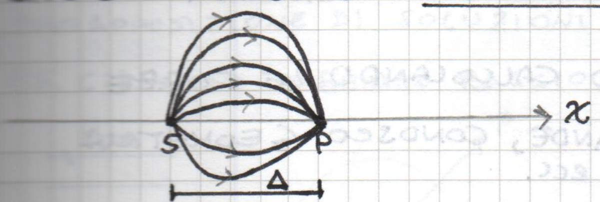
ULTIMA DEFINIZIONE DI POTENZIALE (NON DIMOSTRATA):

CASO DI FLUSSO = SORGENTE + POZZO



NON HO FLUSSO UNIFORME MA TUTTO CIÒ CHE È GENERATO DA S, VIENE ASSORBITO DA P.

LI UNISCO (NON È PERÒ SOVRAPPOSIZIONE MA È UN LIMITE):

$\lim \Delta \to 0$ E $\lim m \to \infty$

QUESTO LIMITE GENERA LA DOPPIETTA (DOUBLET)

$$\boxed{\varphi_D = \frac{K\cos\theta}{r}}$$

K È IL PRODOTTO TRA m E Δ MA È QUANTITÀ FINITA ANCHE SE Δ E m SI PORTANO AL LIMITE.

K È INTENSITÀ DELLA DOPPIETTA

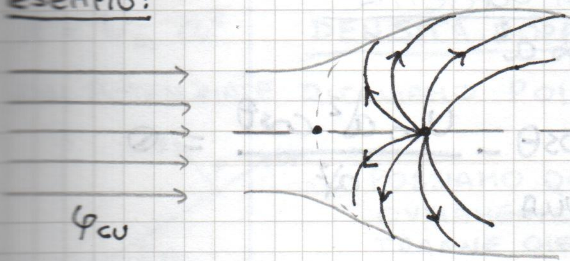
ABBIAMO DEFINITO 4 POTENZIALI:

SET POTENZIALI

$$\begin{cases} \varphi = U_\infty \cos\alpha + U_\infty \sin\alpha \\ \varphi_S = \frac{m}{2\pi}\ln r \\ \varphi_V = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \\ \varphi_D = \frac{K\cos\theta}{r} \end{cases}$$

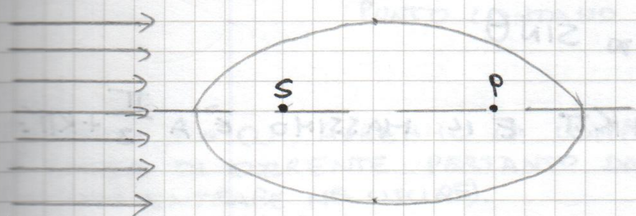
ADESSO BASTA SOVRAPPORRE QUESTE EQUAZIONI PER CAPIRE COME SI UTILIZZANO:

ESEMPIO:



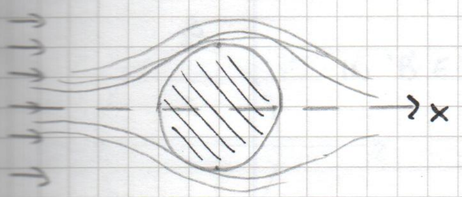
AL POSTO DEL CORPO, SOSTITUISCO LA SORGENTE CHE MI DEFINISCE UN PUNTO IN CUI LA CORRENTE NON È PIÙ UNIFORME (QUINDI IL FLUSSO NON È PIÙ UNIFORME)

SULLE DISPENSE HO IL CASO DELL'OVALE DI RENKIN:

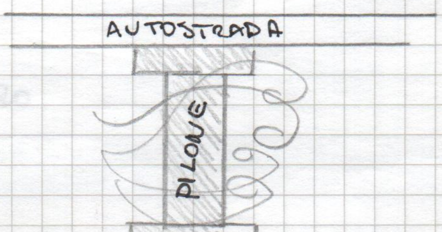


IN QUESTO CASO I CALCOLI SONO PIÙ DIFFICILI

ES. CASO CILINDRO: HO FLUSSO DI CORRENTE UNIFORME (φ_{CU}) INTORNO AD UN CILINDRO.

