

# Fluidodinamica

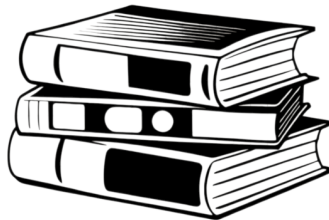
Teoria Parte 2

---

Universita degli studi Roma3

Docente: **Roberto Camussi**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



**NOTESTOBOOK**  
ELEVATE YOUR NOTES

[notestobook.it](http://notestobook.it)

Anno Accademico 2025/2026



# Indice

<b>1</b>	<b>Flussi potenziali, strato limite e introduzione ai flussi compressibili</b>	<b>7</b>
1.1	La doppietta e il set di potenziali elementari . . . . .	7
1.1.1	Set dei potenziali elementari . . . . .	8
1.2	Flusso potenziale attorno al cilindro circolare . . . . .	8
1.2.1	Scelta dei potenziali e costruzione della soluzione . . . . .	8
1.2.2	Calcolo del campo di velocità . . . . .	9
1.2.3	Determinazione dell'intensità della doppietta . . . . .	9
1.2.4	Velocità tangenziale sulla superficie . . . . .	9
1.3	Distribuzione di pressione e coefficiente di pressione . . . . .	10
1.3.1	Forze aerodinamiche: il paradosso di d'Alembert . . . . .	11
1.4	Cilindro con circolazione: il teorema di Kutta–Joukowski . . . . .	12
1.5	Lo strato limite . . . . .	13
1.5.1	Limiti del modello potenziale in prossimità delle pareti . . . . .	13
1.5.2	Definizione di strato limite . . . . .	13
1.5.3	Ipotesi fondamentale e problema a due scale . . . . .	14
1.6	Derivazione delle equazioni di Prandtl . . . . .	15
1.6.1	Equazioni di partenza . . . . .	15
1.6.2	Adimensionalizzazione dell'equazione di continuità . . . . .	15
1.6.3	Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto in $x$ . . . . .	16
1.6.4	Equazione della quantità di moto in $y$ : la pressione nello strato limite . . . . .	16
1.6.5	Le equazioni di Prandtl . . . . .	17
1.7	Separazione dello strato limite . . . . .	17
1.7.1	Analisi qualitativa dei profili di velocità . . . . .	18
1.7.2	Ruolo del gradiente di pressione . . . . .	18
1.8	Flussi comprimibili in condotti . . . . .	19
1.9	Ipotesi del modello e semplificazione delle equazioni . . . . .	19
1.9.1	Ipotesi sui gruppi adimensionali . . . . .	20
1.9.2	Ipotesi di sezione debolmente variabile . . . . .	20

1.10	Integrazione delle equazioni . . . . .	22
1.10.1	Equazione di conservazione della massa . . . . .	22
1.10.2	Equazione della quantità di moto . . . . .	22
1.10.3	Equazione dell'energia . . . . .	23
1.10.4	Isentropicità del flusso . . . . .	23
1.11	Il modello quasi-unidimensionale . . . . .	24
1.12	Relazione fondamentale area-velocità-Mach . . . . .	24
1.12.1	Derivazione . . . . .	24
1.12.2	Analisi dei regimi . . . . .	25
1.12.3	La condizione sonica $M = 1$ . . . . .	26
1.13	Relazioni in funzione del numero di Mach . . . . .	27
1.13.1	Rapporto delle temperature . . . . .	27
1.13.2	Rapporto delle pressioni e delle densità . . . . .	28
1.13.3	Condizioni di ristagno . . . . .	28
1.13.4	Rapporto delle aree . . . . .	29
1.13.5	Gola geometrica e gola critica . . . . .	30
1.14	Comportamento del condotto convergente-divergente al variare della pressione in uscita . . . . .	31
1.14.1	Regime interamente subsonico . . . . .	31
1.14.2	Condizione di soffocamento e doppia soluzione . . . . .	32
1.15	Gli urti normali . . . . .	32
1.15.1	Origine fisica dell'urto . . . . .	32
1.15.2	Carattere dissipativo dell'urto . . . . .	33
1.15.3	Conservazione e variazione delle grandezze totali . . . . .	33
1.16	Il modello unidimensionale per l'urto . . . . .	34
1.16.1	Derivazione del set di equazioni . . . . .	34
1.16.2	Strategia di calcolo complessiva . . . . .	35
1.17	Derivazione delle relazioni di salto in funzione del numero di Mach . . . . .	35
1.17.1	Rapporto delle temperature . . . . .	35
1.17.2	Rapporto delle pressioni . . . . .	36
1.17.3	Rapporto delle densità e relazione tra $M_1$ e $M_2$ . . . . .	36
1.17.4	Riepilogo delle relazioni di salto . . . . .	36
1.17.5	Rapporto delle pressioni totali . . . . .	37
1.18	Stabilità dell'urto nelle diverse geometrie . . . . .	37
1.19	Vincolo entropico e impossibilità dell'urto subsonico . . . . .	38
1.20	Le relazioni di Rankine-Hugoniot . . . . .	39

1.21	Esempio applicativo: condotto convergente-divergente con urto . . . . .	39
1.22	Equazioni fondamentali della fluidodinamica: riepilogo . . . . .	40
1.22.1	Equazione di continuità (conservazione della massa) . . . . .	41
1.22.2	Equazione della quantità di moto . . . . .	41
1.22.3	Relazione costitutiva e equazioni di Navier–Stokes . . . . .	42
1.22.4	Vorticità . . . . .	42
1.23	Vorticità e teoremi fondamentali . . . . .	43
1.23.1	Il teorema di Kelvin . . . . .	43
1.23.2	I teoremi di Helmholtz . . . . .	44
1.23.3	Equazione di evoluzione della vorticità . . . . .	44
1.24	Equazione di bilancio dell’energia . . . . .	45
1.24.1	Formulazione integrale . . . . .	45
1.24.2	Semplificazione mediante l’equazione di continuità . . . . .	46
1.24.3	Equazione dell’energia interna . . . . .	46
1.24.4	Caso particolare: equazione di Bernoulli . . . . .	47
1.25	Equazione dell’energia in forma entropica . . . . .	47
1.26	Adimensionalizzazione delle equazioni . . . . .	48
1.26.1	Procedura generale . . . . .	48
1.26.2	Equazione di conservazione della massa adimensionale e numero di Strouhal . . . . .	49
1.27	Criteri di incomprimibilità . . . . .	49
1.27.1	Il numero di Mach come criterio di comprimibilità . . . . .	50
1.27.2	Il numero di Ruark . . . . .	50
1.28	Adimensionalizzazione dell’equazione della quantità di moto . . . . .	51
1.28.1	Il numero di Froude . . . . .	51
1.28.2	Il numero di Reynolds . . . . .	52
1.29	Adimensionalizzazione dell’equazione dell’energia . . . . .	52
1.29.1	Il numero di Eckert . . . . .	52
1.29.2	Il numero di Prandtl . . . . .	52
1.30	Equazione di stato adimensionale . . . . .	53
1.31	Set completo delle equazioni adimensionali . . . . .	53
1.32	Modelli semplificati: dalle equazioni di Eulero al potenziale . . . . .	53
1.32.1	Equazioni di Eulero . . . . .	53
1.32.2	Flusso potenziale . . . . .	54
1.32.3	Teorema di Bernoulli . . . . .	55
1.33	Riepilogo delle equazioni fondamentali . . . . .	55
1.33.1	Equazione di conservazione della massa . . . . .	55

1.33.2	Equazione della quantità di moto (Navier–Stokes) . . . . .	55
1.33.3	Vorticità ed equazione di trasporto . . . . .	55
1.33.4	Equazione di bilancio dell'energia . . . . .	56

## Capitolo 1

# Flussi potenziali, strato limite e introduzione ai flussi compressibili

### 1.1 La doppietta e il set di potenziali elementari

Nell'ambito della teoria del potenziale, una configurazione di grande interesse è quella ottenuta considerando una sorgente di intensità  $m$  e un pozzo di pari intensità posti a distanza  $\Delta$  l'uno dall'altro. In tale configurazione non vi è flusso uniforme sovrapposto: tutto ciò che viene generato dalla sorgente  $S$  è integralmente assorbito dal pozzo  $P$ .

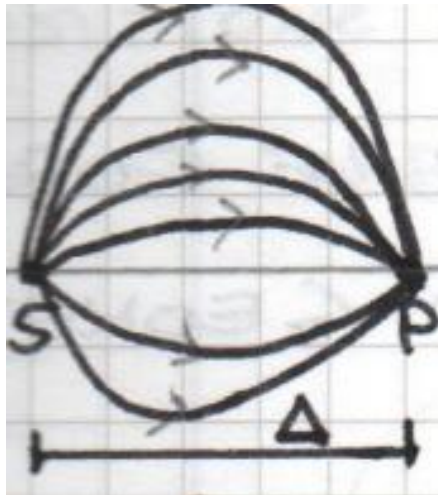


Figura 1.1: Coppia sorgente–pozzo: la sorgente  $S$  e il pozzo  $P$  sono separati da una distanza  $\Delta$ . Le linee di corrente fluiscono dalla sorgente verso il pozzo.

Il passaggio concettualmente cruciale consiste nel portare simultaneamente al limite la distanza  $\Delta \rightarrow 0$  e l'intensità  $m \rightarrow \infty$ , mantenendo finito il prodotto  $K = m \Delta$ . Tale operazione limite — che non è una semplice sovrapposizione, bensì un processo al limite — genera la cosiddetta **doppietta** (*doublet*), il cui potenziale è

$$\varphi_D = \frac{K \cos \theta}{r}, \quad (1.1)$$

dove  $K$  è detta **intensità della doppietta** e rappresenta una quantità finita nonostante  $\Delta$  e  $m$  tendano individualmente ai rispettivi limiti.

**Interpretazione fisica.** La doppietta descrive un campo di velocità che decade come  $1/r^2$ , più rapidamente di quello della sorgente ( $1/r$ ); essa è la singolarità elementare che, sovrapposta a un flusso uniforme, consente di modellare il campo esterno a un cilindro circolare. La direzione lungo la quale sorgente e pozzo si avvicinano definisce l'*asse della doppietta*, e il potenziale risultante è simmetrico rispetto a tale asse.

### 1.1.1 Set dei potenziali elementari

I quattro potenziali elementari che costituiscono la base per la sovrapposizione di soluzioni semplici sono:

$$\begin{cases} \varphi_{CU} = U_\infty r \cos \alpha + U_\infty r \sin \alpha, \\ \varphi_S = \frac{m}{2\pi} \ln r, \\ \varphi_V = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \\ \varphi_D = \frac{K \cos \theta}{r}, \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $\varphi_{CU}$  è il potenziale della corrente uniforme,  $\varphi_S$  quello della sorgente (o del pozzo, con segno opposto),  $\varphi_V$  quello del vortice<sup>1</sup> e  $\varphi_D$  quello della doppietta. Il principio di sovrapposizione, valido per l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$ , consente di combinare tali soluzioni elementari per descrivere flussi attorno a geometrie complesse.

## 1.2 Flusso potenziale attorno al cilindro circolare

### 1.2.1 Scelta dei potenziali e costruzione della soluzione

Si consideri un cilindro circolare di raggio  $a$ , investito da una corrente uniforme di velocità  $U_\infty$ .

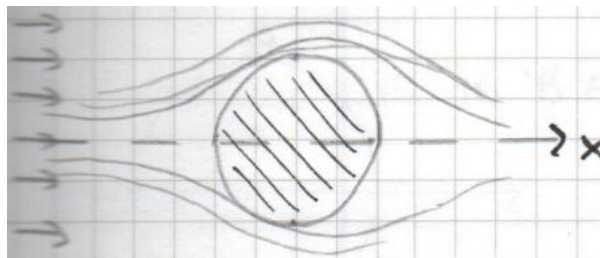


Figura 1.2: Schema del cilindro circolare di raggio  $a$  immerso in una corrente uniforme  $U_\infty$ . Le linee di corrente si deformano in prossimità del corpo.

L'approccio bidimensionale è giustificato quando il cilindro è sufficientemente lungo rispetto al suo diametro, cosicché nella parte centrale le condizioni di flusso non risentono degli effetti tridimensionali alle estremità<sup>2</sup>.

La simmetria cilindrica suggerisce di sovrapporre la corrente uniforme e la doppietta:

$$\varphi = \varphi_{CU} + \varphi_D = U_\infty r \cos \theta + \frac{K \cos \theta}{r}. \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Nella notazione originale degli appunti compare il simbolo  $I$  in luogo di  $\Gamma$ ; qui si adotta  $\Gamma$  per coerenza con la trattazione successiva e con la convenzione standard in fluidodinamica.

<sup>2</sup>Al contrario, strutture tozze come i piloni di un'autostrada, con rapporto lunghezza/diametro piccolo, generano fenomeni fortemente tridimensionali (turbolenza, separazione alle estremità) che non possono essere descritti da un modello 2D.

Si noti che il riferimento cartesiano è allineato con la direzione del vento e si passa a coordinate polari  $(r, \theta)$  mediante la relazione  $x = r \cos \theta$ . È essenziale non confondere l'angolo polare  $\theta$  con l'eventuale angolo di incidenza  $\alpha$  tra l'asse  $x$  e la direzione del flusso<sup>3</sup>.

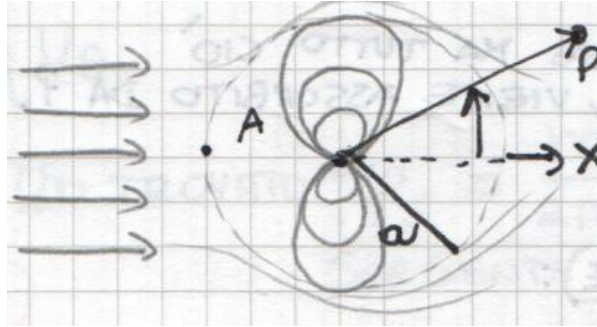


Figura 1.3: Cilindro di raggio  $a$  con sistema di coordinate polari. Il punto  $A$  corrisponde a  $\theta = \pi$ ,  $r = a$ .

Se fosse stato un ovale di Rankine, la scelta sarebbe stata diversa:  $\varphi = \varphi_{CU} + \varphi_S + \varphi_P$ , con sorgente e pozzo separati da una distanza finita.

### 1.2.2 Calcolo del campo di velocità

Dal potenziale (1.3) si ricavano le componenti di velocità in coordinate polari  $\vec{u} = \nabla\varphi$ :

$$U_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = U_\infty \cos \theta - \frac{K \cos \theta}{r^2}, \quad (1.4)$$

$$U_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r^2}. \quad (1.5)$$

### 1.2.3 Determinazione dell'intensità della doppietta

La condizione di impermeabilità sulla superficie del cilindro impone che la velocità radiale si annulli per  $r = a$ . Nel punto  $A$  ( $\theta = \pi$ ,  $r = a$ ) si ha:

$$U_r(\theta = \pi, r = a) = -U_\infty + \frac{K}{a^2} = 0 \quad \implies \quad K = U_\infty a^2. \quad (1.6)$$

La quantità  $K = U_\infty a^2$  è detta **densità della doppietta** e lega l'intensità della singolarità alla geometria del cilindro e alla velocità della corrente indisturbata.

Sostituendo nella (1.4) si verifica immediatamente che  $U_r(r = a) = 0$  per ogni  $\theta$ : il corpo è impermeabile, e la superficie del cilindro è effettivamente una linea di corrente<sup>4</sup>.

### 1.2.4 Velocità tangenziale sulla superficie

Sostituendo  $K = U_\infty a^2$  nella (1.5) e ponendo  $r = a$ :

$$U_{\theta s} = -U_\infty \sin \theta - \frac{U_\infty a^2 \sin \theta}{a^2} = -2U_\infty \sin \theta. \quad (1.7)$$

Il pedice  $s$  indica che la quantità è valutata sulla *superficie* del cilindro.

<sup>3</sup>Per il caso presente  $\alpha = 0$ , essendo la corrente indisturbata allineata con l'asse  $x$ .

<sup>4</sup>Ciò è coerente con il secondo teorema di Helmholtz: le particelle fluide non possono attraversare una linea di corrente, dunque non possono entrare né uscire dal cilindro.

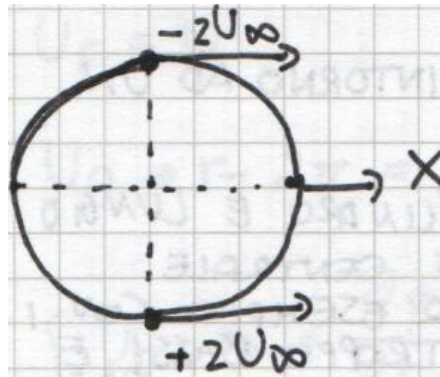


Figura 1.4: Distribuzione della velocità tangenziale sulla superficie del cilindro: i massimi in modulo  $|U_{\theta s}| = 2U_{\infty}$  si raggiungono per  $\theta = \pi/2$  e  $\theta = 3\pi/2$ .

**Interpretazione fisica.** La velocità tangenziale è nulla nei punti di ristagno ( $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ ), dove la corrente si divide o si ricongiunge, e raggiunge il valore massimo in modulo  $|U_{\theta s}| = 2U_{\infty}$  nei punti  $B$  ( $\theta = \pi/2$ ) e  $C$  ( $\theta = 3\pi/2$ ), dove il fluido è costretto ad accelerare per superare l'ostacolo. Il segno negativo in (1.7) è dovuto alla convenzione secondo cui  $\theta$  cresce in senso antiorario.

