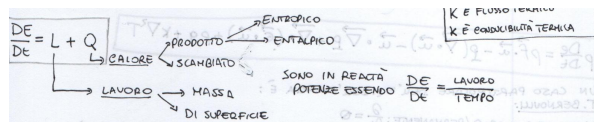


Figura 76: Figura

$$\frac{DE}{Dt} = L + Q$$

dove L è il lavoro (potenze di superficie e di massa) e Q è il calore scambiato. Poiché $\frac{DE}{Dt} = \frac{\text{lavoro}}{\text{tempo}}$, si tratta di potenze.

Sia \vec{R} il flusso termico e k la conducibilità termica.

Primo membro

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \rho e (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) dV$$

Secondo membro: lavoro

$$L = L_H + L_S = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_S (\vec{I} \cdot \vec{u}) \vec{n} dS = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_S \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u}) dV$$

Ricordando che $\vec{f} \cdot \vec{u}$ è la potenza.

Calore

$$Q = Q_S + Q_P = \iint_S -\vec{R} \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \rho q dV = \iiint_V \rho q dV - \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV$$

Equazione integrale di bilancio dell'energia

Mettendo insieme il primo e il secondo membro:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_S \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u}) dV + \iiint_V \rho q dV - \iint_S \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV$$

Posto l'arbitrarietà del volume di controllo:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$$

Forma differenziale alternativa

Sviluppiamo il primo membro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{u}) &= \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e + e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \\ &= \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right] + e \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right] \end{aligned}$$

Poiché vale l'equazione di conservazione della massa, il secondo termine è nullo. Quindi:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$$

Lasciamo invariati $\rho \vec{f} \cdot \vec{u}$ e ρq , ma semplifichiamo $\vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u})$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{R}$.

Per il flusso termico: $\vec{R} = -k \vec{\nabla} T$ (il flusso va da valori più alti a quelli più bassi di temperatura, inverso al gradiente). Con k costante:

$$k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} T) = k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = k \nabla^2 T$$

Per il tensore degli sforzi:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{u}) &= \vec{\nabla} \cdot \left(-p \vec{I} \cdot \vec{u} + \vec{G} \cdot \vec{u} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (-p \delta_{i,j} u_j + G_{i,j} u_j) \end{aligned}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\kappa} \cdot \vec{\nabla} T) + \rho q + k \nabla^2 T$$

0.15.1 Caso particolare: equazione di Bernoulli

Nel caso particolare dell'equazione dell'energia:

- Flusso stazionario/permanente: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Fluido incompressibile: $\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (la densità è costante)
- Fluido inviscido: μ trascurabile $\rightarrow \vec{\kappa} = A\delta_{ij} + B\epsilon_{ij} = 0$ (il termine $A\delta_{ij}$ è nullo per incompressibilità, mentre $B\epsilon_{ij} = 0$ per μ trascurabile)
- $q = 0$ (flusso prodotto)
- $\vec{R} = 0$ (flusso scambiato)
- Forze di massa conservative: $\vec{f} = -\vec{\nabla}G$

L'equazione si semplifica in:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}e = -p\vec{u} \cdot \vec{\nabla}G - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}p$$

Diviso tutto per ρ e portato al primo membro:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}e + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}G + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Raggruppando:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(e + G + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2}u_i^2 + U + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}H = 0$$

dove H è l'entalpia totale. Questa è l'equazione di Bernoulli, che collega il termine cinetico e la temperatura.

Energia interna

$$e = U + \frac{1}{2}u_i^2 \quad \Rightarrow \quad U = e - \frac{1}{2}u_i^2$$

$$dU = c_v dT \quad \Rightarrow \quad dU = de - u_i du_i = de - d\frac{u_i^2}{2}$$

Moltiplicando l'equazione di Navier-Stokes per \vec{u} :

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{D(u_i^2/2)}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}p + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau})$$

Sottraendo $\frac{De}{Dt}$ a $\frac{D(u_i^2/2)}{Dt}$:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{D(u_i^2/2)}{Dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{De}{Dt} - \rho \frac{D(u_i^2/2)}{Dt} &= \left[\rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\kappa} \cdot \vec{\nabla} T) + \rho q + k \nabla^2 T \right] \\ &\quad - \left[\rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) \right] \end{aligned}$$

Sviluppando come:

$$\vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) + \vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} - \rho \frac{D(u_i^2/2)}{Dt} = \frac{DU}{Dt} = -p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\kappa} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \rho q + k \nabla^2 T$$

0.16 Numero di flusso

0.17 Equazione quantità di moto adimensionale

Espando e prendo l'equazione di Navier-Stokes (equazione della quantità di moto) e inserisco $\vec{F} = \vec{g}$ che definisce la forza di massa.