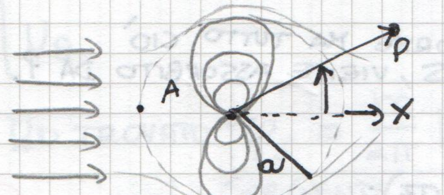


POSSO USARE APPROCCIO 2D? SE IL CILINDRO È LUNGO A SUFFICIENZA POSSO STUDIARE LA PARTE CENTRALE COSA CHE NON È POSSIBILE FARE PER ESEMPIO CON I PILONI DELLE AUTOSTRADE CHE SONO TROPPO BASSI E LARGHI; AVREI FENOMENI DIVERSI DA QUESTO CASO SEMPLICE (ES. TURBOLENZA).



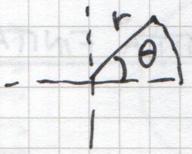
IPOTIZZIAMO CHE SIA POSSIBILE UTILIZZARE IL MODELLO 2D SUL CILINDRO:

ASSOMIGLIA AD UN OVALE DI RENKIN QUINDI TRA I 4 POTENZIALI USO SOLO QUELLO DELLA DOPPIETTA:



COSÌ FACENDO STIAMO CALCOLANDO LE FORZE AERODINAMICHE
HO PER ESEMPIO Re GRANDE, CONOSCO GEOMETRIA, LA VELOCITÀ DEL VENTO, ECC.

$$\varphi = \varphi_{CU} + \varphi_D = U_\infty r \cos\theta + \frac{K\cos\theta}{r}$$



CON RIFERIMENTO CARTESIANO ALLINEATO CON IL VENTO MA PASSIAMO POI A QUELLO POLARI PIÙ CONSONO CON I POTENZIALI

$$x \to r\cos\theta$$

IMPORTANTE È NON CONFONDERE α CON θ:

- α = ANGOLO DI APERTURA TRA ASSE x E FLUSSO (o ANGOLO DI INCIDENZA)
- θ = ANGOLO DEL RIFERIMENTO POLARE

NEL PUNTO A ABBIAMO $\theta = \pi$ E $r = a$

$$\begin{cases} U_r = \dfrac{d\varphi}{dr} = U_\infty \cos\theta - \dfrac{K\cos\theta}{r^2} & (1) \\ U_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -U_\infty \sin\theta - \dfrac{K\sin\theta}{r^2} & (2) \end{cases}$$

$$U_r(\theta=\pi, r=a) = -U_\infty + \frac{K}{a^2} = 0 \rightarrow K = U_\infty a^2$$

DENSITÀ DOPPIETTA

DA CUI SOSTITUENDO DI NUOVO NELLA (1): $U_\infty \cos\theta - \dfrac{U_\infty a^2 \cos\theta}{a^2} = 0$

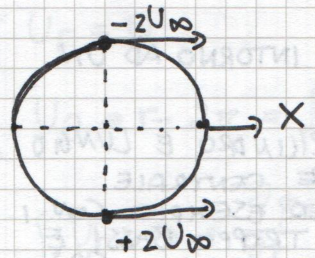
INFATTI SI ANNULLA $\rightarrow U_r$ DA DEFINIZIONE È NULLA
NON POSSO AVERE FLUSSO RADIALE

INVECE (2) SOSTITUENDO K:

$$U_{\theta_S} = -U_\infty \sin\theta - \frac{U_\infty a^2 \sin\theta}{a^2} = -2U_\infty \sin\theta$$

INFATTI VEDIAMO CHE IL MINIMO È A $\pi + K\pi$ E IL MASSIMO È A $\frac{\pi}{2} + K\pi$:

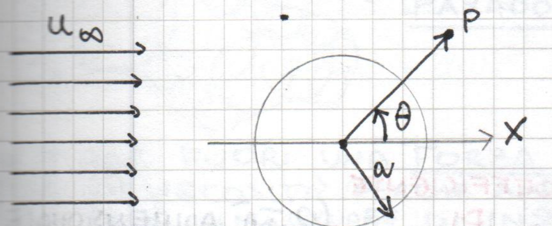
$$U_\theta\left(\theta = \frac{\pi}{2}, r = a\right) = -2U_\infty$$



FLUIDO 26 MAGGIO

ABBIAMO VISTO IL POTENZIALE CON METODO INDIRETTO O METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DI SOLUZIONI SEMPLICI.

ES. CILINDRO: ABBIAMO RAGGIO a E U_∞



UN PUNTO GENERICO SUL PIANO È DEFINITO DA r E θ ANTIORARIO.

$r \neq a$ IN GENERALE A MENO CHE NON PRENDO UN PUNTO SULLA CIRCONF. DEL CILINDRO DI RAGGIO a.