### 1.3 Distribuzione di pressione e coefficiente di pressione

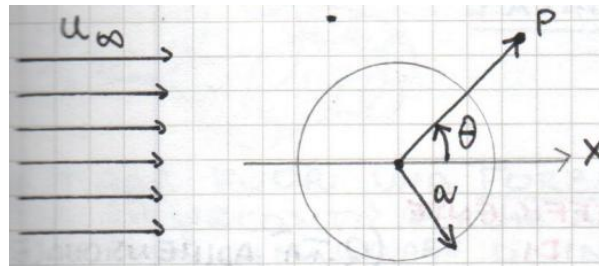


Figura 1.5: Cilindro di raggio  $a$  investito dalla corrente uniforme  $U_{\infty}$ . Un punto generico  $P$  è individuato dalle coordinate polari  $(r, \theta)$ .

Si applica il teorema di Bernoulli tra un punto a monte, dove la pressione è  $p_{\infty}$  e la velocità è  $U_{\infty}$ , e un punto generico sulla superficie del cilindro, dove la pressione è  $p_s$  e la velocità è  $u_s = |U_{\theta s}|$  (essendo  $U_r = 0$  sulla superficie):

$$p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 = p_s + \frac{1}{2}\rho u_s^2. \quad (1.8)$$

Si definisce il **coefficiente di pressione** sulla superficie come la quantità adimensionale:

$$C_{p_s} = \frac{p_s - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2}. \quad (1.9)$$

Dalla (1.8) si ricava:

$$C_{p_s} = 1 - \left(\frac{U_{\theta s}}{U_{\infty}}\right)^2. \quad (1.10)$$

Sostituendo l'espressione (1.7):

$$\boxed{C_{p_s} = 1 - 4\sin^2\theta} \quad (1.11)$$

Questo risultato è *universale* per il cilindro circolare nel modello potenziale: dipende solo dall'angolo  $\theta$  e non dal raggio  $a$  né dalla velocità  $U_\infty$ .

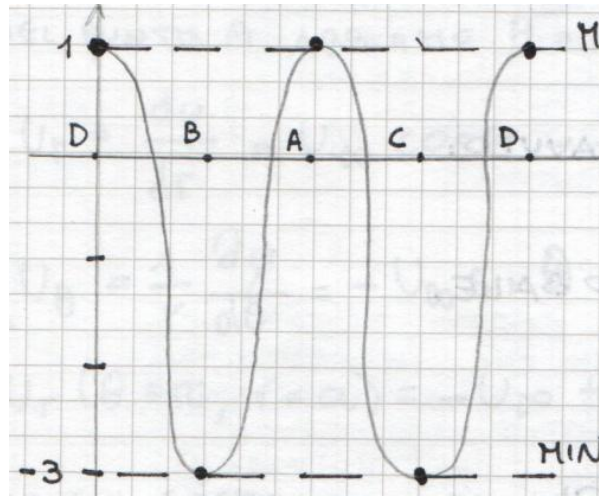


Figura 1.6: Andamento del coefficiente di pressione  $C_{p_s} = 1 - 4 \sin^2 \theta$  in funzione di  $\theta$ . Il massimo  $C_{p_s} = 1$  si raggiunge nei punti di ristagno  $A$  ( $\theta = 0$ ) e  $D$  ( $\theta = \pi$ ); il minimo  $C_{p_s} = -3$  nei punti  $B$  ( $\theta = \pi/2$ ) e  $C$  ( $\theta = 3\pi/2$ ).

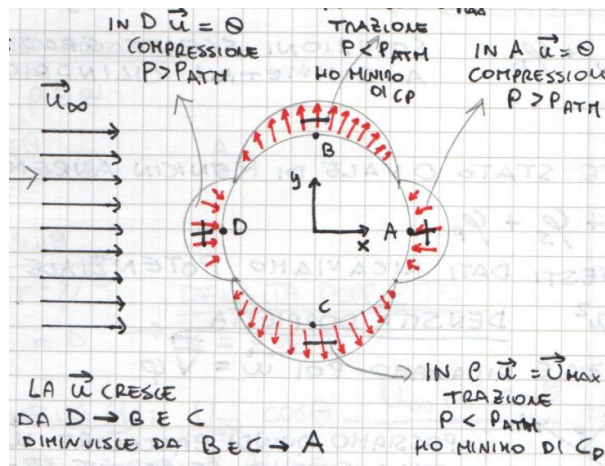


Figura 1.7: Distribuzione di pressione e velocità sulla superficie del cilindro. Nei punti  $A$  e  $D$  (ristagno) la velocità è nulla e la pressione è massima ( $p > p_\infty$ ); nei punti  $B$  e  $C$  la velocità è massima e la pressione è minima ( $p < p_\infty$ ).

**Interpretazione fisica.** Nei punti di ristagno  $A$  ( $\theta = 0$ ) e  $D$  ( $\theta = \pi$ ) il fluido si arresta completamente: tutta l'energia cinetica si converte in pressione, e  $C_{p_s} = 1$ . Nei punti  $B$  ( $\theta = \pi/2$ ) e  $C$  ( $\theta = 3\pi/2$ ) la velocità raggiunge il valore  $2U_\infty$ , producendo una forte depressione ( $C_{p_s} = -3$ ). La velocità cresce spostandosi da  $A$  verso  $B$  e  $C$ , e diminuisce da  $B$  e  $C$  verso  $D$ .

### 1.3.1 Forze aerodinamiche: il paradosso di d'Alembert

Integrando la distribuzione di pressione sulla superficie del cilindro, la risultante delle forze è:

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (0, 0). \quad (1.12)$$

La simmetria della distribuzione  $C_{ps}(\theta)$  fa sì che le componenti di pressione si compensino esattamente su entrambi gli assi: tanto il cilindro è compresso da una parte, altrettanto lo è dall'altra, ma con verso opposto. La somma vettoriale delle forze di pressione è identicamente nulla.

Questo risultato, noto come **paradosso di d'Alembert**, è in evidente contrasto con l'esperienza: nella realtà ogni corpo immerso in una corrente subisce una resistenza. La ragione sta nel fatto che il modello del potenziale trascura gli effetti viscosi, i quali producono la *separazione dello strato limite* e la formazione di una scia a valle del corpo, con una distribuzione di pressione asimmetrica tra monte e valle che genera la cosiddetta **resistenza di forma**.

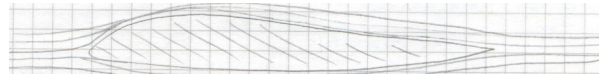


Figura 1.8: Profilo alare con separazione del flusso e formazione della scia. La resistenza di attrito è legata agli sforzi di taglio alla parete e non alla differenza di pressione.

Si noti che il paradosso sussiste anche per corpi di forma generica: sostituendo un profilo qualsiasi con una distribuzione di cilindretti e integrando, la risultante rimane nulla in assenza di effetti viscosi<sup>5</sup>.

## 1.4 Cilindro con circolazione: il teorema di Kutta–Joukowski

Per ottenere una forza netta diversa da zero senza abbandonare le ipotesi del flusso potenziale, si introduce una singolarità aggiuntiva: un *vortice* centrato nel cilindro. Ciò equivale a imporre una circolazione  $\Gamma$  attorno al corpo, rompendo la simmetria della distribuzione di pressione:

$$\varphi = \varphi_{CU} + \varphi_D + \varphi_V. \quad (1.13)$$

In questo caso il coefficiente di pressione (1.11) non è più valido e deve essere ricalcolato.

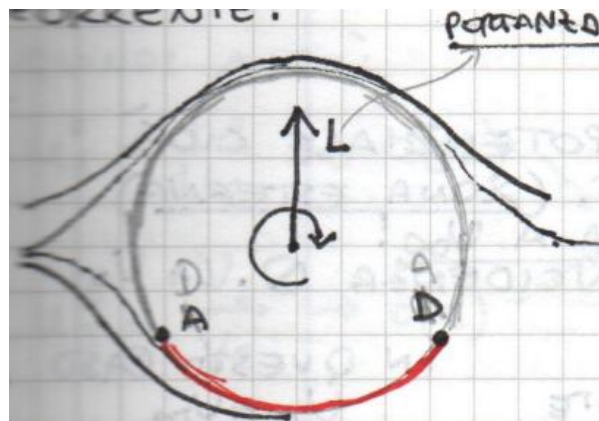


Figura 1.9: Cilindro con circolazione: i punti di ristagno  $A$  e  $D$  si spostano verso il basso per una rotazione oraria, e le linee di corrente si deformano, con il flusso più veloce nella parte superiore.

Con la rotazione in senso orario, i punti di ristagno si spostano verso il basso. Le particelle che transitano sopra il cilindro risultano più veloci di quelle che passano sotto: per il teorema di Bernoulli la pressione è minore sulla parte superiore, e nasce una forza netta  $F_y \neq 0$  diretta verso l'alto (**portanza**), mentre  $F_x = 0$  per simmetria tra monte e valle.

<sup>5</sup>Questo è vero per qualunque corpo chiuso in un flusso potenziale irrotazionale: è un risultato generale e non specifico del cilindro circolare.

Per convenzione, la circolazione  $\Gamma$  è positiva se la rotazione è antioraria e negativa se oraria. Integrando il coefficiente di pressione e dimensionalizzando, si ottiene il risultato fondamentale:

$$L = -\rho U_\infty \Gamma, \quad (1.14)$$

dove  $L$  è la portanza per unità di lunghezza del cilindro<sup>6</sup>.

**Teorema di Kutta–Joukowski.** L'equazione (1.14) costituisce il **teorema di Kutta–Joukowski**<sup>7</sup> e ha validità del tutto generale: si applica a qualsiasi corpo che generi portanza, poiché ogni profilo può essere idealizzato come un insieme di cilindretti, ciascuno con la propria circolazione, la cui somma determina la circolazione totale  $\Gamma$ .

**Interpretazione fisica.** La portanza è direttamente proporzionale alla circolazione  $\Gamma$ : per aumentarla si può aumentare l'angolo di incidenza  $\alpha$ , il che incrementa la differenza di velocità tra dorso e ventre del profilo e, di conseguenza,  $\Gamma$ . La *resistenza*  $D$ , invece, rimane indeterminata nel modello potenziale: essa è legata agli sforzi viscosi che il modello non include. Tuttavia, l'inserimento del vortice salva l'approccio potenziale per il calcolo della portanza, che è la grandezza di interesse primario nella progettazione aerodinamica.

## 1.5 Lo strato limite

### 1.5.1 Limiti del modello potenziale in prossimità delle pareti

Il modello del potenziale prevede, sulla superficie del corpo, una velocità tangenziale non nulla (ad esempio  $2U_\infty$  nel caso del cilindro). In prossimità della parete, il gradiente di velocità  $\partial u_i / \partial x_j$  è nullo nel modello potenziale.

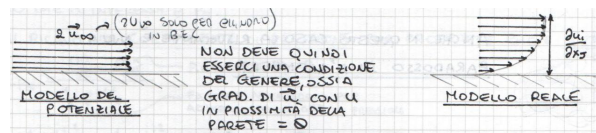


Figura 1.10: Confronto tra il profilo di velocità previsto dal modello potenziale (velocità uniforme fino alla parete) e quello reale (velocità che si annulla alla parete con un forte gradiente nello strato limite).

Nella realtà, la condizione di aderenza impone che la velocità del fluido sia nulla sulla parete: esiste quindi una zona di transizione in cui la velocità varia rapidamente da zero al valore esterno, e in cui il gradiente di velocità è elevato. In questa regione l'effetto viscoso è rilevante e il numero di Reynolds locale è dell'ordine dell'unità ( $Re \sim 1$ ). Al di fuori di essa, il modello potenziale resta valido.

### 1.5.2 Definizione di strato limite

La regione in cui il gradiente di velocità è significativo per effetti viscosi è definita **strato limite** (*boundary layer*). Il campo di moto viene così suddiviso in due zone con modelli matematici distinti:

<sup>6</sup>Il segno dipende dalla convenzione adottata per  $\Gamma$ . Per una circolazione oraria ( $\Gamma < 0$ ) la portanza è diretta verso l'alto.

<sup>7</sup>Nikolaj Egorovič Joukowski (1847–1921) e Martin Wilhelm Kutta (1867–1944) svilupparono indipendentemente le basi teoriche dell'aerodinamica dei profili alari.

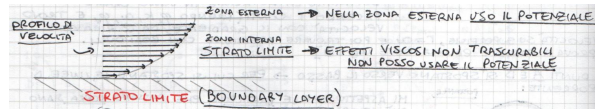


Figura 1.11: Suddivisione del campo di moto: nella zona esterna si utilizza il modello potenziale; nella zona interna (strato limite) gli effetti viscosi non sono trascurabili.

- **Zona esterna:** il flusso è descritto dal modello potenziale (inviscido). La velocità in un punto, calcolata con tale modello, è indicata con  $U_e$  (*edge velocity*).
- **Zona interna (strato limite):** gli effetti viscosi non sono trascurabili; il modello potenziale non è applicabile.

È importante sottolineare che  $U_e$  non è in generale uguale a  $U_\infty$ : le due velocità coincidono solo nel caso particolare della lastra piana con incidenza nulla. Per una superficie curva,  $U_e$  varia lungo il corpo ed è determinata dalla soluzione del campo potenziale esterno.

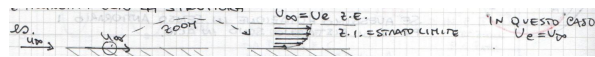


Figura 1.12: Confronto tra lastra piana ( $U_e = U_\infty$ ) e superficie curva ( $U_e \neq U_\infty$ ). Lo strato limite è indicato con z.l.

### 1.5.3 Ipotesi fondamentale e problema a due scale

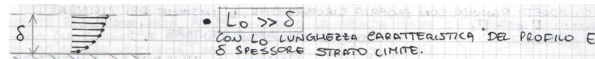


Figura 1.13: Lo spessore dello strato limite  $\delta$  deve essere molto minore della lunghezza caratteristica del profilo  $L_0$ . Se questa ipotesi non è soddisfatta, occorre risolvere il set completo di equazioni.

L'ipotesi fondamentale della teoria dello strato limite è che lo spessore  $\delta$  sia molto minore della lunghezza caratteristica del corpo  $L_0$ :

$$\delta \ll L_0. \tag{1.15}$$

Se questa condizione non è soddisfatta, è necessario risolvere il set completo delle equazioni di Navier–Stokes.

Il problema dello strato limite è un **problema a due scale**: la coordinata  $x$  lungo la parete varia su scale dell'ordine di  $L_0$ , mentre la coordinata  $y$  normale alla parete varia su scale dell'ordine di  $\delta$ . L'adimensionalizzazione richiede quindi due scale distinte:

$$x^* = \frac{x}{L_0} = O(1), \quad y^* = \frac{y}{\delta} = O(1). \tag{1.16}$$

Il sistema di riferimento è scelto con l'asse  $x$  tangente alla parete e l'asse  $y$  normale ad essa. Le due componenti di velocità sono di ordini di grandezza diversi: la componente tangenziale  $u$  è dell'ordine di  $U_e$ , mentre la componente normale  $v$  è molto più piccola. Per ottenere grandezze adimensionali di ordine unitario si introduce una scala di velocità  $V_e$  per la componente normale:

$$u^* = \frac{u}{U_e} = O(1), \quad v^* = \frac{v}{V_e} = O(1). \tag{1.17}$$

Analogamente, si possono definire due numeri di Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_0 U_e L_0}{\mu} \rightarrow \infty \quad (\text{campo esterno, potenziale}), \quad Re_\delta = \frac{\rho_0 V_e \delta}{\mu} \sim 1 \quad (\text{strato limite}). \quad (1.18)$$

## 1.6 Derivazione delle equazioni di Prandtl

### 1.6.1 Equazioni di partenza

Le ipotesi adottate sono:

- flusso bidimensionale:  $\vec{u} = (u, v)$ ;
- flusso stazionario ( $St \rightarrow \infty$ );
- forze di massa trascurabili ( $Fr \rightarrow \infty$ );
- flusso incomprimibile ( $Ma < 0,3$ ,  $Bo \ll 1$ ), con  $\rho$  costante.

Il set di equazioni si riduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.19)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.20)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (1.21)$$

Le incognite sono  $u$ ,  $v$  e  $p$ .

### 1.6.2 Adimensionalizzazione dell'equazione di continuità

Introducendo le variabili adimensionali (1.16)–(1.17), l'equazione di continuità diventa:

$$\frac{U_e}{L_0} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_e}{\delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (1.22)$$

Dividendo per  $U_e/L_0$ :

$$\underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{O(1)} + \frac{V_e L_0}{U_e \delta} \underbrace{\frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{O(1)} = 0. \quad (1.23)$$

Affinché entrambi i termini siano dello stesso ordine di grandezza, è necessario che:

$$\frac{V_e}{U_e} \sim \frac{\delta}{L_0}. \quad (1.24)$$

Il rapporto tra le scale di velocità deve essere uguale al rapporto tra le scale di lunghezza.

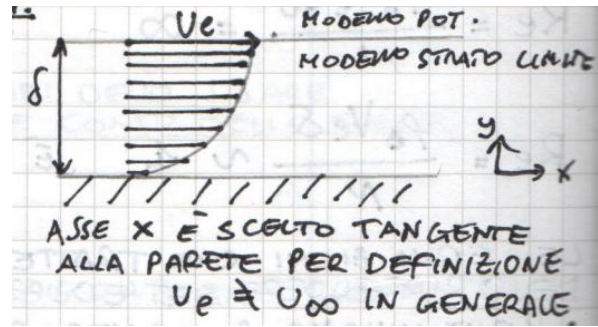


Figura 1.14: Profilo di velocità nello strato limite. L'asse  $x$  è tangente alla parete;  $V_e$  è la velocità al bordo dello strato limite calcolata con il modello potenziale. In generale  $V_e \neq U_\infty$ .