Con ipotesi di Stokes $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Adimensionalizzo e sostituisco le variabili: $|\vec{g}| = |\vec{g}|$ e $\vec{g} = \delta^* \vec{g}^* \rightarrow \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{\delta^*}$

$$\frac{\rho_0 \vec{u}_0}{t_0} \left(\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} \right) + \frac{\rho_0 u_0^2}{L_0} (\vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^*) = \rho_0 g \left(\frac{\delta^*}{\delta^*} \right) - \frac{\rho_0}{L_0} \nabla^* p^* + \mu \frac{u_0}{L_0^2} \nabla^{2*} \vec{u}^* + \frac{\mu}{3} \frac{u_0}{L_0^2} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*)$$

Il termine che causa difficoltà è questo; divido tutto per $\frac{\rho_0 u_0^2}{L_0}$:

$$\frac{L_0}{\rho_0 u_0 t_0} \left(\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} \right) + (\vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^*) = \frac{L_0}{u_0^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_0} \right) - \frac{\rho_0}{\rho_0 u_0^2} \nabla^* p^* + \mu \frac{1}{\rho_0 u_0 L_0} \nabla^{2*} \vec{u}^* + \frac{\mu}{3 \rho_0 u_0 L_0} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*)$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = \frac{1}{Fr} \vec{g} - \frac{1}{Re} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{2*} \vec{u}^* + \frac{1}{3Re} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*)$$

Riscritta senza asterischi:

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{1}{Fr} \rho \vec{g} - \frac{1}{Re} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$

Equazione di bilancio della quantità di moto / equazione di Navier-Stokes adimensionale.

- $Re \rightarrow \infty$: flussi euleriani (viscosità trascurabile)
- $Re \rightarrow 0$: flussi stokesiani (viscosità non trascurabile)

0.17.1 Numero di Froude Fr

È il numero rilevante in applicazioni idrodinamiche:

$$Fr = \frac{u_0^2}{L_0}$$

Negli esperimenti va rispettato il valore tra Fr_R e Fr_E .

Soluzioni asintotiche: se $Fr \rightarrow \infty \Rightarrow$ forze di massa trascurabili.

0.18 Equazione di bilancio energia termica in termini entalpici adimensionale

Prendo l'equazione in termini entalpici e sviluppo $\frac{dT}{dt} \in \frac{Dp}{Dt}$. C_p è costante.

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \phi^2 + \lambda \nabla^2 T$$

dove $\phi^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2$ (lo assumo con $\rho g = 0$).

$$\frac{\rho_0 C_p T_0}{t_0} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} \right) + \frac{\rho_0 C_p u_0 T_0}{L_0} (\vec{u}^* \cdot \nabla^* T^*) = \frac{p_0}{t_0} \left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*} \right) + \frac{u_0 p_0}{L_0} (\vec{u}^* \cdot \nabla^* p^*) + \frac{\mu}{2} \frac{u_0^2}{L_0^2} (\nabla^{2*} T^*) + \frac{k T_0}{L_0^2} \nabla^{2*} T^*$$

Il termine che causa difficoltà è questo; multiplico e divido per le costanti $\frac{\rho_0 C_p u_0 T_0}{L_0}$:

$$\frac{St}{t_0 u_0} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} \right) + (\vec{u}^* \cdot \nabla^* T^*) = \frac{p_0 L_0}{t_0 \rho_0 C_p u_0 T_0} \left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*} \right) + \frac{p_0}{T_0 C_p p_0} (\vec{u}^* \cdot \nabla^* p^*) + \frac{1}{2} \frac{\mu u_0}{\rho_0 C_p T_0 L_0} \phi^2 + \frac{k}{\rho_0 C_p u_0 L_0} \nabla^{2*} T^*$$

$$\begin{array}{cccc} \rho_0 u_0^2 L_0 & St & \rho u^2 & Ec \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_0 \rho_0 C_p u_0 T_0 & Ec & T_0 C_p p_0 & [???] \end{array}$$

L'equazione diventa:

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re} \phi^2 + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T \quad (64)$$

Equazione di bilancio di energia termica in termini entalpici adimensionalizzata.