ABBIAMO QUINDI VISTO CHE:

$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$ È RISOLUBILE CON SET DI POTENZIALI $\begin{cases} \varphi \\ \varphi_s \ (o\ \varphi_p) \quad \text{SORG. o POZZO} \\ \varphi_v \\ \varphi_D \end{cases}$

VA CAPITO, DATO UN PROBLEMA, QUALI SOLUZIONI SCEGLIERE.

IN QUESTO CASO (ES. CILINDRO SCORSA LEZ.)

$\varphi = \varphi_{cu} + \varphi_D$ SOLUZIONI SCELTE GRAZIE A SIMMETRIA CILINDRICA

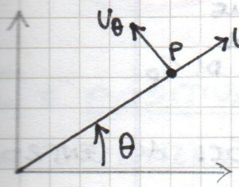
SE FOSTE STATO OVALE DI RANKIN AVREMMO AVUTO:

$\varphi = \varphi_{cu} + \varphi_s + \varphi_p$

CON QUESTI DATI RICAVIAMO POTENZIALE GLOBALE.

$k = U_\infty a^2$ DENSITÀ DOPPIETTA

DAL POTENZIALE RICAVIAMO POI $\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$



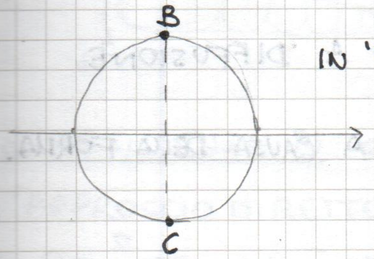
POSSIAMO QUINDI CALCOLARE $\vec{u}(u_\theta, u_r)$

OVVIAMENTE LA RELAZIONE $\varphi = \varphi_{cu} + \varphi_D$ È VALIDA OVUNQUE TRANNE CHE IN SINGOLARITÀ!

A NOI NON INTERESSA $\vec{u}$ O φ DENTRO AL CORPO; SAREBBE SOLO UNA TRATTAZIONE MATEMATICA. STESSO DISCORSO VARREBBE PER PUNTO LONTANO DAL CORPO.

PONENDO $r = a$ AVREMMO LA COMPONENTE RADIALE $U_r = 0$ (CORPO È IMPERMEABILE, È LINEA DI CORRENTE PERTANTO DA 2° TEOREMA DI HELMOLTZ LE PARTICELLE NON POSSONO ENTRARE NE USCIRE).

INVECE ABBIAMO $u_{\theta_S} = -2U_\infty \sin\theta$ IN CUI U_{θ_S} INDICA COMPONENTE ANGOLARE SULLA SUPERFICIE. IL $-$ È DOVUTO AL FATTO CHE LA VELOCITÀ VIENE DAL VERSO OPPOSTO RISPETTO A VELOCITÀ ANGOLARE.



IN 'B' E 'C' HO $|U_{\theta_{S_{MAX}}}| = 2U_\infty$ AL DI LÀ DEL SEGNO CHE DIPENDE DA $\sin\theta$.

ADESSO APPLICO T. BERNOULLI AL CILINDRO

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2}\rho U_s^2$$

DEVO CONOSCERE P_∞ (es. $P_\infty = P.ATM$) ASSOCIATA A FLUSSO INDISTURBATO.

CIÒ CHE MI INTERESSA È P_S.

MI RICAVO UN <u>COEFFICIENTE DI PRESSIONE</u> PER PROCEDERE CHE È <u>Q.TÀ ADIMENSIONALE</u>

$$C_{P_S} = \frac{P_S - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

P. RELATIVA: $P_S - P_{RIF}$

FATTORE NECESSARIO PER ADIMENSIONALIZZARE LA PRESSIONE

$$= \frac{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho U_{\theta_S}^2}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \xrightarrow[\frac{1}{2}\rho U_\infty^2]{\text{DIVIDO TUTTO PER}} = \boxed{1 - \left(\frac{U_{\theta_S}}{U_\infty}\right)^2 = C_{P_S}}$$

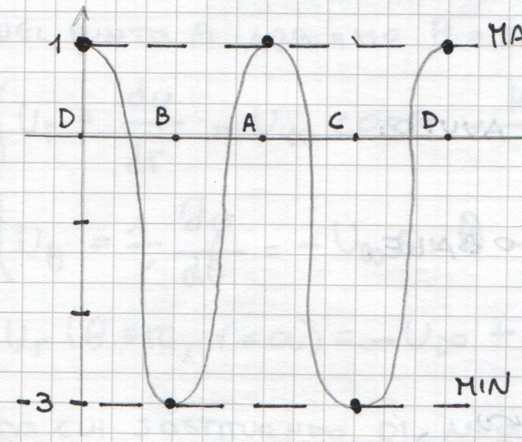
COEFFICIENTE DI PRESSIONE (Q.TÀ ADIMENSIONALE)