### 1.6.3 Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto in $x$

Adimensionalizzando l'equazione (1.20) e dividendo per  $\rho U_e^2/L_0$ , con la scelta  $p_0 = \frac{1}{2}\rho U_e^2$  come pressione di riferimento<sup>8</sup>:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{L_0^2}{\delta^2} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (1.25)$$

Nel campo esterno  $Re \rightarrow \infty$  e il termine  $1/Re$  tenderebbe a zero, eliminando ogni effetto viscoso. Affinché il termine viscoso con la derivata in  $y$  sopravviva — il che è essenziale per descrivere lo strato limite — occorre che:

$$\left(\frac{L_0}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{1}{Re} \sim 1 \quad \implies \quad \frac{\delta}{L_0} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}. \quad (1.26)$$

Questa relazione fondamentale fornisce una stima per ordini di grandezza dello spessore dello strato limite. Ad esempio, per  $L_0 = 1$  m e  $Re \sim 10^6$ , si ottiene  $\delta \sim 10^{-3}$  m = 1 mm: lo strato limite è una regione estremamente sottile.

Il termine  $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$  è trascurabile rispetto al termine con la derivata in  $y^*$  (il rapporto tra i due è  $\delta^2/L_0^2 \ll 1$ ) e viene eliminato.

### 1.6.4 Equazione della quantità di moto in $y$ : la pressione nello strato limite

Applicando la stessa procedura di adimensionalizzazione all'equazione (1.21) e facendo tendere  $Re \rightarrow \infty$ , tutti i termini risultano trascurabili tranne uno, e si ottiene il risultato fondamentale:

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0. \quad (1.27)$$

**Interpretazione fisica.** La pressione non varia attraverso lo strato limite nella direzione normale alla parete: la pressione alla parete  $p_w$  è uguale alla pressione al bordo esterno  $p_e$ . Di conseguenza,  $p$  non è più un'incognita indipendente nello strato limite: essa è *imposta* dal campo esterno potenziale. In altre parole:

$$p(x, y) = p_e(x). \quad (1.28)$$

La pressione dipende da  $x$  ma non da  $y$  all'interno dello strato limite.

<sup>8</sup>Questa scelta rende il numero di Ruark (rapporto tra forze di pressione e forze inerziali) pari a uno, eliminando un coefficiente dall'equazione adimensionale.



Figura 1.15: La pressione è costante lungo la direzione  $y$  nello strato limite:  $p_w = p_e$ .

### 1.6.5 Le equazioni di Prandtl

Poiché  $p_e$  è nota dal campo esterno, il suo gradiente si ricava dal teorema di Bernoulli applicato lungo il bordo dello strato limite:

$$p_e + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = \text{cost} \quad \implies \quad \frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}. \quad (1.29)$$

Sostituendo nella (1.25) e tornando alla forma dimensionale, si ottengono le **equazioni di Prandtl** (equazioni dello strato limite):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (1.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{array} \right. \quad (1.31)$$

In forma adimensionale equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = U_e^* \frac{dU_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \end{array} \right. \quad (1.33)$$

oppure, equivalentemente, mantenendo il gradiente di pressione esplicito:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p_e^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (1.34)$$

**Interpretazione fisica.** Le equazioni di Prandtl rappresentano un'enorme semplificazione rispetto alle equazioni di Navier–Stokes complete: la seconda equazione del moto ( $y$ ) è sostituita dalla condizione  $\partial p/\partial y = 0$ , e il termine di diffusione viscosa lungo  $x$  scompare. Il sistema è *parabolico* in  $x$  (anziché ellittico come le Navier–Stokes), il che consente la risoluzione per marcia in avanti lungo la corrente. Il termine  $U_e dU_e/dx$  funge da forzante e accoppia la soluzione interna (strato limite) con quella esterna (campo potenziale).

## 1.7 Separazione dello strato limite

Le equazioni di Prandtl sono essenziali per lo studio dei flussi che si distaccano dalla parete. La **separazione dello strato limite** si verifica quando le linee di corrente cessano di seguire il contorno del corpo.

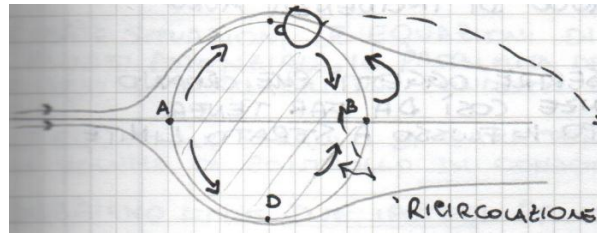


Figura 1.16: Separazione del flusso attorno a una superficie curva. Le linee di corrente seguono la parete fino al punto di separazione, oltre il quale si forma una zona di ricircolo.

### 1.7.1 Analisi qualitativa dei profili di velocità

L'analisi dei profili di velocità in prossimità della parete consente di identificare tre situazioni distinte:

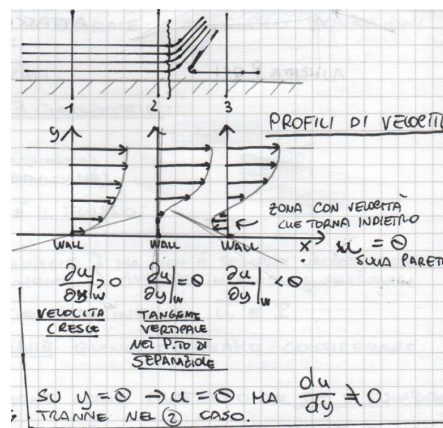


Figura 1.17: Tre profili di velocità nello strato limite: (1) flusso aderente, (2) punto di separazione, (3) flusso separato con ricircolo.

1. **Flusso aderente:** sulla parete ( $y = 0$ ) si ha  $u = 0$  e  $\partial u / \partial y > 0$ . La derivata seconda è negativa ( $\partial^2 u / \partial y^2|_w < 0$ ): il profilo ha concavità rivolta verso il basso.
2. **Punto di separazione:** sulla parete  $\partial u / \partial y|_w = 0$ , ovvero la tangente al profilo è verticale. La derivata seconda è positiva ( $\partial^2 u / \partial y^2|_w > 0$ ): il profilo flette cambiando concavità.
3. **Flusso separato:** si ha  $\partial u / \partial y|_w < 0$ , il che implica la presenza di flusso di ritorno in prossimità della parete. La derivata seconda rimane positiva.

La condizione  $\partial^2 u / \partial y^2|_w > 0$  è *necessaria* per la separazione, ma *non sufficiente*: la separazione si verifica effettivamente solo quando  $\partial u / \partial y|_w = 0$  (o diventa negativa).

### 1.7.2 Ruolo del gradiente di pressione

Dall'equazione di Prandtl (1.31) valutata alla parete ( $u = v = 0$ ):

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} = \frac{dp_e}{dx}. \tag{1.35}$$

Pertanto:

- Se  $dp_e/dx < 0$  (**gradiente favorevole**, flusso accelerato, sezione convergente):  $\partial^2 u / \partial y^2|_w < 0$ . Il profilo è stabile e la separazione *non* può verificarsi.
- Se  $dp_e/dx > 0$  (**gradiente avverso**, flusso decelerato, sezione divergente):  $\partial^2 u / \partial y^2|_w > 0$ . La separazione *può* verificarsi.

Per ridurre il rischio di separazione in presenza di gradiente avverso, occorre mantenere la variazione di pressione piccola, ad esempio utilizzando condotti debolmente divergenti<sup>9</sup>.

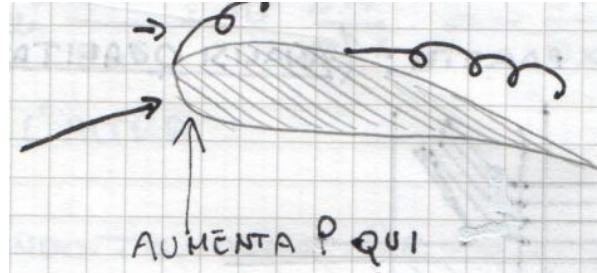


Figura 1.18: Profilo alare ad elevato angolo di incidenza: il gradiente avverso di pressione sul dorso provoca la separazione dello strato limite e la formazione di una zona di ricircolo.

Aumentando l'angolo di incidenza, il gradiente avverso sul dorso del profilo cresce e la separazione avviene più a monte, con progressiva perdita di portanza fino allo *stallo*. Per ritardare la separazione si possono inserire dispositivi che generano turbolenza (ad esempio generatori di vortici), favorendo il mescolamento e l'apporto di quantità di moto verso la parete<sup>10</sup>.

## 1.8 Flussi comprimibili in condotti

Nei flussi comprimibili la densità  $\rho$  gioca un ruolo determinante e non può essere considerata costante. Analogamente a quanto fatto per i flussi potenziali e per lo strato limite, anche in questo caso le equazioni di governo si semplificano sotto opportune ipotesi. Le equazioni saranno di carattere integrale, ottenute integrando le equazioni di conservazione su volumi di controllo che coincidono con i condotti.

Le geometrie fondamentali dei condotti sono tre:

1. condotto a sezione costante,
2. condotto divergente (sezione crescente nella direzione del flusso),
3. condotto convergente (sezione decrescente nella direzione del flusso).

## 1.9 Ipotesi del modello e semplificazione delle equazioni

Nei flussi comprimibili in condotti, la densità  $\rho$  gioca un ruolo determinante e non può essere trascurata. Prima di procedere alla formulazione del modello, è necessario precisare che la

<sup>9</sup>Nelle gallerie del vento il diffusore è progettato molto lungo proprio per limitare il gradiente avverso. Negli aerei, dove le dimensioni sono vincolate, si adottano strategie diverse, come la compressione esterna del flusso prima dell'ingresso nella presa d'aria.

<sup>10</sup>Lo strato limite turbolento è più resistente alla separazione rispetto a quello laminare, proprio perché il mescolamento turbolento trasporta fluido ad alta velocità dalla zona esterna verso la parete.

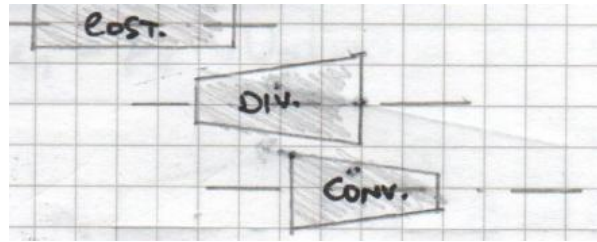


Figura 1.19: Le tre geometrie fondamentali di condotto: sezione costante, divergente e convergente.

*geometria* del condotto non determina univocamente il comportamento fisico del flusso: un condotto convergente non implica necessariamente un aumento di velocità, come accade invece nei flussi incompruibili. Il numero di Mach  $M$  è la grandezza chiave che discrimina i diversi regimi.

### 1.9.1 Ipotesi sui gruppi dimensionali

Partendo dal set completo di equazioni adimensionalizzate, si adottano le seguenti ipotesi:

- $M > 0,3$ : il flusso è comprimibile e si deve considerare l'intero set di equazioni, inclusa l'equazione dell'energia e l'equazione di stato;
- $Re \rightarrow \infty$ : i condotti hanno dimensioni industriali (diametri di almeno qualche centimetro) e velocità sufficientemente elevate, per cui gli effetti viscosi sono trascurabili;
- $Fr \rightarrow \infty$ : le forze di massa sono trascurabili, trattandosi di gas o aria in condotti a quota pressoché costante;
- $St \rightarrow \infty$ : il flusso è stazionario, con tempi caratteristici del fenomeno molto lunghi rispetto ai tempi di transito;
- $Ru = 1$ : non si è in presenza di cavitazione, e la pressione di riferimento coincide con la pressione dinamica ( $p_{\text{ref}} = p_{\text{din}}$ );
- condotto adiabatico: non vi è scambio di calore attraverso le pareti<sup>11</sup>.

Sotto queste ipotesi, il set di equazioni si riduce a:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.36)$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p, \quad (1.37)$$

$$\rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \vec{u} \cdot \nabla p, \quad (1.38)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (1.39)$$

L'obiettivo è trasformare queste equazioni dalla forma differenziale alla forma integrale, così da poterle applicare direttamente a volumi di controllo definiti dalle sezioni del condotto.

### 1.9.2 Ipotesi di sezione debolmente variabile

Si consideri un condotto generico con asse allineato alla direzione  $x$  e sezione trasversale  $A(x)$ .

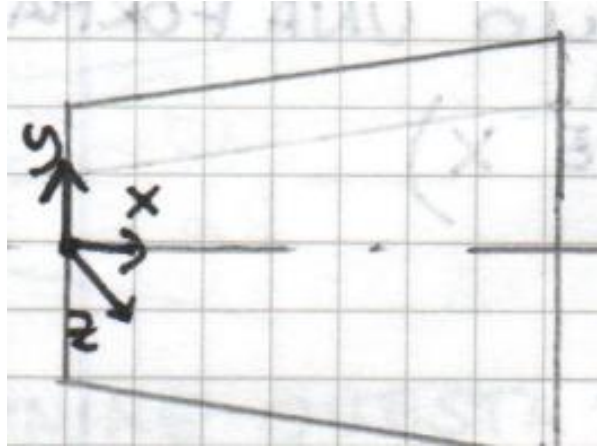


Figura 1.20: Condotto generico con sistema di riferimento: l'asse  $x$  è allineato con la direzione preferenziale del flusso  $u_0$ .

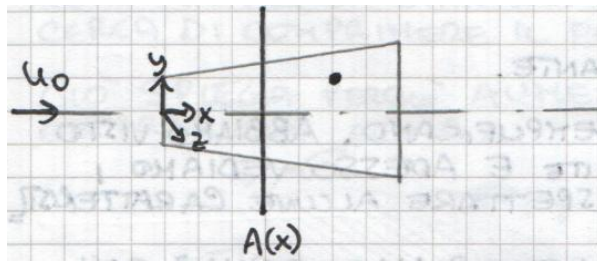


Figura 1.21: Vista tridimensionale del condotto con sezione trasversale  $A(x)$ . In un punto arbitrario la velocità ha tre componenti  $\vec{u} = (u, v, w)$ .

L'ipotesi fondamentale è che la sezione vari debolmente lungo  $x$ :

$$\frac{dA}{dx} \approx \text{piccolo}. \quad (1.40)$$

Da questa ipotesi discendono conseguenze importanti. In primo luogo, se la sezione varia poco, le componenti trasversali della velocità ( $v$  e  $w$ ) sono molto più piccole della componente assiale:

$$u \gg v, \quad u \gg w. \quad (1.41)$$

In secondo luogo, l'assenza di strato limite (conseguenza di  $Re \rightarrow \infty$ ) implica che non vi sono gradienti di velocità nella direzione trasversale. Le sei incognite originarie ( $u, v, w, p, T, \rho$ ) si riducono pertanto a quattro:

$$(u, v, w, p, T, \rho) \longrightarrow (u, p, T, \rho), \quad (1.42)$$

e ciascuna di esse dipende *unicamente* dalla coordinata assiale  $x$ :

$$\rho = \rho(x), \quad u = u(x), \quad p = p(x), \quad T = T(x). \quad (1.43)$$

Di conseguenza, tutte le derivate rispetto a  $y$  e  $z$  si annullano identicamente, e le derivate parziali diventano derivate ordinarie<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>L'adiabaticità del condotto discende formalmente dall'eliminazione del termine di conduzione termica nell'equazione dell'energia adimensionalizzata, essendo il coefficiente  $1/(Re Pr)$  trascurabile per  $Re \rightarrow \infty$ .

<sup>12</sup>Se fosse presente lo strato limite, la componente  $u$  dipenderebbe anche da  $y$ , introducendo termini viscosi incompatibili con l'ipotesi  $Re \rightarrow \infty$ .

## 1.10 Integrazione delle equazioni

L'obiettivo è portare ciascuna equazione nella forma  $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$ , così che, integrata, fornisca una legge di conservazione.

### 1.10.1 Equazione di conservazione della massa

Dalla (1.36), in forma monodimensionale:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0. \quad (1.44)$$

Scegliendo come volume di controllo il condotto compreso tra due sezioni  $A_1$  e  $A_2$ , e integrando sulla superficie di controllo:

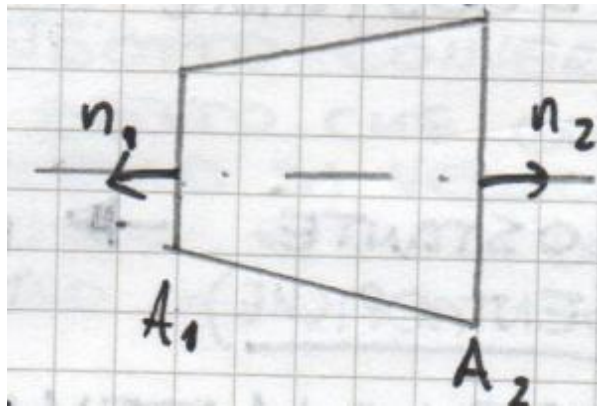


Figura 1.22: Volume di controllo tra le sezioni  $A_1$  e  $A_2$ . I versori normali  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  puntano verso l'esterno. Il flusso procede da sinistra a destra.

$$\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \implies \quad \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2, \quad (1.45)$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\rho$  e  $u$  sono costanti sulla sezione (dipendono solo da  $x$ ). Il risultato fondamentale è la **conservazione della portata in massa**:

$$\boxed{\rho u A = \text{costante}}, \quad (1.46)$$

con  $\rho = \rho(x)$ ,  $u = u(x)$  e  $A = A(x)$ .