Per semplicità, dunque appare:

- $p \rightarrow Ru$
- derivata temporale $\rightarrow St$
- $c_p T_0 \rightarrow Ec$
- $k \rightarrow Pr$
- in ϕ^2 e $k \rightarrow Re$

0.18.1 Numero di Eckert Ec

$$Ec = \frac{u_0^2}{c_p T_0} = \frac{u_0^2}{\gamma RT} (\gamma - 1) = M^2 (\gamma - 1)$$

È quindi legato a M^2 .

0.18.2 Numero di Prandtl Pr

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{c_p \mu}{k} \cdot \frac{\rho}{\rho} = \frac{\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

dove:

- μ : viscosità dinamica
- ν : viscosità cinematica
- k : conducibilità termica
- α : diffusività termica

Non può essere portato a valori asintotici poiché dipende da proprietà del fluido.

0.18.3 Numero di Reynolds Re

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 l_0}{\mu} = \frac{\text{forza inerzia}}{\text{forza viscosa}}$$

0.19 Equazione di stato in forma adimensionale

$$\frac{p}{\rho T} = R \quad R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \text{ per aria}$$

Adimensionalizziamo:

$$\frac{p_0 p^*}{\rho_0 \rho^* T_0 T^*} = R \Rightarrow \left(\frac{p^*}{\rho^* T^*} \right) = \frac{R p_0 T_0}{p_0} \xrightarrow{\text{multiplico e divido per } u_0^2} \frac{R p_0 T_0}{p_0} \cdot \frac{u_0^2}{u_0^2}$$

Ricordando che:

$$Re = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0} \quad \text{e} \quad M = \frac{u_0}{c_0} = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma RT}}$$

allora $\left(\frac{p}{\rho T}\right) = \frac{Re}{\gamma M^2}$ (togliendo gli asterischi).

$$\left(\frac{p}{\rho T}\right) = \frac{Re}{\gamma M^2}$$

Equazione di stato in forma adimensionale.

0.20 Set di equazioni adimensionalizzate

$$\begin{cases} \frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \frac{1}{Fr} \rho \vec{g} - \frac{1}{Ru} \vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Ec}{RuSt} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re} \phi^2 + \frac{1}{RePr} \nabla^2 T \end{cases} \quad (65)$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{Ru}{gH^2}$$

6 incognite: $u_1, u_2, u_3, p, \rho, T$.

Per giungere alle equazioni di Eulero devo fare ipotesi:

- $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \sim 0$ trascurabile)
- $M < 0,3$ e $\beta_{to} \ll 1$ (flusso incompressibile) $\rightarrow Ec \ll 1$
- $Fr \rightarrow \infty$
- $Ru = 1$
- ρ costante (non sto dicendo che $St \rightarrow \infty!$) $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

0.20.1 Equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{cases}$$

4 incognite: u_1, u_2, u_3, p .

Per risolvere $\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ introduco il potenziale φ (termine non lineare).

0.20.2 Potenziale φ

Per risolvere il problema tramite φ devo introdurre altre ipotesi:

- $\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{u}$ non rilevante $\rightarrow \nu \sim 0$ trascurabile
- $Re \rightarrow \infty$
- $M < 0,3$ e $\beta_{to} \ll 1 \rightarrow \Gamma = \text{cost} \Leftrightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = 0$
- $\vec{f} = -\vec{\nabla} \alpha$

(Teorema di Kelvin)

Da cui se $\vec{\omega}(x_i, 0) = 0 = \omega(x_i, t)$, allora:

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \nabla^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \frac{1}{st}\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}p \end{cases}$$

Procedura risolutiva:

1. Risolvo $\nabla^2\varphi$
2. Da $\varphi \rightarrow \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$
3. Uso teorema di Bernoulli

0.21 Sintesi equazioni fondamentali

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \alpha p \quad (\text{A) Modulo di comprimibilità } (p\bar{v}) \quad \frac{\partial p}{\partial T} = -\beta p \quad (\text{B) Coefficiente di espansione termica (K)}$$