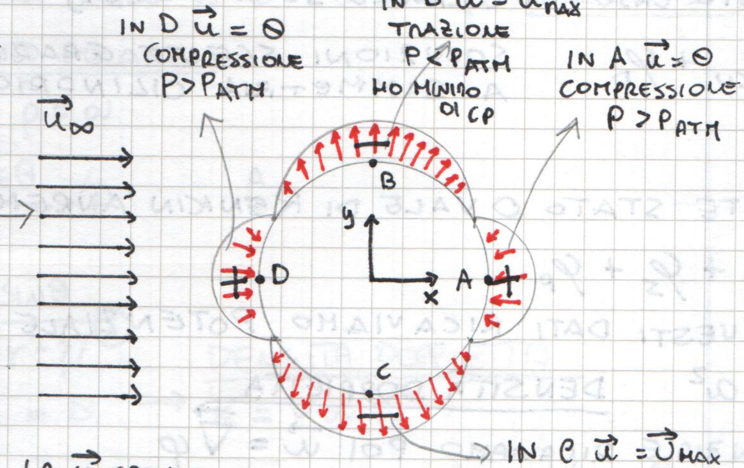
$$\boxed{C_{P_S} = 1 - 4\sin^2\theta}$$

IN CUI HO SOSTITUITO AL POSTO DI $U_{\theta_S} = -2U_\infty \sin\theta$

COEFF. DI PRESSIONE VALIDO PER TUTTI I CILINDRI CON IPOTESI INIZIALI → HO QUINDI UN $C_{P_S}(\theta)$ CHE PUÒ ESSERE INTEGRATO LUNGO TUTTA LA SUPERFICIE

C_{P_S} VARIERÀ IN QUESTO MODO:





LA $\vec{u}$ CRESCE DA D → B E C
DIMINUISCE DA B E C → A

COME SARANNO LE <u>FORZE</u> ASSOCIATE A QUESTO SISTEMA POSIZIONANDOCI AL CENTRO DEL CILINDRO?

$\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ → $F_x = 0$, $F_y = 0$ — POICHÈ LA GEOMETRIA SIMMETRICA RENDE NULLE LE FORZE: TANTO COMPRIMO DA UNA PARTE, TANTO COMPRIMO DALL'ALTRA MA CON VERSO OPPOSTO.

RISULTANTE

LA $\boxed{\sum_{i=1}^{N} F_i = 0}$ SU TUTTI E DUE GLI ASSI.

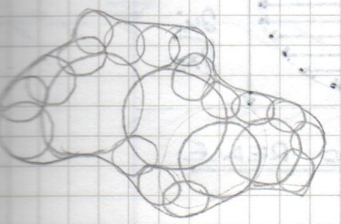
QUESTO RISULTATO NON RISPECCHIA PERÒ LA REALTÀ POICHÈ C'È SEPARAZIONE DEL FLUIDO (LA COSIDDETTA SCIA) POICHÈ NON SI TENGONO CONTO GLI EFFETTI VISCOSI (DA CUI NASCE VORTICITÀ) NEL MODELLO DEL POTENZIALE.

NELLA <u>REALTÀ</u> SI GENERA UNA <u>RESISTENZA</u> CHE È LEGATA A DIFFERENZA DI PRESSIONE.

LA <u>RESISTENZA DI FORMA</u>: OGGETTO GENERA RESISTENZA A CAUSA DELLA FORMA.

IN UN PROFILO ALARE SI GENERA RESISTENZA DI ATTRITO CHE SI CREA PER τ (LEGATO AGLI SFORZI DI TAGLIO ALLA PARETE) E NON A DIFFERENZA DI PRESSIONE.

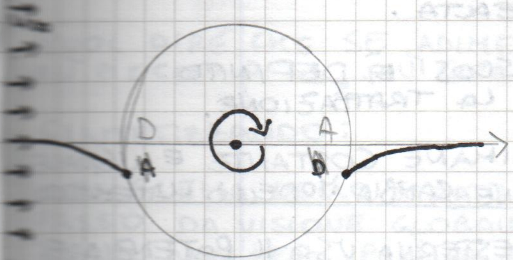
SE IMMAGINO UN CORPO DI FORMA QUALSIASI LO POSSO SOSTITUIRE CON CILINDRETTI. FACCIO I CONTI CON LA TEORIA DEL POTENZIALE, INTEGRO E TROVO 0 (CON TUTTE LE IPOTESI).