### 1.10.2 Equazione della quantità di moto

L'equazione della quantità di moto (1.37), in forma monodimensionale, diventa:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}. \quad (1.47)$$

Questa equazione non è direttamente integrabile nella forma  $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$ , poiché non è possibile raccogliere tutte le variabili sotto un'unica derivata totale. Si ritornerà su questo punto, sostituendola con una relazione isentropica.

### 1.10.3 Equazione dell'energia

Dall'equazione dell'energia (1.38):

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \frac{dp}{dx}. \quad (1.48)$$

Sostituendo  $dp/dx$  dalla (1.47):

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = -\rho u^2 \frac{du}{dx}. \quad (1.49)$$

Dividendo per  $\rho u$  e riconoscendo che  $u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right)$ :

$$\frac{d}{dx}(c_p T) + \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dx} \left( c_p T + \frac{u^2}{2} \right) = 0. \quad (1.50)$$

Integrando:

$$\boxed{c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante.}} \quad (1.51)$$

**Interpretazione fisica.** L'equazione (1.51) esprime la conservazione dell'entalpia totale (o di ristagno) lungo il condotto: la somma dell'entalpia statica  $c_p T$  e dell'energia cinetica specifica  $u^2/2$  si mantiene costante. Un aumento di velocità comporta necessariamente una diminuzione di temperatura, e viceversa. Il termine  $u^2/(2 c_p)$  ricorda la struttura del numero di Eckert e quantifica il riscaldamento cinetico del fluido<sup>13</sup>.

### 1.10.4 Isentropicità del flusso

Riprendendo l'equazione dell'energia in forma entropica, la variazione di entropia lungo una linea di flusso è governata da tre sorgenti: la dissipazione viscosa ( $\rho \Phi^2$ ), la produzione volumetrica di calore ( $\rho q$ ) e lo scambio termico per conduzione ( $\rho c_p \nabla^2 T$ ). Sotto le ipotesi adottate ( $Re \rightarrow \infty$ , condotto adiabatico, assenza di sorgenti di calore), tutti e tre i termini si annullano, e si ottiene:

$$\vec{u} \cdot \nabla S = 0 \quad \implies \quad S = \text{costante lungo una linea di flusso.} \quad (1.52)$$

Il flusso è dunque **isentropico**: ciò non è un'ipotesi aggiuntiva, bensì una *conseguenza* delle ipotesi precedenti. Questo risultato consente di utilizzare le relazioni isentropiche per un gas perfetto:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante}, \quad (1.53)$$

che sostituisce l'equazione della quantità di moto (1.47) nel sistema algebrico.

<sup>13</sup>In un gas perfetto,  $c_p T$  rappresenta l'entalpia specifica; la costante a secondo membro è detta *entalpia totale*  $H_0$ .

## 1.11 Il modello quasi-unidimensionale

Il set completo di equazioni per i **flussi comprimibili in condotti a sezione debolmente variabile** (modello quasi-1D) è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u A = \text{costante} \quad (\text{conservazione della massa}), \\ c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \quad (\text{conservazione dell'energia}), \\ \frac{p}{\rho} = RT \quad (\text{equazione di stato}), \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{costante} \quad (\text{relazione isentropica}). \end{array} \right. \quad (1.54)$$

Il termine *quasi-unidimensionale* indica che, pur essendovi una sola variabile indipendente  $x$ , l'area  $A(x)$  entra come parametro variabile: se  $A$  fosse costante il modello sarebbe strettamente unidimensionale. Le incognite sono  $\rho(x)$ ,  $u(x)$ ,  $p(x)$  e  $T(x)$ ; le costanti del gas ( $c_p$ ,  $R$ ,  $\gamma$ ) sono note. Conoscendo le condizioni in una sezione di ingresso e la geometria  $A(x)$ , il sistema (1.54) consente di determinare tutte le grandezze in qualsiasi altra sezione.

In gasdinamica, la variabile cinematica privilegiata non è la velocità  $u$ , bensì il **numero di Mach**  $M = u/c_0$ , dove  $c_0 = \sqrt{\gamma RT}$  è la velocità del suono locale.

## 1.12 Relazione fondamentale area–velocità–Mach

### 1.12.1 Derivazione

Per comprendere come la geometria del condotto influenzi il flusso, si combinano l'equazione di conservazione della massa e quella della quantità di moto. Derivando  $\rho u A = \text{costante}$  rispetto a  $x$  e dividendo per  $\rho u A$ :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0. \quad (1.55)$$

Il termine  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx}$  si elimina utilizzando la definizione di velocità del suono per un flusso isentropico,

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \quad (1.56)$$

da cui  $d\rho = dp/c_0^2$ , e quindi:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{\rho c_0^2} \frac{dp}{dx}. \quad (1.57)$$

Dall'equazione della quantità di moto (1.47):  $\frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx}$ , e sostituendo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{u}{c_0^2} \frac{du}{dx}. \quad (1.58)$$

Inserendo nella (1.55) e raccogliendo:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \left( \frac{u^2}{c_0^2} - 1 \right), \quad (1.59)$$

ossia, riconoscendo  $M = u/c_0$ :

$$\boxed{\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} (M^2 - 1)}. \quad (1.60)$$

Questa è la **relazione fondamentale** che lega la variazione di area alla variazione di velocità attraverso il numero di Mach. Il fattore  $(M^2 - 1)$  cambia segno al passaggio da regime subsonico ( $M < 1$ ) a supersonico ( $M > 1$ ), rovesciando il comportamento del flusso rispetto all'esperienza incomprimibile.

### 1.12.2 Analisi dei regimi



Figura 1.23: Condotto convergente:  $dA/dx < 0$ .



Figura 1.24: Condotto divergente:  $dA/dx > 0$ .

Dalla (1.60) si ottengono quattro combinazioni possibili, riassunte nella tabella seguente:

	$M < 1$ (subsonico)	$M > 1$ (supersonico)
$dA/dx < 0$ (convergente)	$du/dx > 0$ <i>ugello</i>	$du/dx < 0$ <i>diffusore</i>
$dA/dx > 0$ (divergente)	$du/dx < 0$ <i>diffusore</i>	$du/dx > 0$ <i>ugello</i>

**Interpretazione fisica.** Nel regime subsonico il comportamento è *analogo* a quello dei fluidi incomprimibili: un restringimento della sezione accelera il flusso (ugello), un allargamento lo decelera (diffusore). Nel regime supersonico il comportamento è *opposto*: è il condotto divergente ad accelerare il flusso, e quello convergente a decelerarlo. La ragione risiede nel termine di densità nell'equazione di continuità  $\rho u A = \text{costante}$ : a velocità supersoniche la densità varia così rapidamente da compensare e invertire l'effetto della variazione d'area<sup>14</sup>.

<sup>14</sup>Un'analogia intuitiva per il regime subsonico è il traffico in una strettoia: le auto (fluido incomprimibile) rallentano quando la sezione si riduce. Nel regime supersonico questa analogia non è più valida.

### 1.12.3 La condizione sonica $M = 1$

Dalla (1.60), quando  $M = 1$  il secondo membro si annulla, il che richiede  $dA/dx = 0$ . Ciò significa che la condizione sonica può realizzarsi solamente in corrispondenza di un estremo dell'area: un *minimo* (gola) o un *massimo*.

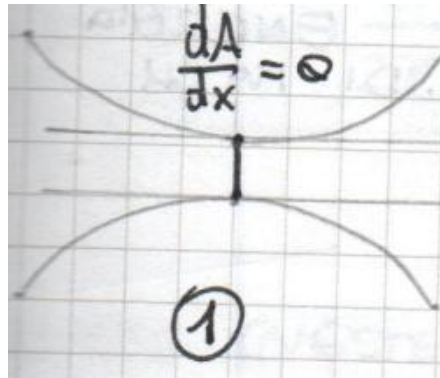


Figura 1.25: Sezione di area minima (gola) dove  $dA/dx = 0$ : configurazione di interesse ingegneristico con possibilità di  $M = 1$ .

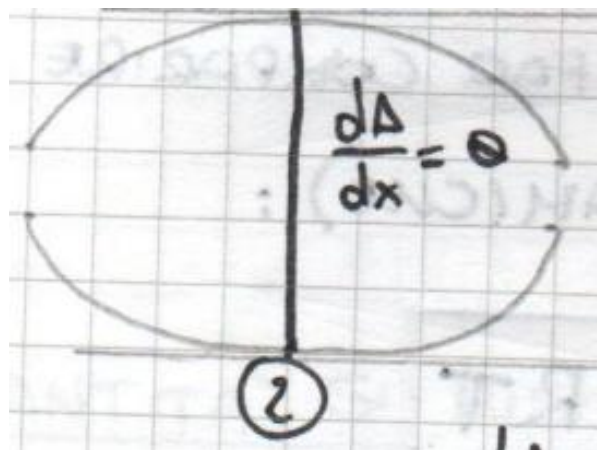


Figura 1.26: Sezione di area massima con  $dA/dx = 0$ : configurazione matematicamente corretta ma raramente utilizzata.

L'area minima prende il nome di **gola** (*throat*) ed è la configurazione di gran lunga più rilevante dal punto di vista ingegneristico. È importante sottolineare che la presenza di una gola *non* garantisce automaticamente  $M = 1$ : la condizione sonica si realizza solo se le condizioni al contorno (in particolare la pressione a valle) lo permettono.

Se il flusso deve passare da subsonico a supersonico (o viceversa), deve necessariamente transitare per  $M = 1$ , e ciò avviene nella gola. È per questo motivo che i condotti convergenti-divergenti (*de Laval*) sono essenziali per ottenere flussi supersonici.

**Condizione di soffocamento (*choking*).** La condizione  $M = 1$  nella gola corrisponde alla **massima portata in massa** che il condotto può smaltire. Oltre questo limite, anche riducendo ulteriormente la pressione a valle, la portata non aumenta: il condotto è “soffocato” (*choked*).



Figura 1.27: Diffusore supersonico-subsonico: il flusso entra con  $M > 1$ , raggiunge  $M = 1$  nella gola e decelera a  $M < 1$  nella sezione divergente.

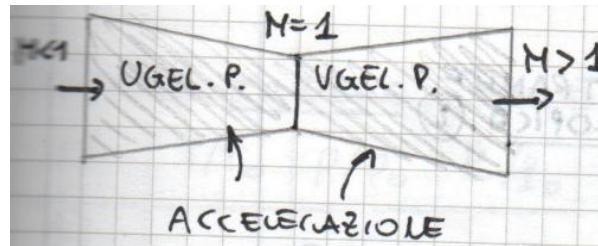


Figura 1.28: Ugello convergente-divergente (de Laval): il flusso entra con  $M < 1$ , raggiunge  $M = 1$  nella gola e accelera a  $M > 1$  nella sezione divergente.

Per ottenere un numero di Mach superiore a uno è necessario disporre di una sezione divergente a valle della gola<sup>15</sup>.

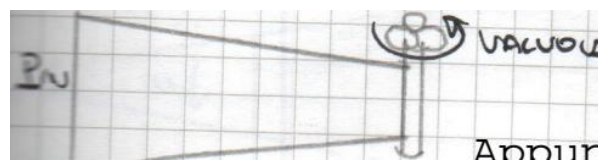


Figura 1.29: Condotto convergente con valvola in uscita: aprendo la valvola si riduce la pressione a valle, accelerando il flusso fino al limite  $M = 1$  nella sezione minima.

## 1.13 Relazioni in funzione del numero di Mach

### 1.13.1 Rapporto delle temperature

Si parte dall'equazione di conservazione dell'energia (1.51) applicata tra una sezione 1 e una sezione 2:

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (1.61)$$

Ricordando le relazioni termodinamiche per un gas perfetto,  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  e  $u^2 = M^2 c_0^2 = M^2 \gamma R T$ , e sostituendo:

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{M_1^2 \gamma R T_1}{2} = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{M_2^2 \gamma R T_2}{2}. \quad (1.62)$$

<sup>15</sup>In un condotto unicamente convergente, il Mach può crescere al massimo fino a  $M = 1$  nella sezione di uscita; per superare la barriera sonora occorre aggiungere un tratto divergente.

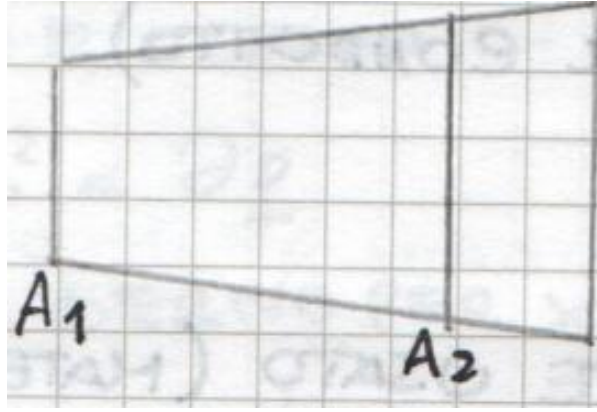


Figura 1.30: Volume di controllo tra le sezioni  $A_1$  e  $A_2$  per l'applicazione del bilancio energetico.

Moltiplicando per  $(\gamma - 1)/(\gamma R)$  e raccogliendo  $T_1$  e  $T_2$ :

$$T_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right), \quad (1.63)$$

da cui la prima **relazione fondamentale**:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}. \quad (1.64)$$

### 1.13.2 Rapporto delle pressioni e delle densità

Dalle relazioni isentropiche si ottiene direttamente:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (1.65)$$

e dall'equazione di stato:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (1.66)$$

In generale, tutti i rapporti termodinamici sono funzioni dei soli numeri di Mach  $M_1$  e  $M_2$ .

### 1.13.3 Condizioni di ristagno

Nei problemi applicativi è frequente riferirsi a una sezione in cui il fluido è in quiete ( $u = 0$ , ovvero  $M = 0$ ). Le grandezze in tale sezione sono dette **grandezze di ristagno** (o **totali**) e si indicano con il pedice 0 (o, in alcuni testi, con il pedice  $t$ ):  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$ .

Dall'equazione dell'energia (1.51) con  $u = 0$ :

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} = H_0, \quad (1.67)$$

dove  $H_0$  è l'**entalpia totale**. La **temperatura di ristagno** (o temperatura totale) è:

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2 c_p}. \quad (1.68)$$

Ponendo  $M_1 = 0$  nella (1.64):

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}}, \quad (1.69)$$

e analogamente, dalle relazioni isentropiche:

$$\frac{p}{p_0}(M), \quad \frac{\rho}{\rho_0}(M). \quad (1.70)$$

**Interpretazione fisica.** In sintesi, conoscendo le condizioni di ristagno  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  e il numero di Mach locale  $M$ , le relazioni (1.69)–(1.70) forniscono immediatamente le grandezze termodinamiche statiche in qualsiasi sezione del condotto. Queste relazioni sono tabulabili e, storicamente, furono raccolte in tabelle sviluppate negli anni '40 e '50, ampiamente utilizzate nella progettazione di ugelli e prese d'aria.

### 1.13.4 Rapporto delle aree

Per quanto riguarda l'informazione geometrica, dall'equazione di conservazione della massa  $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_2 u_2}. \quad (1.71)$$

Ricordando che  $u = M c_0 = M \sqrt{\gamma R T}$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{M_1}{M_2} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}, \quad (1.72)$$

che è funzione esclusivamente di  $M_1$  e  $M_2$ .

Ponendo  $M_1 = 0$  si otterrebbe  $A_1 \rightarrow \infty$ , risultato privo di significato fisico: nella condizione di ristagno la velocità è nulla e l'area necessaria per smaltire una portata finita diverge. Per il rapporto delle aree si assume pertanto  $M_1 = 1$ : la sezione di riferimento è quella in cui il flusso è sonico, detta **sezione critica**  $A^*$ . Il rapporto diventa:

$$\boxed{\frac{A}{A^*} = f(M)}, \quad (1.73)$$

funzione del solo numero di Mach della sezione generica.

**Interpretazione fisica.** La relazione  $A/A^*(M)$  è *non lineare* e, per ogni valore di  $A/A^* > 1$ , ammette *due soluzioni*: una subsonica ( $M_I < 1$ ) e una supersonica ( $M_{II} > 1$ ). Ciò riflette il fatto che la stessa area può essere raggiunta sia accelerando da subsonico sia decelerando da supersonico.

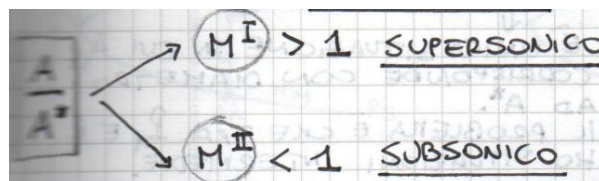


Figura 1.31: Curva  $A/A^*$  in funzione di  $M$ . Per ogni valore  $A/A^* > 1$  esistono due soluzioni:  $M_I < 1$  (ramo subsonico) e  $M_{II} > 1$  (ramo supersonico). Il minimo  $A/A^* = 1$  si ha per  $M = 1$ .

La scelta tra le due soluzioni dipende dalla *storia* del flusso, ovvero dalla geometria complessiva del condotto e dalle condizioni al contorno. Ad esempio, se il flusso proviene da un serbatoio a pressione  $p_0$  e attraversa un condotto convergente-divergente:

- se la pressione in uscita  $p_u$  è sufficientemente alta, il flusso rimane subsonico ovunque ( $M_I$ );
- se  $p_u$  è sufficientemente bassa, il flusso diventa supersonico nella sezione divergente ( $M_{II}$ ).