0.21.1 Equazione conservazione/continuità massa

Forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{u} dV = 0$$

Forma differenziale I:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{u} = 0$$

Forma differenziale II:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

0.21.2 Equazione bilancio quantità di moto / Navier-Stokes

Forma integrale I:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho\vec{u} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{u}\vec{u} dV = \iiint_V \rho\vec{f} dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} dV$$

Forma differenziale I:

$$\frac{\partial \rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho\vec{u}\vec{u} = \rho\vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

Forma differenziale II:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}$$

Sviluppando $\vec{\tau}$:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$$

(Navier-Stokes)

0.22 Vorticità ed equazione di trasporto della vorticità

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \longrightarrow \Gamma = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$$

(Teorema di Stokes)

0.22.1 Trattazione differenziale $\omega(x_i, t)$

$$\vec{\nabla} \times (\text{N.S.}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) = \vec{\nabla} \times \left(-\rho \vec{\nabla} \alpha - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} \right)$$

Forma differenziale:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

dove $\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$ è il vortex stretching.

0.22.2 Equazione di bilancio dell'energia

Forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_V \vec{\nabla} \cdot \rho e \vec{u} dV = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) dV + \iiint_V \rho q dV - \iint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV$$

Forma differenziale I:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho e \vec{u} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$$

Forma differenziale II:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{R}$$

Forma differenziale III:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p \nabla \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho q + k \nabla^2 T$$

(Equazione energia in termini di e)

Teorema di Bernoulli:

$$\vec{u} \cdot \nabla \left(e + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Moltiplicando (N.S.) per \vec{u} :

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \right) \cdot \vec{u} &= \left[\rho \vec{f} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} \right] \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow \rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} &= \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \vec{\tau}) \end{aligned}$$

(Equazione Navier-Stokes per energia cinetica)

Con $U = e - \frac{u^2}{2}$ (energia interna):

Forma differenziale I (in termini di U):

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \vec{\tau} \cdot (\nabla \vec{u}) + \rho q + k \nabla^2 T$$

Ricordando che $\rho \phi^2 \in dU = c_v dT$:

Forma differenziale II (in termini di U):

$$\rho c_v \frac{dT}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \rho \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T$$

Con $h = U - p\nu = U - \frac{p}{\rho}$ (entalpia), differenziando e passando a derivate materiali:

Forma differenziale (in termini di h):

$$\rho c_p \frac{dT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T$$

Con $dS = \frac{dQ}{T}$:

Forma differenziale (in termini di S):

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T$$

(Clausius-Duhem / Crocco)

Sotto particolari ipotesi:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad \xrightarrow{\text{in caso di } st \rightarrow \infty} \quad \vec{u} \cdot \nabla S = 0 \quad (\text{flusso isoentropico})$$

Disuguaglianza di entropia:

$$\iiint T \frac{DS}{Dt} dV \geq 0 \quad \text{e} \quad \nabla S \rightarrow \vec{\omega}$$

0.23 Equazioni adimensionalizzate (sintesi)

0.23.1 Equazione continuità / conservazione massa adim

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0$$

0.23.2 Equazione della quantità di moto / Navier-Stokes adim

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{Ru} \vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr} \rho \vec{g}$$

0.23.3 Equazione bilancio energia in termini entalpici adim

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \frac{Ec}{RuSt} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re} \phi^2 + \frac{1}{RePr} \nabla^2 T$$

0.23.4 Equazione di stato adim

$$\frac{p}{\rho} = \frac{Ru}{\gamma M^2}$$

0.23.5 Equazioni di Eulero (adim.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bullet Re \rightarrow \infty \\ \bullet Ru = 1 \\ \bullet Fr \rightarrow \infty \\ \bullet M < 0,3 \text{ e } \beta_{to} \ll 1 \\ \bullet \rho \text{ costante} \end{array}$$

0.23.6 Equazioni di Eulero con potenziale φ (adim.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{ipotesi sopra} \\ \bullet \vec{\omega}(x_i, t) = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ ipotesi di Lord Kelvin}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet Re \rightarrow \infty \\ \bullet \vec{F} = -\vec{\nabla} G \\ \bullet M < 0,3 \text{ e } \beta_{to} \ll 1 \end{array} \right.$$

0.23.7 Teorema di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 = \text{cost} \quad \text{oppure} \quad p + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 = \text{cost}$$