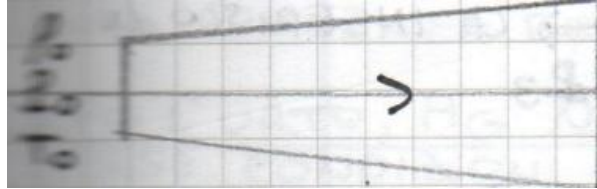


Figura 1.32: Schema di un serbatoio ( $p_0, T_0, \rho_0$ ) collegato a un condotto convergente-divergente. A seconda della pressione in uscita si realizza il ramo subsonico o quello supersonico.

### 1.13.5 Gola geometrica e gola critica

È fondamentale distinguere tra la **gola geometrica**  $A_g$  (sezione minima del condotto) e la **sezione critica**  $A^*$  (sezione in cui  $M = 1$ ). In generale  $A_g \neq A^*$ : la gola geometrica non corrisponde necessariamente alla condizione sonica. Se il flusso non raggiunge  $M = 1$  nella gola, la sezione critica  $A^*$  è una *gola virtuale*, ovvero un valore di area che non esiste fisicamente nel condotto ma che serve come riferimento per il calcolo.

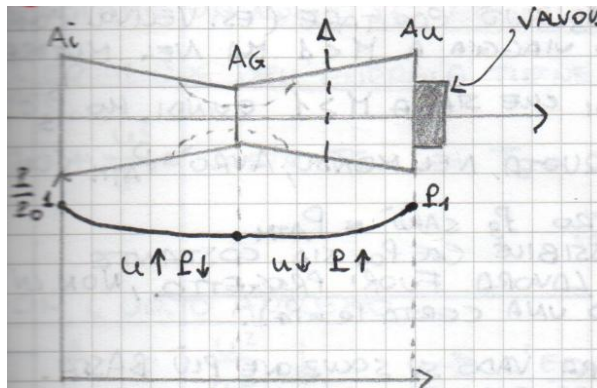


Figura 1.33: Condotto convergente-divergente con gola geometrica  $A_g$  e valvola in uscita. L'andamento della pressione  $p(x)$  dipende dall'apertura della valvola. La condizione  $M = 1$  in  $A_g$  si raggiunge solo per una specifica pressione in uscita.

Per utilizzare le tabelle isentropiche è necessario prima determinare  $A^*$  a partire dalle condizioni note. Ad esempio, noto il Mach in una sezione e l'area corrispondente, dalla curva  $A/A^*(M)$  si ricava  $A^*$ ; poi, data l'area di qualsiasi altra sezione, si risale al Mach locale.

**Riepilogo delle equazioni per le tabelle isentropiche.** I rapporti termodinamici e geometrici sono derivati ciascuno da un'equazione specifica del modello quasi-1D:

- $T_2/T_1 \leftarrow$  equazione dell'energia;
- $p_2/p_1 \leftarrow$  relazioni isentropiche;

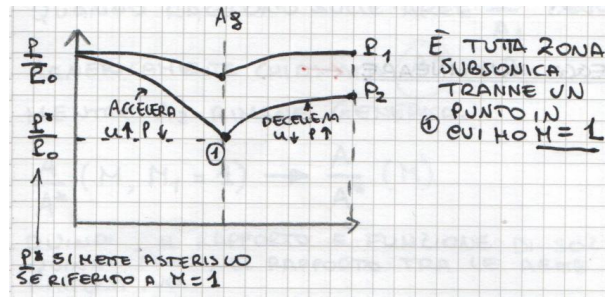


Figura 1.34: Andamento di  $p/p_0$  in funzione di  $A/A_g$ . A seconda della pressione a valle, il flusso segue il ramo subsonico ( $M < 1$ ) o quello supersonico ( $M > 1$ ). Il punto  $M = 1$  corrisponde al minimo dell'area.

- $\rho_2/\rho_1 \leftarrow$  equazione di stato + isentropiche;
- $A_2/A_1 \leftarrow$  equazione di conservazione della massa.

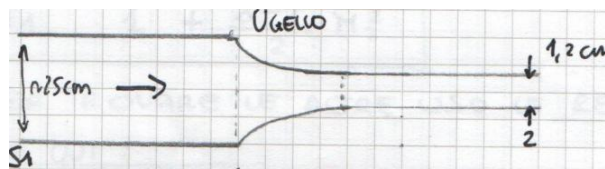


Figura 1.35: Schema di un ugello di galleria del vento. In ingresso ( $S_1$ ) il flusso ha  $M \approx 0,01$  (condizione di quasi-ristagno); in uscita ( $S_2$ ) si raggiunge  $M \approx 0,8$ .

**Esempio applicativo: galleria del vento.** Si consideri una galleria del vento in cui la sezione di ingresso  $S_1$  ha un numero di Mach molto basso ( $M_1 \approx 0,01$ ), mentre nella sezione di uscita  $S_2$  si raggiunge  $M_2 \approx 0,8$ . Poiché  $M_1 \ll 1$ , le condizioni in  $S_1$  possono essere assimilate a condizioni di ristagno ( $M_1 \approx 0$ ), e si possono assumere  $T_1 \approx T_0$ ,  $p_1 \approx p_0$ ,  $\rho_1 \approx \rho_0$ . Conoscendo  $A(x)$ , le tabelle isentropiche forniscono immediatamente  $T/T_0$ ,  $p/p_0$  e  $\rho/\rho_0$  in funzione del Mach locale, permettendo di caratterizzare completamente il campo di moto nel condotto.

## 1.14 Comportamento del condotto convergente-divergente al variare della pressione in uscita

L'analisi del flusso in un condotto convergente-divergente è governata dalla pressione imposta a valle  $p_u$  attraverso, ad esempio, una valvola. Il diagramma  $p/p_0$  in funzione della posizione assiale  $x$  mostra come, al variare di  $p_u$ , si realizzino scenari profondamente diversi.

### 1.14.1 Regime interamente subsonico

Quando la valvola è appena aperta, la differenza di pressione è modesta e il flusso rimane subsonico ovunque. In tal caso la gola geometrica  $A_g$  non coincide con la sezione critica  $A^*$ : il Mach in gola è inferiore a uno. Nella parte convergente il flusso accelera ( $u \uparrow$ ,  $p \downarrow$ ), nella parte divergente decelera ( $u \downarrow$ ,  $p \uparrow$ ), ma l'intero campo è subsonico.

In questa situazione esiste una **gola virtuale**  $A^*$  che non corrisponde ad alcuna sezione fisica del condotto. Per utilizzare le tabelle isentropiche è necessario prima determinare  $A^*$  a partire

dalle condizioni note (Mach e area in una sezione qualsiasi), e poi calcolare il rapporto  $A/A^*$  per le altre sezioni<sup>16</sup>.

### 1.14.2 Condizione di soffocamento e doppia soluzione

Continuando ad abbassare  $p_u$ , il flusso accelera fino a raggiungere  $M = 1$  nella gola: a questo punto  $A_g = A^*$  e il condotto è in condizione di **soffocamento** (*choking*). Questa è l'unica situazione in cui la gola geometrica coincide con la sezione critica.

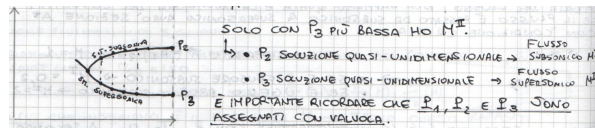


Figura 1.36: Diagramma  $p/p_0$  in funzione della posizione assiale. I punti  $P_2$  e  $P_3$  corrispondono rispettivamente alla soluzione subsonica ( $M_I$ ) e supersonica ( $M_{II}$ ) nella sezione divergente, a parità di rapporto  $A/A^*$ .

Una volta raggiunta la condizione di soffocamento, nella sezione divergente a valle della gola esistono due soluzioni isentropiche del modello quasi-unidimensionale:

- la soluzione **subsonica**  $M_I < 1$ , ottenuta per una pressione in uscita  $p_u = P_2$  relativamente elevata;
- la soluzione **supersonica**  $M_{II} > 1$ , ottenuta per una pressione in uscita  $p_u = P_3$  più bassa.

Le pressioni  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  sono imposte dalla valvola. Per determinare, ad esempio,  $P_2$  si entra nelle tabelle isentropiche con il rapporto  $A_u/A^*$  (dove  $A_u$  è l'area della sezione di uscita), si seleziona la soluzione subsonica  $M_I$ , e si calcola  $p = p_0 \cdot (p/p_0)(M_I)$ .

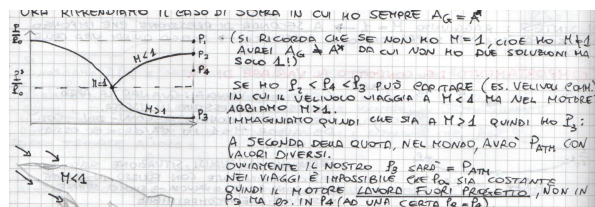


Figura 1.37: Andamento di  $p/p_0$  lungo il condotto per diverse pressioni in uscita. La curva che raggiunge  $P_3$  corrisponde alla soluzione interamente supersonica nella sezione divergente.

**Interpretazione fisica.** Le due soluzioni riflettono la natura non lineare della relazione  $A/A^*(M)$ : la stessa geometria può sostenere due campi di moto completamente diversi, e la scelta tra i due è determinata esclusivamente dalle condizioni al contorno, in particolare dalla pressione a valle.

## 1.15 Gli urti normali

### 1.15.1 Origine fisica dell'urto

Nelle applicazioni reali — ad esempio nei motori a reazione di velivoli commerciali — la pressione atmosferica  $p_{atm}$  in uscita può assumere un valore  $P_4$  intermedio tra  $P_2$  e  $P_3$  ( $P_3 < P_4 < P_2$ ).

<sup>16</sup>Se si tentasse di entrare nelle tabelle con  $A/A_g$ , si otterrebbe un risultato errato poiché  $A_g \neq A^*$  quando  $M \neq 1$  nella gola.

In tal caso il flusso non può seguire né la soluzione interamente subsonica né quella interamente supersonica.

Il flusso segue inizialmente la curva supersonica (accelerando nella sezione divergente), ma deve poi rallentare per adeguarsi alla pressione  $P_4$  più alta di  $P_3$ . Tuttavia, dalla relazione area-velocità-Mach, in un condotto divergente con  $M > 1$  il flusso *accelera* ( $du/dx > 0$ ): non è possibile un rallentamento graduale. Si verifica pertanto un fenomeno discontinuo: l'**urto normale** (*normal shock wave*).

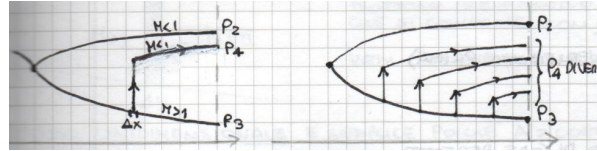


Figura 1.38: Schema dell'urto normale in un condotto divergente. A monte ( $M > 1$ ) il flusso è supersonico; attraverso una regione di spessore  $\Delta x$  estremamente sottile (qualche decina di micron) il flusso passa bruscamente a subsonico ( $M < 1$ ). A destra: dettaglio con i livelli di pressione  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ .

Per **urto normale** si intende un fenomeno fortemente concentrato nello spazio (spessore  $\Delta x$  dell'ordine di qualche decina di micron) in cui il flusso passa da supersonico ( $M > 1$ ) a subsonico ( $M < 1$ ) con un brusco aumento di pressione, temperatura e densità, e una corrispondente diminuzione di velocità.

### 1.15.2 Carattere dissipativo dell'urto

Nello spessore  $\Delta x$  dell'urto il gradiente di velocità è enorme — ad esempio da 500 m/s a 70 m/s su pochi micron — e gli effetti viscosi non sono più trascurabili. L'urto è pertanto un **fenomeno dissipativo**: l'entropia aumenta e le relazioni isentropiche  $p/\rho^\gamma = \text{costante}$  cessano di valere.

Di conseguenza, la quarta equazione del modello quasi-unidimensionale (la relazione isentropica) non è più utilizzabile attraverso l'urto, e il sistema si riduce a tre equazioni per quattro incognite. È necessario un nuovo approccio.

**Interpretazione fisica.** Sebbene l'urto sia dissipativo, il suo spessore è così ridotto che, *subito prima e subito dopo*  $\Delta x$ , il flusso è nuovamente isentropico e il modello quasi-unidimensionale torna applicabile. Non è quindi necessario un modello diverso per l'intero condotto, ma solo per il “salto” attraverso l'urto. Dopo l'urto, però, le condizioni di ristagno cambiano: si avrà  $p_{0,\text{valle}} \neq p_{0,\text{monte}}$ , come se il condotto a valle fosse collegato a un serbatoio diverso.

### 1.15.3 Conservazione e variazione delle grandezze totali

L'equazione dell'energia, che esprime la conservazione dell'entalpia totale, resta valida anche attraverso l'urto:

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \quad \implies \quad T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = \text{costante}. \quad (1.74)$$

Pertanto la **temperatura totale si conserva** attraverso l'urto:

$$T_{0,\text{valle}} = T_{0,\text{monte}}. \quad (1.75)$$

Al contrario, essendo l'urto dissipativo, la **pressione totale non si conserva**:

$$p_{0,\text{valle}} \neq p_{0,\text{monte}}. \quad (1.76)$$

## 1.16 Il modello unidimensionale per l'urto

### 1.16.1 Derivazione del set di equazioni

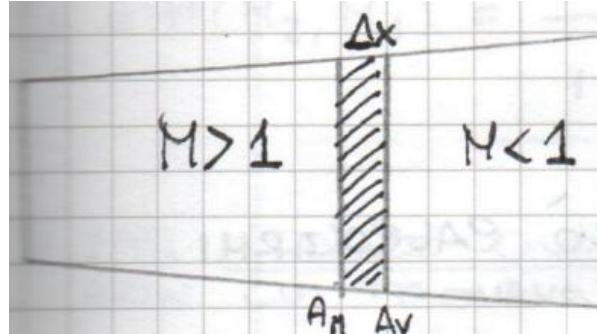


Figura 1.39: Volume di controllo attraverso l'urto. Le sezioni a monte ( $A_M$ ) e a valle ( $A_V$ ) hanno la stessa area poiché  $\Delta x$  è infinitesimo. Il flusso passa da  $M > 1$  a  $M < 1$ .

Poiché  $\Delta x$  è infinitesimo, le sezioni a monte e a valle dell'urto hanno la stessa area:  $A_M \approx A_V$ . Questo fatto cruciale permette di passare dal modello *quasi*-unidimensionale (in cui  $A$  varia) al modello propriamente **unidimensionale** (in cui  $A$  è costante). Le quattro equazioni del modello sono:

**1. Equazione di conservazione della massa.** Con  $A =$  costante:

$$\rho u = \text{costante.} \quad (1.77)$$

**2. Equazione dell'energia.** Identica a quella del modello quasi-unidimensionale, essendo valida indipendentemente dall'isentropicità:

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante.} \quad (1.78)$$

**3. Equazione di stato.** Per un gas perfetto:

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (1.79)$$

**4. Equazione della quantità di moto.** Questa è la novità fondamentale. L'equazione

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (1.80)$$

può ora essere integrata poiché, dalla (1.77),  $\rho u =$  costante. Riscrivendo:

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad \implies \quad p + \rho u^2 = \text{costante.} \quad (1.81)$$

Il set completo per il modello unidimensionale (urto) è dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u = \text{costante}, \\ c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{costante}, \\ \frac{p}{\rho} = RT, \\ p + \rho u^2 = \text{costante}. \end{array} \right. \quad (1.82)$$

Queste equazioni, applicate tra la sezione a monte (pedice 1) e quella a valle (pedice 2) dell'urto, prendono il nome di **relazioni di salto**<sup>17</sup>.

**Interpretazione fisica.** Nel modello quasi-unidimensionale l'equazione della quantità di moto non era integrabile perché  $A$  variava; la relazione isentropica la sostituiva. Nell'urto avviene l'opposto: l'isentropicità si perde, ma  $A$  diventa costante, rendendo integrabile la quantità di moto. Il sistema resta così determinato: quattro equazioni per quattro incognite ( $u_2, p_2, \rho_2, T_2$ ).

### 1.16.2 Strategia di calcolo complessiva

Il calcolo di un flusso con urto in un condotto convergente-divergente si articola in tre fasi:

1. **Da ingresso a monte dell'urto:** modello isentropico (quasi-unidimensionale). Si determinano  $u_M, p_M, \rho_M, T_M$  (e  $M_1$ ).
2. **Attraverso l'urto:** modello unidimensionale (relazioni di salto). Si determinano  $u_V, p_V, \rho_V, T_V$  (e  $M_2$ ).
3. **Da valle dell'urto a uscita:** nuovamente modello isentropico, ma con nuove condizioni di ristagno  $p_{0,2} \neq p_{0,1}$  e nuova sezione critica virtuale  $A_2^* \neq A^*$ .

## 1.17 Derivazione delle relazioni di salto in funzione del numero di Mach

Si desidera esprimere i rapporti  $T_2/T_1, p_2/p_1, \rho_2/\rho_1$  in funzione del solo numero di Mach a monte  $M_1$ .

### 1.17.1 Rapporto delle temperature

L'equazione dell'energia è identica a quella del modello quasi-unidimensionale:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}. \quad (1.83)$$

<sup>17</sup>Il termine "relazioni di salto" riflette il fatto che si sta "saltando" attraverso l'urto, collegando direttamente le grandezze a monte con quelle a valle senza descrivere il dettaglio della transizione.

### 1.17.2 Rapporto delle pressioni

Non avendo le relazioni isentropiche, si procede per via alternativa. Si sostituisce l'equazione di stato  $\rho = p/(RT)$  nell'equazione della quantità di moto  $p + \rho u^2 = \text{costante}$ . Moltiplicando e dividendo il termine  $\rho u^2$  per  $\gamma$ :

$$p_1 + \frac{\gamma p_1}{R T_1} u_1^2 = p_2 + \frac{\gamma p_2}{R T_2} u_2^2. \quad (1.84)$$

Riconoscendo che  $\gamma u^2/(RT) = \gamma M^2$  (poiché  $c_0^2 = \gamma RT$ ):

$$p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2), \quad (1.85)$$

da cui:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}. \quad (1.86)$$

### 1.17.3 Rapporto delle densità e relazione tra $M_1$ e $M_2$

Dall'equazione di stato si ricava direttamente:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2}. \quad (1.87)$$

Dall'equazione di continuità  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1 \sqrt{\gamma R T_1}}{M_2 \sqrt{\gamma R T_2}} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \quad (1.88)$$

Questa relazione, combinata con le precedenti, fornisce un legame implicito tra  $M_1$  e  $M_2$ . Risolvendo<sup>18</sup>:

$$M_2 = E(M_1), \quad (1.89)$$

il numero di Mach a valle è funzione del solo Mach a monte.

### 1.17.4 Riepilogo delle relazioni di salto

Sostituendo  $M_2 = E(M_1)$  in tutte le relazioni precedenti, l'intero set di rapporti dipende dal solo  $M_1$ :

$$\begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = H(M_1, E(M_1)), \\ \frac{p_2}{p_1} = G(M_1, E(M_1)), \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, E(M_1)). \end{cases} \quad (1.90)$$

Queste relazioni sono tabulate nelle **tabelle degli urti normali**, dove l'input è  $M_1$  e gli output sono  $M_2$ ,  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$ ,  $T_2/T_1$  e il rapporto delle pressioni totali  $p_{0,2}/p_{0,1}$ .

<sup>18</sup>La derivazione esplicita della formula  $M_2(M_1)$  si ottiene combinando le equazioni (1.83), (1.86) e (1.88); il risultato è tabulato nelle tabelle degli urti normali.

### 1.17.5 Rapporto delle pressioni totali

Il rapporto tra le pressioni totali a valle e a monte si esprime come:

$$\frac{p_{0,2}}{p_{0,1}} = \frac{p_{0,2}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{0,1}} = D(M_1), \quad (1.91)$$

dove  $p_{0,2}/p_2$  si ricava dalle tabelle isentropiche con  $M = M_2(M_1)$ ,  $p_2/p_1$  dal modello unidimensionale, e  $p_1/p_{0,1}$  dalle tabelle isentropiche con  $M = M_1$ . Anche questa quantità è tabulata.

Poiché  $p_{0,2} \neq p_{0,1}$ , la sezione critica a valle dell'urto è diversa da quella a monte:

$$A_2^* \neq A_1^* = A^*. \quad (1.92)$$

La sezione  $A_2^*$  è in generale una sezione *virtuale*, che può non corrispondere ad alcuna sezione fisica del condotto.

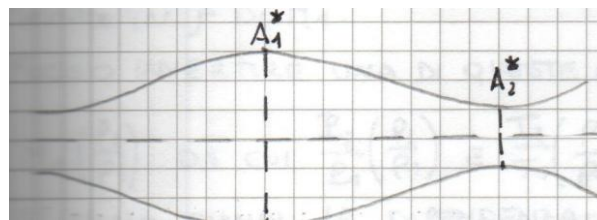


Figura 1.40: Condotto convergente-divergente con sezione critica  $A_1^*$  (reale, nella gola) e sezione critica virtuale  $A_2^*$  (dopo l'urto). Le due non coincidono a causa della dissipazione nell'urto.

### 1.18 Stabilità dell'urto nelle diverse geometrie

L'urto normale può presentarsi in condotti di diversa geometria, ma la sua stabilità dipende dalla variazione di sezione:

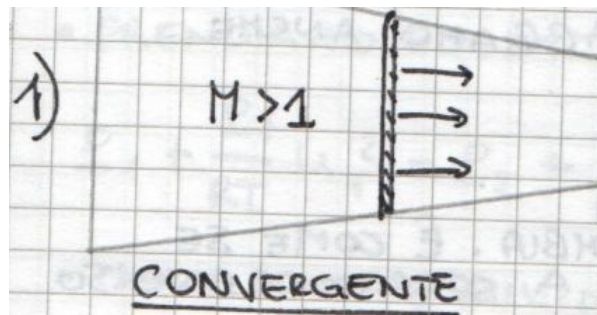


Figura 1.41: Urto in condotto convergente: la posizione dell'urto è instabile.

1. **Condotto convergente:** l'urto è *instabile* — tende a “scappare” lungo il condotto.
2. **Condotto a sezione costante:** equilibrio *indifferente*.
3. **Condotto divergente:** l'urto è *stabile* — una perturbazione della posizione viene riasorbita.

È fondamentale ricordare che l'urto può formarsi *solo* con flusso supersonico ( $M > 1$ ) a monte. Per flussi subsonici l'urto è fisicamente impossibile, come si dimostra analizzando la variazione di entropia.



Figura 1.42: Urto in condotto a sezione costante: equilibrio indifferente (flussi di Rayleigh).

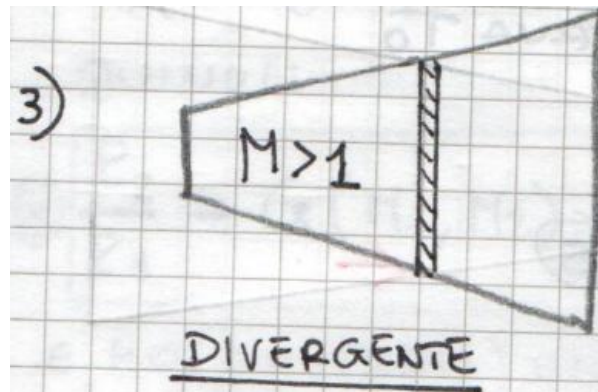


Figura 1.43: Urto in condotto divergente: la posizione dell'urto è stabile.

### 1.19 Vincolo entropico e impossibilità dell'urto subsonico

La variazione di entropia attraverso l'urto è esprimibile come funzione del solo Mach a monte:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \Delta S(M_1). \quad (1.93)$$

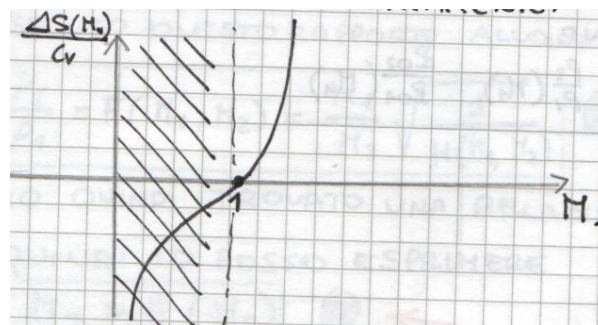


Figura 1.44: Andamento della variazione di entropia adimensionalizzata  $\Delta S/c_v$  in funzione di  $M_1$ . Per  $M_1 > 1$  si ha  $\Delta S > 0$ ; per  $M_1 < 1$  si avrebbe  $\Delta S < 0$ , fisicamente impossibile. La tangente in  $M_1 = 1$  è orizzontale.

Per il principio di Clausius–Duhem, in presenza di fenomeni dissipativi si deve avere  $\Delta S > 0$ . Dalla curva  $\Delta S(M_1)$  si osserva che:

- per  $M_1 > 1$ :  $\Delta S > 0$ , l'urto è fisicamente ammissibile;
- per  $M_1 < 1$ : si otterrebbe  $\Delta S < 0$  (diminuzione di entropia), il che è fisicamente impossibile in un processo dissipativo.

Ciò dimostra rigorosamente che *gli urti normali possono verificarsi solo con flusso supersonico a monte.*

**Interpretazione fisica.** L'andamento di  $\Delta S(M_1)$  presenta tangente orizzontale in  $M_1 = 1$ : un urto che si forma con  $M_1$  di poco superiore a uno produce una variazione di entropia molto piccola, e il flusso è quasi isentropico. Questo ha un'implicazione pratica importante: se l'urto avviene subito dopo la gola, dove  $M$  è appena superiore a uno, le perdite sono minime. Nella progettazione si cerca pertanto di mantenere l'urto il più vicino possibile alla condizione sonica per ridurre le perdite di pressione totale<sup>19</sup>.

## 1.20 Le relazioni di Rankine–Hugoniot

Le **relazioni di Rankine–Hugoniot** si ottengono manipolando i rapporti  $p_2/p_1$ ,  $\rho_2/\rho_1$  e  $T_2/T_1$  per eliminare la dipendenza esplicita dal numero di Mach. Invertendo una delle relazioni si esprime  $M_1$  come funzione del rapporto di densità:

$$M_1 = M_1 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad \text{da cui} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right). \quad (1.94)$$

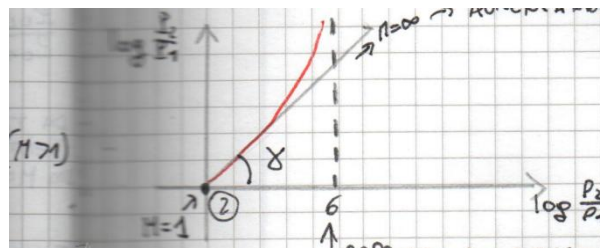


Figura 1.45: Diagramma bilogarithmico  $\log(p_2/p_1)$  vs  $\log(\rho_2/\rho_1)$ . La retta con pendenza  $\gamma$  rappresenta la legge isentropica; la curva di Rankine–Hugoniot se ne discosta per  $M_1$  crescenti. In prossimità di  $M_1 = 1$  le due curve quasi coincidono (urto debolmente dissipativo). Il rapporto di densità ha un limite asintotico pari a  $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 6$  per  $\gamma = 1,4$ .

In scala bilogarithmica, la relazione isentropica  $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^\gamma$  è una retta di pendenza  $\gamma$ . La curva di Rankine–Hugoniot se ne discosta progressivamente al crescere di  $M_1$ : per Mach prossimi a uno la variazione di entropia è piccola e la curva è quasi sovrapposta alla retta isentropica; per Mach elevati la deviazione è marcata. Un risultato notevole è che il rapporto di densità  $\rho_2/\rho_1$  ha un valore limite asintotico pari a  $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ , che per aria ( $\gamma = 1,4$ ) vale  $6^{20}$ .

## 1.21 Esempio applicativo: condotto convergente-divergente con urto

Si consideri un condotto convergente-divergente con geometria assegnata  $A(x) = 0,1 + x^2$  m<sup>2</sup>, dove  $x$  varia tra  $-0,5$  e  $+0,5$  m. Il flusso entra subsonico dalla sezione di sinistra, raggiunge  $M = 1$  nella gola ( $x = 0$ ), e prosegue supersonico nella sezione divergente fino a subire un urto.

<sup>19</sup>Se la curva  $\Delta S(M_1)$  avesse un andamento più ripido in prossimità di  $M_1 = 1$ , sarebbe molto più critico posizionare l'urto, poiché anche piccole deviazioni dal Mach unitario produrrebbero perdite significative.

<sup>20</sup>Il fatto che il rapporto di densità attraverso l'urto non possa superare un valore finito, indipendentemente dall'intensità dell'urto, è un risultato puramente termodinamico privo di un'interpretazione fisica intuitiva immediata.

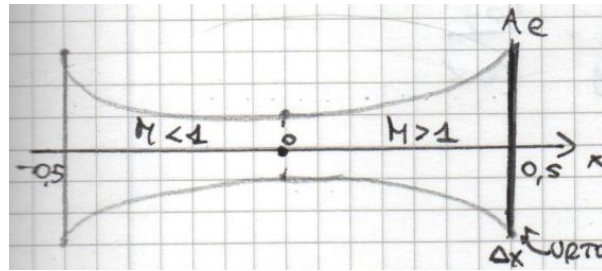


Figura 1.46: Geometria del condotto  $A(x) = 0,1 + x^2$  con gola in  $x = 0$  e urto nella sezione divergente.

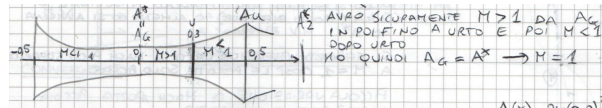


Figura 1.47: Schema dell'esercizio con urto in  $x = 0,3$  m. A monte dell'urto il flusso è supersonico ( $M > 1$ ), a valle subsonico ( $M < 1$ ). La sezione critica  $A^*$  coincide con  $A_g$  e una nuova sezione critica virtuale  $A_2^*$  compare dopo l'urto.

**Esercizio 1: urto nella sezione di uscita ( $x = 0,5$  m).** La sezione di gola è  $A_g = A^* = A(0) = 0,1 \text{ m}^2$ . La sezione di uscita è  $A_e = A(0,5) = 0,35 \text{ m}^2$ . Si entra nelle tabelle isentropiche con  $A_e/A^* = 3,5$  per determinare il Mach supersonico  $M_1 = M_x$  a monte dell'urto. Con  $M_1$  si utilizzano le tabelle degli urti normali per calcolare  $p_2/p_1$ . Il rapporto  $p_y/p_{0,x}$  si ottiene come:

$$\frac{p_y}{p_{0,x}} = \frac{p_y}{p_x} \cdot \frac{p_x}{p_{0,x}}, \quad (1.95)$$

dove  $p_y/p_x$  proviene dalle tabelle degli urti e  $p_x/p_{0,x}$  dalle tabelle isentropiche.

**Esercizio 2: urto in  $x = 0,3$  m.** La sezione dell'urto è  $A(0,3) = 0,1 + 0,09 = 0,19 \text{ m}^2$ , da cui  $A/A^* = 1,9$ . Dalle tabelle isentropiche (ramo supersonico):  $M_1 \approx 2,14$ . Dalle tabelle degli urti con  $M_1$ : si determinano  $M_2$ ,  $p_2/p_1$  e  $p_{0,2}/p_{0,1}$ .

Per il tratto a valle dell'urto si dispone di una nuova sezione critica  $A_2^*$ . Noto  $M_2$  e l'area dell'urto  $A_u$ , si calcola  $A_u/A_2^*$  dalle tabelle isentropiche (ramo subsonico con  $M = M_2$ ). La pressione in uscita si determina infine come:

$$\frac{p_u}{p_{0,1}} = \frac{p_u}{p_{0,2}} \cdot \frac{p_{0,2}}{p_{0,1}}, \quad (1.96)$$

dove  $p_u/p_{0,2}$  si ricava entrando nelle tabelle isentropiche con  $A_u/A_2^*$  (ramo subsonico).

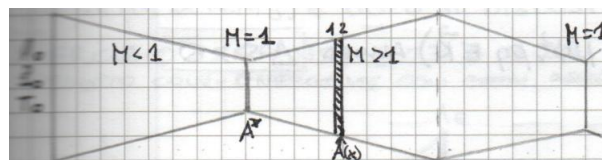


Figura 1.48: Riepilogo della procedura di calcolo con le due tabelle: tabella isentropica (modello quasi-1D) e tabella degli urti normali (modello 1D).

## 1.22 Equazioni fondamentali della fluidodinamica: riepilogo

Per completezza e riferimento, si riportano le equazioni fondamentali della fluidodinamica nella loro forma generale.

### 1.22.1 Equazione di continuità (conservazione della massa)

La conservazione della massa di un sistema materiale si esprime come:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = 0. \quad (1.97)$$

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds per passare dalla descrizione materiale a quella del volume di controllo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (1.98)$$

Trasformando l'integrale di superficie in integrale di volume mediante il teorema di Gauss–Green:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0. \quad (1.99)$$

Dall'arbitrarietà del volume di controllo si ottiene la **forma differenziale dell'equazione di continuità**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.100)$$

oppure, in notazione indiciale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (1.101)$$

Espandendo la divergenza e riconoscendo la derivata materiale  $D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla\rho$ , si perviene alla **seconda forma**:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.102)$$

Per un fluido incomprimibile ( $D\rho/Dt = 0$ ) si riduce a  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , ovvero in notazione indiciale  $\partial u_i / \partial x_i = 0$ .

### 1.22.2 Equazione della quantità di moto

La seconda legge di Newton per un sistema continuo si scrive:

$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \sum \vec{F}_M + \sum \vec{F}_S, \quad (1.103)$$

dove  $\vec{Q} = \iiint_V \rho \vec{u} dV$  è la quantità di moto,  $\vec{F}_M$  sono le forze di massa e  $\vec{F}_S$  le forze di superficie.

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds al primo membro e il teorema di Gauss–Green per convertire gli integrali di superficie in integrali di volume:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{u} dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) dV = \iiint_V \rho \vec{f} dV + \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV, \quad (1.104)$$

dove  $\vec{u} \otimes \vec{u}$  è il prodotto diadico (che produce un tensore del secondo ordine) e  $\boldsymbol{\tau}$  è il tensore degli sforzi<sup>21</sup>.

Dall'arbitrarietà del volume:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.105)$$

o in notazione indiciale:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.106)$$

<sup>21</sup>Il vettore sforzo sulla superficie è  $\vec{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{n}$ , dove  $\vec{n}$  è la normale uscente.

Scomponendo le derivate al primo membro e utilizzando l'equazione di continuità<sup>22</sup>:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (1.107)$$

### 1.22.3 Relazione costitutiva e equazioni di Navier–Stokes

Per un fluido newtoniano il tensore degli sforzi si scrive:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.108)$$

dove  $p$  è la pressione termodinamica,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  è il tensore velocità di deformazione,  $\mu$  è la viscosità dinamica e  $\lambda$  è il secondo coefficiente di viscosità.

Casi particolari:

1. **Fluido in quiete** ( $\varepsilon_{ij} = 0$ ):  $\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$ , e  $p = -\text{tr}(\tau_{ij})/3$ .
2. **Fluido incomprimibile** ( $\varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$ ):  $\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ .
3. **Fluido comprimibile**: tutti e tre i termini sono presenti. Calcolando la traccia e imponendo la definizione di pressione meccanica  $p_{\text{mec}} = -\text{tr}(\tau_{ij})/3$ :

$$p_{\text{mec}} = p - \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{kk}. \quad (1.109)$$

La quantità  $\lambda + \frac{2}{3}\mu$  è detta **viscosità volumetrica** (*bulk viscosity*).

Adottando l'**ipotesi di Stokes**  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  (valida per molti fluidi), la viscosità volumetrica si annulla e  $p_{\text{mec}} = p$ . Sostituendo nella (1.107):

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{kk}), \quad (1.110)$$

o in forma vettoriale, con  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}. \quad (1.111)$$

Questa è l'**equazione di Navier–Stokes** nella sua forma comprimibile. Per fluidi incomprimibili il termine  $\frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$  si annulla.

### 1.22.4 Vorticità

La **vorticità** è definita come il rotore del campo di velocità:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}. \quad (1.112)$$

Una **linea di vorticità** è una curva tangente in ogni punto al vettore vorticità locale, analogamente a come una linea di corrente è tangente al vettore velocità.

<sup>22</sup>Si scompone:  $\partial(\rho\vec{u})/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \partial\vec{u}/\partial t + \vec{u} \partial\rho/\partial t + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \nabla \cdot (\rho\vec{u})$  si annullano per l'equazione di continuità.

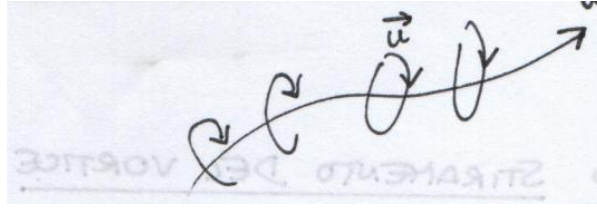


Figura 1.49: Definizione di vorticità:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ . Il vettore vorticità è perpendicolare al piano in cui si manifesta la rotazione locale del fluido.

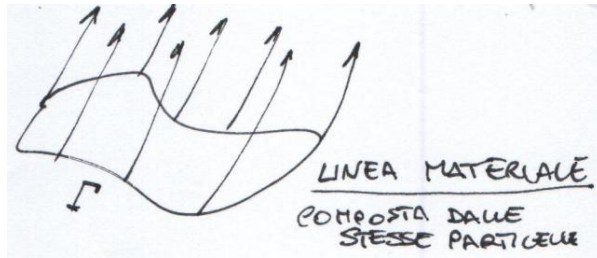


Figura 1.50: Linee di vorticità: curve tangenti in ogni punto al vettore  $\vec{\omega}$ . Una linea materiale composta dalle stesse particelle evolve nel tempo.

## 1.23 Vorticità e teoremi fondamentali

La vorticità è una grandezza cinematica centrale nella fluidodinamica: essa quantifica la rotazione locale degli elementi di fluido e governa fenomeni quali la formazione di scie, la separazione dello strato limite e la generazione di portanza. Per **vorticità** si intende il rotore del campo di velocità:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}. \quad (1.113)$$

Una **linea di vorticità** è una curva tangente in ogni punto al vettore  $\vec{\omega}$ , analogamente a come una linea di corrente è tangente a  $\vec{u}$ . Un **vortice** (o *tubo vorticoso*) è l'insieme delle linee di vorticità che attraversano una curva chiusa. Le linee di vorticità sono linee materiali, composte sempre dalle stesse particelle fluide.

L'**intensità del vortice** è misurata dalla circolazione:

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l}, \quad (1.114)$$

che, per il teorema di Stokes, è equivalente a:

$$\Gamma = \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \hat{n} dS = \iint_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dS, \quad (1.115)$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie che abbia come bordo la curva di integrazione e  $\hat{n}$  è la normale alla superficie.

### 1.23.1 Il teorema di Kelvin

Kelvin formulò le prime considerazioni matematiche rigorose sulla vorticità. Sotto le seguenti ipotesi:

- fluido inviscido ( $Re \rightarrow \infty$ , ovvero  $\mu$  trascurabile);

- forze di massa conservative:  $\vec{f} = -\nabla G$ ;
- flusso barotropico, ovvero  $\rho = \rho(p)^{23}$ ;

la circolazione si conserva nel tempo lungo qualsiasi curva materiale:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad \implies \quad \Gamma = \text{costante.} \quad (1.116)$$

### 1.23.2 I teoremi di Helmholtz

Basandosi sulle ipotesi di Kelvin, Helmholtz introdusse tre teoremi fondamentali:

**Primo teorema.** La circolazione  $\Gamma$  di un tubo vorticoso non può variare lungo il tubo. Un vortice può chiudersi su se stesso oppure iniziare e finire agli estremi del campo (ad esempio su una parete o all'infinito), ma non può terminare nel fluido.

**Secondo teorema.** Una particella fluida che non appartiene al tubo vorticoso non può entrarvi: se ciò accadesse, la linea materiale si deformerebbe, modificando  $\Gamma$  e quindi  $\vec{\omega}$ , in contraddizione con la conservazione della circolazione.

**Terzo teorema.** La circolazione  $\Gamma$  è costante nel tempo ( $d\Gamma/dt = 0$ ), che è la formulazione fisica diretta del risultato di Kelvin.

### 1.23.3 Equazione di evoluzione della vorticità

Per ottenere l'equazione differenziale della vorticità si applica l'operatore rotore  $\nabla \times$  all'equazione di Navier–Stokes per fluidi incomprimibili<sup>24</sup>:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla G - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}. \quad (1.117)$$

Si sfruttano le identità vettoriali:  $\nabla \times (\nabla G) = \vec{0}$ ,  $\nabla \times (\nabla p) = \vec{0}$  (in quanto rotore di un gradiente) e  $\nabla \times (\nabla^2 \vec{u}) = \nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = \nabla^2 \vec{\omega}$ . Inoltre,  $\nabla \times (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega}$ <sup>25</sup>.

Applicando il rotore alla (1.117) e dividendo per  $\rho$  (costante per incomprimibilità):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (1.118)$$

ovvero, riconoscendo la derivata materiale:

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}}, \quad (1.119)$$

dove  $\nu = \mu/\rho$  è la viscosità cinematica. Questa è l'**equazione di evoluzione della vorticità**.

<sup>23</sup>Kelvin considerò originariamente il caso barotropico, di cui il fluido incomprimibile è un caso particolare.

<sup>24</sup>Per un fluido incomprimibile il termine  $\frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$  si annulla poiché  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ .

<sup>25</sup>Questo risultato si ottiene dall'identità  $\nabla \times (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} (\nabla \cdot \vec{\omega})$ , dove gli ultimi due termini si annullano per incomprimibilità ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ) e per la proprietà  $\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$ .

**Interpretazione fisica.** L'equazione (1.119) mostra che la vorticità di una particella fluida varia per due meccanismi:

- il termine  $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$  rappresenta la **diffusione viscosa** della vorticità: la viscosità tende a smussare le variazioni spaziali di  $\vec{\omega}$ , diffondendola nelle regioni circostanti;
- il termine  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$  è detto **vortex stretching** (stiramento del vortice): esso descrive come il gradiente di velocità possa amplificare o riorientare la vorticità stirando le linee vorticosi.



Figura 1.51: Illustrazione del *vortex stretching*: una linea di vorticità viene stirata e riorientata dal gradiente di velocità, con conseguente intensificazione della componente di vorticità nella direzione dello stiramento.

Il *vortex stretching* è un fenomeno intrinsecamente tridimensionale<sup>26</sup>: è responsabile della cascata energetica nella turbolenza e dell'intensificazione dei vortici in fenomeni quali i tornado.

## 1.24 Equazione di bilancio dell'energia

Il bilancio dell'energia completa il set di equazioni fondamentali della fluidodinamica. Si parte dal primo principio della termodinamica applicato a un volume materiale.

### 1.24.1 Formulazione integrale

L'energia totale del sistema è:

$$E = \iiint_V \rho e dV, \quad (1.120)$$

dove  $e$  è l'**energia termo-cinetica specifica** (energia per unità di massa):

$$e = \frac{1}{2} \sum_i u_i^2 + U = \frac{1}{2} |\vec{u}|^2 + U, \quad (1.121)$$

con  $U$  l'energia interna specifica e  $\frac{1}{2} |\vec{u}|^2$  l'energia cinetica specifica.

Il primo principio in forma di potenze<sup>27</sup> si scrive:

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{L} + \dot{Q}, \quad (1.122)$$

dove  $\dot{L}$  è la potenza delle forze e  $\dot{Q}$  è la potenza termica.

<sup>26</sup>In flussi strettamente bidimensionali il termine  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$  si annulla identicamente poiché  $\vec{\omega}$  è perpendicolare al piano del moto e  $\nabla \vec{u}$  giace nel piano.

<sup>27</sup>Essendo  $DE/Dt$  una derivata temporale di un'energia, i termini al secondo membro sono propriamente potenze (lavoro per unità di tempo e calore per unità di tempo).

**Primo membro.** Applicando il teorema del trasporto di Reynolds:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho e dV + \iint_S \rho e (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS. \quad (1.123)$$

**Potenza delle forze.** La potenza si decompone in contributo delle forze di massa e di superficie:

$$\dot{L} = \dot{L}_M + \dot{L}_S = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + \iint_S (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} dS. \quad (1.124)$$

**Potenza termica.** Essa comprende lo scambio termico attraverso le superfici e la produzione volumetrica:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_S + \dot{Q}_P = - \iint_S \vec{R} \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \rho q dV, \quad (1.125)$$

dove  $\vec{R}$  è il vettore flusso termico e  $q$  è la produzione volumetrica di calore per unità di massa. Per la legge di Fourier:

$$\vec{R} = -k \nabla T, \quad (1.126)$$

con  $k$  la conducibilità termica. Il segno negativo riflette il fatto che il calore fluisce spontaneamente dalle regioni a temperatura maggiore verso quelle a temperatura minore, in direzione opposta al gradiente di  $T$ .

Convertendo tutti gli integrali di superficie in integrali di volume mediante il teorema di Gauss–Green e imponendo l'arbitrarietà del volume di controllo, si ottiene la **forma differenziale** del bilancio dell'energia:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{u}) = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{u}) + \rho q + k \nabla^2 T. \quad (1.127)$$

### 1.24.2 Semplificazione mediante l'equazione di continuità

Espandendo il primo membro della (1.127) e utilizzando l'equazione di continuità per eliminare i termini  $e[\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{u})] = 0$ :

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p(\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{u} + \rho q + k \nabla^2 T, \quad (1.128)$$

dove si è decomposto il tensore degli sforzi  $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$  e la divergenza del termine di lavoro superficiale è stata sviluppata nei contributi di pressione e sforzi viscosi<sup>28</sup>.

### 1.24.3 Equazione dell'energia interna

Per isolare l'equazione dell'energia interna  $U$  si moltiplica scalarmene l'equazione di Navier–Stokes per  $\vec{u}$ :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (1.129)$$

Sottraendo la (1.129) dalla (1.128), e ricordando che  $DU/Dt = De/Dt - D(|\vec{u}|^2/2)/Dt$ :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p(\nabla \cdot \vec{u}) + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{u} + \rho q + k \nabla^2 T. \quad (1.130)$$

<sup>28</sup>Il simbolo  $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{u}$  indica la doppia contrazione (prodotto scalare doppio) tra il tensore degli sforzi viscosi deviatorici e il gradiente di velocità.

**Interpretazione fisica.** L'equazione (1.130) mostra che l'energia interna di una particella fluida varia per quattro meccanismi: il lavoro di compressione/espansione  $-p(\nabla \cdot \vec{u})$ , la dissipazione viscosa  $\sigma : \nabla \vec{u}$  (sempre positiva, converte energia meccanica in calore), la produzione volumetrica di calore  $\rho q$  e la conduzione termica  $k \nabla^2 T$ .

#### 1.24.4 Caso particolare: equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli si ottiene dall'equazione dell'energia sotto le seguenti ipotesi:

- flusso stazionario:  $\partial/\partial t = 0$ ;
- fluido incomprimibile:  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ;
- fluido inviscido:  $\mu$  trascurabile, dunque  $\sigma = \mathbf{0}$ ;
- assenza di scambio e produzione di calore:  $q = 0$ ,  $\vec{R} = \vec{0}$ ;
- forze di massa conservative:  $\vec{f} = -\nabla G$ .

Sotto tali ipotesi l'equazione dell'energia si riduce a:

$$\vec{u} \cdot \nabla e + \vec{u} \cdot \nabla G + \vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (1.131)$$

ovvero, raggruppando:

$$\vec{u} \cdot \nabla \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} + U + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad \implies \quad \vec{u} \cdot \nabla H = 0, \quad (1.132)$$

dove  $H = \frac{|\vec{u}|^2}{2} + U + G + \frac{p}{\rho}$  è costante lungo le linee di corrente<sup>29</sup>.

### 1.25 Equazione dell'energia in forma entropica

Sotto le ipotesi di assenza di produzione volumetrica di calore ( $q = 0$ ), di conduzione termica trascurabile ( $k \nabla^2 T \approx 0$ ) e di fluido inviscido ( $\mu \rightarrow 0$ , dunque la funzione di dissipazione si annulla), l'equazione dell'energia si riduce a:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 0 \quad \implies \quad \frac{DS}{Dt} = 0. \quad (1.133)$$

Espandendo la derivata materiale:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (1.134)$$

Per un flusso stazionario ( $\partial S/\partial t = 0$ ):

$$\vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (1.135)$$

Questa relazione afferma che l'entropia è costante lungo ciascuna linea di corrente: si parla di **flusso isentropico**. Se inoltre l'entropia è la stessa su *tutte* le linee di corrente, il flusso è detto **omoentropico**.

<sup>29</sup>Per un fluido incomprimibile, trascurando le variazioni di energia interna e con  $G = gz$ , si ritrova la forma classica del teorema di Bernoulli:  $\frac{|\vec{u}|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{costante}$ .

**Teorema di Crocco.** Crocco dimostrò che, sotto opportune ipotesi, la presenza di un gradiente di entropia tra linee di corrente diverse implica l'esistenza di vorticità:

$$\nabla S \neq \vec{0} \quad \implies \quad \vec{\omega} \neq \vec{0}. \quad (1.136)$$

In altre parole, un flusso omoentropico e irrotazionale sono condizioni strettamente legate.

**Disuguaglianza di Clausius–Duhem.** Integrando l'equazione dell'energia in forma entropica su un volume materiale:

$$\iiint_V \rho T \frac{DS}{Dt} dV \geq 0. \quad (1.137)$$

L'entropia può rimanere costante (processo reversibile,  $= 0$ ) o aumentare (processo irreversibile,  $> 0$ ), ma non può mai diminuire. Questa è la formulazione del secondo principio della termodinamica per un sistema continuo.

## 1.26 Adimensionalizzazione delle equazioni

Le equazioni della fluidodinamica nella loro forma dimensionale sono spesso difficili da risolvere e da analizzare. L'adimensionalizzazione consente di identificare i parametri fisici dominanti e di semplificare le equazioni eliminando i termini trascurabili.

### 1.26.1 Procedura generale

Il set di equazioni dimensionali da adimensionalizzare è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.138)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}), \quad (1.139)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \Phi + \rho q + k \nabla^2 T, \quad (1.140)$$

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (1.141)$$

dove  $\Phi$  è la funzione di dissipazione viscosa.

Per **adimensionalizzare** una grandezza  $A$  si definisce il rapporto:

$$A^* = \frac{A}{A_0}, \quad (1.142)$$

dove  $A_0$  è una grandezza di riferimento dimensionale, scelta opportunamente. Le variabili adimensionali sono:

$$x_i = x_i^* L_0, \quad u_i = u_i^* u_0, \quad t = t^* t_0, \quad T = T^* \Delta T, \quad \rho = \rho^* \rho_0, \quad p = p^* p_0, \quad (1.143)$$

e l'operatore nabla si trasforma come  $\nabla = \frac{1}{L_0} \nabla^*$ .

I tre passaggi fondamentali sono: (1) sostituire le variabili dimensionali con i prodotti grandezza adimensionale  $\times$  scala di riferimento; (2) dividere l'equazione per opportune costanti così da rendere tutti i termini di ordine unitario; (3) confrontare i gruppi adimensionali risultanti per comprendere la rilevanza relativa dei termini.

### 1.26.2 Equazione di conservazione della massa adimensionale e numero di Strouhal

Sostituendo le variabili adimensionali nella (1.138):

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 u_0}{L_0} \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (1.144)$$

Dividendo per  $\rho_0 u_0 / L_0$ :

$$\frac{L_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{u}^*) = 0. \quad (1.145)$$

Il gruppo adimensionale che moltiplica la derivata temporale è l'inverso del **numero di Strouhal**:

$$St = \frac{u_0 t_0}{L_0}, \quad (1.146)$$

dove  $t_0$  è il tempo caratteristico del fenomeno fisico (ad esempio il periodo di oscillazione di un profilo) e  $L_0/u_0$  è il tempo impiegato dalle particelle per percorrere la lunghezza caratteristica del problema.

Omettendo gli asterischi (tutte le variabili sono ormai adimensionali):

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.147)$$

**Interpretazione fisica.** Se  $St \rightarrow \infty$ , il termine  $\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t}$  diventa trascurabile e il flusso può essere considerato **stazionario**: le variazioni temporali del fenomeno avvengono su scale molto più lunghe del tempo di transito delle particelle. Al contrario, un basso numero di Strouhal indica che le variazioni temporali sono rapide e non possono essere ignorate.

## 1.27 Criteri di incomprimibilità

La comprimibilità di un fluido è governata da due gruppi adimensionali che emergono dalla seconda forma dell'equazione di continuità:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.148)$$

Ricordando che, per un fluido generico, la densità dipende da pressione e temperatura,  $\rho = \rho(p, T)$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dt}, \quad (1.149)$$

e introducendo il coefficiente di comprimibilità isoterma  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$  e il coefficiente di dilatazione termica  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha \rho \frac{dp}{dt} - \beta \rho \frac{dT}{dt}. \quad (1.150)$$

Sostituendo nella (1.148) e adimensionalizzando emergono due gruppi:

- $\alpha p_0$ : se  $\alpha p_0 \ll 1$ , la densità è insensibile alle variazioni di pressione e dipende solo dalla temperatura: si parla di **flusso termotropico**,  $\rho = \rho(T)$ .

- $\beta \Delta T$ : se  $\beta \Delta T \ll 1$ , la densità è insensibile alle variazioni di temperatura e dipende solo dalla pressione: si parla di **flusso barotropico**,  $\rho = \rho(p)$ .
- Se *entrambe* le condizioni sono soddisfatte ( $\alpha p_0 \ll 1$  e  $\beta \Delta T \ll 1$ ), la densità non dipende né da  $p$  né da  $T$ : il flusso è **incomprimibile**.

### 1.27.1 Il numero di Mach come criterio di comprimibilità

Il **numero di Mach** è definito come:

$$M = \frac{u_0}{c_0}, \quad (1.151)$$

dove  $u_0$  è la velocità caratteristica del flusso e  $c_0$  è la velocità del suono, che per un gas perfetto vale:

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma R T}. \quad (1.152)$$

La velocità del suono rappresenta la velocità di propagazione delle perturbazioni di pressione nel mezzo<sup>30</sup>.

### 1.27.2 Il numero di Ruark

Il **numero di Ruark** è definito come:

$$Ru = \frac{\rho_0 u_0^2}{p_0}, \quad (1.153)$$

ovvero il rapporto tra la pressione dinamica e la pressione di riferimento. Nella maggior parte delle applicazioni fluidodinamiche si pone  $Ru = 1$  (pressione di riferimento uguale alla pressione dinamica)<sup>31</sup>.

Il legame tra  $\alpha p_0$ , il numero di Mach e il numero di Ruark si ottiene riscrivendo:

$$\alpha p_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2} = \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \cdot \frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{M^2}{Ru}. \quad (1.154)$$

Ponendo  $Ru = 1$ :

$$\alpha p_0 = M^2. \quad (1.155)$$

Pertanto, la condizione di incomprimibilità  $\alpha p_0 \ll 1$  (unitamente a  $\beta \Delta T \ll 1$ ) diventa:

$$M^2 \ll 1 \quad \text{e} \quad \beta \Delta T \ll 1 \quad \implies \quad \text{flusso incomprimibile}. \quad (1.156)$$

**Interpretazione fisica.** Il numero di Mach misura il rapporto tra la velocità del flusso e la velocità con cui le perturbazioni di pressione si propagano. Per  $M \ll 1$  le perturbazioni si propagano molto più velocemente del flusso: il fluido “sente” immediatamente le variazioni di pressione e si adatta senza variazioni apprezzabili di densità. La soglia convenzionale è  $M < 0,3$ , al di sotto della quale gli effetti di comprimibilità sono generalmente trascurabili<sup>32</sup>.

<sup>30</sup>Per l'aria in condizioni standard ( $T \approx 288 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $R = 287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ) si ha  $c_0 \approx 340 \text{ m/s}$ . Per l'acqua  $c_0 \approx 1500 \text{ m/s}$ .

<sup>31</sup>Il numero di Ruark assume valori diversi da uno in fenomeni di cavitazione, dove la pressione di riferimento è la tensione di vapore del liquido.

<sup>32</sup>Esistono eccezioni: nei veicoli autonomi subacquei (USV) o aerei (UAV), si possono avere numeri di Mach significativi con numeri di Reynolds piccoli, rendendo necessaria un'analisi più attenta.

## 1.28 Adimensionalizzazione dell'equazione della quantità di moto

Si procede ora all'adimensionalizzazione dell'equazione di Navier–Stokes, dalla quale emergono i numeri adimensionali fondamentali che governano il comportamento dei flussi. Si parte dalla forma dimensionale con ipotesi di Stokes ( $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ ) e con la forza di massa identificata con la gravità,  $\vec{f} = \vec{g}$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}). \quad (1.157)$$

Introducendo le variabili adimensionali ( $\vec{u} = u_0 \vec{u}^*$ ,  $t = t_0 t^*$ ,  $\nabla = \frac{1}{L_0} \nabla^*$ ,  $\rho = \rho_0 \rho^*$ ,  $p = p_0 p^*$ ,  $\vec{g} = g \vec{g}^*$  con  $|\vec{g}^*| = 1$ ) e dividendo ogni termine per il fattore  $\rho_0 u_0^2 / L_0$ <sup>33</sup>:

$$\frac{1}{St} \rho^* \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{u}^* \cdot \nabla^* \vec{u}^* = \frac{1}{Fr} \rho^* \vec{g}^* - \frac{1}{Ru} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \vec{u}^* + \frac{1}{3Re} \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{u}^*). \quad (1.158)$$

Omettendo gli asterischi, l'**equazione di Navier–Stokes adimensionale** si scrive:

$$\boxed{\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g} - \frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla (\nabla \cdot \vec{u})}. \quad (1.159)$$

**Interpretazione fisica dei gruppi adimensionali.** Ogni coefficiente che moltiplica un termine dell'equazione quantifica il peso relativo del meccanismo fisico corrispondente rispetto alle forze inerziali:

- $1/St$ : peso della non-stazionarietà. Per  $St \rightarrow \infty$  il flusso è stazionario.
- $1/Fr$ : peso delle forze di massa (gravità). Per  $Fr \rightarrow \infty$  le forze di massa sono trascurabili.
- $1/Ru$ : peso del gradiente di pressione.
- $1/Re$ : peso degli effetti viscosi. Per  $Re \rightarrow \infty$  si ottengono i **flussi euleriani** (viscosità trascurabile); per  $Re \rightarrow 0$  i **flussi stokesiani** (viscosità dominante).

### 1.28.1 Il numero di Froude

Il **numero di Froude** è definito come:

$$Fr = \frac{u_0^2}{g L_0}. \quad (1.160)$$

Esso esprime il rapporto tra le forze inerziali e le forze gravitazionali ed è particolarmente rilevante nelle applicazioni idrodinamiche (onde di superficie, flussi a pelo libero). Negli esperimenti su modelli in scala, il numero di Froude del modello deve essere uguale a quello del prototipo ( $Fr_R = Fr_E$ ) per garantire la similitudine dinamica. Per  $Fr \rightarrow \infty$  le forze di massa diventano trascurabili.

<sup>33</sup>Si sceglie questo fattore perché corrisponde alle forze inerziali per unità di volume, il termine dominante in molte applicazioni ad alto numero di Reynolds.

### 1.28.2 Il numero di Reynolds

Il **numero di Reynolds** è definito come:

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu} = \frac{\text{forze di inerzia}}{\text{forze viscosse}}. \quad (1.161)$$

Esso governa la transizione tra i diversi regimi di flusso e determina l'importanza relativa degli effetti viscosi nell'intero campo.

## 1.29 Adimensionalizzazione dell'equazione dell'energia

Si parte dall'equazione del bilancio dell'energia in termini entalpici, con  $c_p$  costante e  $\rho q = 0$ :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \mu \Phi + k \nabla^2 T, \quad (1.162)$$

dove  $\Phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$  è la funzione di dissipazione viscosa.

Inserendo le variabili adimensionali e dividendo per  $\rho_0 c_p u_0 \Delta T / L_0$ , si ottiene l'**equazione dell'energia adimensionale**:

$$\boxed{\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{Ec}{Re} \Phi + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T.} \quad (1.163)$$

I nuovi gruppi adimensionali che compaiono sono il numero di Eckert e il numero di Prandtl.

### 1.29.1 Il numero di Eckert

Il **numero di Eckert** è definito come:

$$Ec = \frac{u_0^2}{c_p \Delta T}. \quad (1.164)$$

Per un gas perfetto, ricordando che  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  e  $c_0^2 = \gamma R T$ :

$$Ec = \frac{u_0^2}{c_p T_0} = M^2 (\gamma - 1). \quad (1.165)$$

Il numero di Eckert è dunque direttamente legato al quadrato del numero di Mach e quantifica l'importanza del riscaldamento cinetico rispetto alle differenze di temperatura nel flusso.

**Interpretazione fisica.** Per  $Ec \ll 1$  (ovvero  $M \ll 1$ ) i termini di compressione e dissipazione viscosa nell'equazione dell'energia sono trascurabili: il campo termico è governato dalla sola conduzione e convezione. Per  $Ec$  dell'ordine dell'unità o superiore (flussi ad alta velocità) il riscaldamento aerodinamico diventa significativo.

### 1.29.2 Il numero di Prandtl

Il **numero di Prandtl** è definito come:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha_T}, \quad (1.166)$$

dove  $\nu = \mu/\rho$  è la viscosità cinematica e  $\alpha_T = k/(\rho c_p)$  è la diffusività termica. Il numero di Prandtl esprime il rapporto tra la capacità del fluido di trasportare quantità di moto per diffusione (viscosità) e la capacità di trasportare calore per conduzione.

A differenza di  $Re$ ,  $Fr$  e  $St$ , il numero di Prandtl dipende esclusivamente dalle *proprietà del fluido* e non dalle condizioni del flusso. Per questo motivo non può essere portato a valori asintotici variando le condizioni esterne<sup>34</sup>.

## 1.30 Equazione di stato adimensionale

L'equazione di stato per un gas perfetto  $p/\rho = RT$  si adimensionalizza sostituendo le variabili e raccogliendo le costanti. Ricordando le definizioni di  $Ru = \rho_0 u_0^2/p_0$  e  $M = u_0/c_0 = u_0/\sqrt{\gamma RT_0}$ :

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}. \quad (1.167)$$

## 1.31 Set completo delle equazioni adimensionali

Il sistema completo delle equazioni della fluidodinamica in forma adimensionale è:

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.168)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{1}{Fr} \rho \frac{\vec{g}}{g} - \frac{1}{Ru} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}), \quad (1.169)$$

$$\frac{1}{St} \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{Ec}{Ru St} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru} \vec{u} \cdot \nabla p + \frac{Ec}{Re} \Phi + \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T, \quad (1.170)$$

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{Ru}{\gamma M^2}. \quad (1.171)$$

Il sistema ha sei incognite ( $u_1, u_2, u_3, p, \rho, T$ ) e i gruppi adimensionali che lo governano sono:  $St$  (non-stazionarietà),  $Re$  (viscosità),  $Fr$  (gravità),  $Ru$  (pressione),  $Ec$  (riscaldamento cinetico),  $Pr$  (diffusione termica vs. viscosa) e  $M$  (compressibilità).

**Interpretazione fisica.** L'utilità fondamentale della forma adimensionale risiede nella possibilità di identificare immediatamente, attraverso il valore numerico dei gruppi adimensionali, quali termini sono dominanti e quali trascurabili in un dato problema. Ciò consente di ottenere modelli semplificati che, pur essendo approssimati, catturano la fisica essenziale del fenomeno.

## 1.32 Modelli semplificati: dalle equazioni di Eulero al potenziale

### 1.32.1 Equazioni di Eulero

Adottando le seguenti ipotesi:

- $Re \rightarrow \infty$ : viscosità trascurabile;

<sup>34</sup>Per l'aria in condizioni standard  $Pr \approx 0,71$ ; per l'acqua  $Pr \approx 7$ ; per oli viscosi  $Pr$  può raggiungere valori dell'ordine di  $10^3$ ; per i metalli liquidi  $Pr \ll 1$ .

- $Re = 1$ : pressione di riferimento uguale alla pressione dinamica;
- $Fr \rightarrow \infty$ : forze di massa trascurabili;
- $M < 0,3$  e  $\beta \Delta T \ll 1$ : flusso incomprimibile ( $Ec \ll 1$ ,  $\rho$  costante);
- $\rho$  costante nel tempo:  $\partial\rho/\partial t = 0$ ;

il set si riduce alle **equazioni di Eulero**:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p. \end{cases} \quad (1.172)$$

Le incognite si riducono a quattro:  $u_1, u_2, u_3$  e  $p$ . L'equazione dell'energia e l'equazione di stato si disaccoppiano dal problema meccanico<sup>35</sup>.

La principale difficoltà nella risoluzione delle equazioni di Eulero risiede nel termine convettivo non lineare  $\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ .

### 1.32.2 Flusso potenziale

Per eliminare la non-linearità si introduce un'ipotesi aggiuntiva: l'**irrotazionalità** del campo di velocità,  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \vec{0}$ . Questa condizione è giustificata dal teorema di Kelvin quando:

- $Re \rightarrow \infty$  (fluido inviscido);
- le forze di massa sono conservative:  $\vec{f} = -\nabla G$ ;
- il flusso è barotropico o incomprimibile:  $M < 0,3$  e  $\beta \Delta T \ll 1$ .

Se queste tre condizioni sono soddisfatte e se la vorticità è inizialmente nulla,  $\vec{\omega}(x_i, 0) = \vec{0}$ , allora  $\vec{\omega}(x_i, t) = \vec{0}$  per ogni  $t$  (conservazione della circolazione).

In tal caso esiste un **potenziale di velocità**  $\varphi$  tale che  $\vec{u} = \nabla\varphi$ . Poiché il rotore di un gradiente è identicamente nullo ( $\nabla \times \nabla\varphi = \vec{0}$ ), l'irrotazionalità è automaticamente soddisfatta. Sostituendo nella condizione di incomprimibilità:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = 0. \quad (1.173)$$

Il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0, \\ \frac{1}{St} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p. \end{cases} \quad (1.174)$$

La procedura risolutiva è sequenziale:

1. si risolve l'equazione di Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$  con le condizioni al contorno appropriate;
2. dal potenziale si ricava il campo di velocità:  $\vec{u} = \nabla\varphi$ ;
3. dalla velocità si determina la pressione mediante il **teorema di Bernoulli**.

<sup>35</sup>In un flusso incomprimibile la densità è nota a priori e la temperatura non influenza la dinamica: il campo di velocità e pressione può essere determinato indipendentemente dal campo termico.

### 1.32.3 Teorema di Bernoulli

Per un flusso stazionario, incomprimibile, inviscido e irrotazionale, lungo una linea di corrente:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 = \text{costante}, \quad \text{oppure} \quad p + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 = \text{costante}. \quad (1.175)$$

## 1.33 Riepilogo delle equazioni fondamentali

Per riferimento, si riportano le equazioni fondamentali della fluidodinamica nelle loro diverse forme.

### 1.33.1 Equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0 \quad (\text{forma integrale}), \quad (1.176)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{forma differenziale I}), \quad (1.177)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{forma differenziale II}). \quad (1.178)$$

I coefficienti termodinamici che governano la comprimibilità sono il modulo di comprimibilità isoterma  $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$  [Pa<sup>-1</sup>] e il coefficiente di espansione termica  $\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  [K<sup>-1</sup>].

### 1.33.2 Equazione della quantità di moto (Navier–Stokes)

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{forma differenziale I}), \quad (1.179)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{forma differenziale II}), \quad (1.180)$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) \quad (\text{Navier–Stokes}). \quad (1.181)$$

### 1.33.3 Vorticità ed equazione di trasporto

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{u}) \cdot \hat{n} dS \quad (\text{circolazione}), \quad (1.182)$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} \quad (\text{equazione della vorticità}). \quad (1.183)$$

Il termine  $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u}$  è il *vortex stretching*.

### 1.33.4 Equazione di bilancio dell'energia

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - p \nabla \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{u} + \rho q + k \nabla^2 T \quad (\text{in termini di } e), \quad (1.184)$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \rho \Phi + \rho q + k \nabla^2 T \quad (\text{energia interna } U), \quad (1.185)$$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{u} + \rho \Phi + \rho q + k \nabla^2 T \quad (\text{in termini di } T, c_v), \quad (1.186)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \Phi + \rho q + k \nabla^2 T \quad (\text{in termini entalpici}), \quad (1.187)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \rho \Phi + \rho q + k \nabla^2 T \quad (\text{forma entropica}), \quad (1.188)$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \left( e + G + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{teorema di Bernoulli}). \quad (1.189)$$

La forma entropica, sotto le ipotesi di fluido inviscido ( $\mu \rightarrow 0$ ,  $\Phi = 0$ ), adiabatico ( $q = 0$ ,  $k \nabla^2 T = 0$ ) e stazionario ( $St \rightarrow \infty$ ), si riduce a  $\vec{u} \cdot \nabla S = 0$  (flusso isentropico). La disuguaglianza di Clausius–Duhem impone  $DS/Dt \geq 0$ , e il teorema di Crocco stabilisce che  $\nabla S \neq \vec{0}$  implica  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ .

L'equazione dell'energia cinetica si ottiene moltiplicando scalarmente l'equazione di Navier–Stokes per  $\vec{u}$ :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla p + \vec{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (1.190)$$

L'equazione dell'energia interna (1.185) si ottiene sottraendo la (1.190) dalla (1.184). La forma entalpica (1.187) si ricava dalla definizione di entalpia  $h = U + p/\rho$ , differenziando e passando alle derivate materiali. La forma entropica (1.188) si ottiene dalla relazione termodinamica  $dS = dQ/T$ .