ANCHE IN QUESTO CASO LA RISULTANTE È NULLA

PARADOSSO DI D'ALEMBERT

PER TIRAR FUORI UNA FORZA DIVERSA DA 0 NON POSSO CONSIDERARE LA IPOTESI DI VISCOSITÀ PERCHÉ ANDREBBE CONTRO IPOTESI INIZIALI. POSSO PERÒ IMMAGINARE DI INSERIRE VORTICE, CIOÈ FACCIAMO RUOTARE IL CILINDRO HO, OLTRE LINEE DI CORRENTE E DOPPIETTA, LINEE DI FLUSSO INTORNO. AGGIUNGO QUINDI SINGOLARITÀ DI VORTICE CHE ROMPE SIMMETRIA.



$$\boxed{\varphi = \varphi_{cu} + \varphi_D + \varphi_V}$$

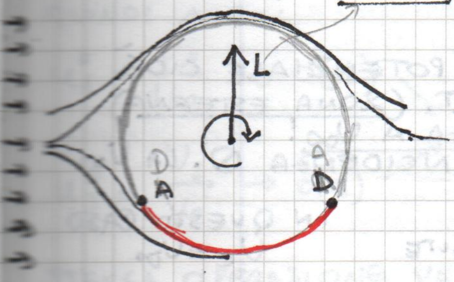
IN QUESTO CASO L'ESPRESSIONE DEL C_{p_s} NON È PIÙ VALIDA.

DEFINIAMO LA ROTAZIONE IN SENSO ORARIO FACENDO I CONTI (PRENDO φ, K, a, φ_V E TROVO VELOCITÀ CON IL GRADIENTE, DA $\vec{u}$ RICAVO VELOCITÀ SU SUPERFICIE, $r = a$ E POI TROVARE PRESSIONE CON BERNOULLI.

[PROVA A FARLO E CALCOLA DOVE $u_\theta = 0$]

I PUNTI A E D SI SPOSTANO VERSO IL BASSO → PER CUI SI SPOSTANO LE LINEE DI CORRENTE:

PORTANZA



MI ASPETTO CHE LE PARTICELLE CHE PASSANO SOPRA SIANO PIÙ VELOCI:

NASCE QUINDI F_y PERCHÉ TRA MONTE E VALLE È TUTTO SIMMETRICO MENTRE $F_x = 0$.

LA FORZA SPINGE IN ALTO: INFATTI P È PIÙ BASSA POICHÉ LE PARTICELLE SONO PIÙ VELOCI

SE AVESSIMO ROTAZIONE IN SENSO ANTIORARIO I PUNTI DI RISTAGNO SONO IN ALTO.

Γ È POSITIVA SE ROTAZIONE È ANTIORARIA, NEGATIVA SE ORARIA.

LA PORTANZA È LEGATA A CIRCOLAZIONE Γ AL DI LÀ DEL SEGNO.

SE CALCOLO C_p OTTENGO VALORE $\neq 0$; INTEGRANDO C_p E DIMENSIONALIZZANDOLO:

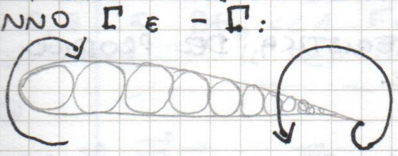
$$\boxed{L = -\rho V_\infty \Gamma}$$

TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKY

ERANO DUE RUSSI CHE MISERO LE BASI SULL'AERODINAMICA. AL SECONDO INTITOLARONO UN PAESE

PER VERSO ORARIO

VALE PER TUTTI I CORPI IN CUI SI GENERA PORTANZA PERCHÉ POSSO IMMAGINARE PROFILO CON CILINDRETTI OGNUNO CON PROPRIA CIRCOLAZIONE. L'INSIEME DEI CILINDRETTI MI DANNO Γ E $-\Gamma$:



COME SI FA AD AUMENTARE Γ?

AUMENTO L'ANGOLO DI INCIDENZA, AUMENTANDO COSÌ LA VELOCITÀ DELLE PARTICELLE DI SOPRA E DI SOTTO, AUMENTANDO COSÌ Γ.

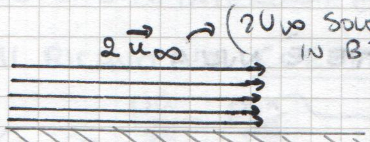
LA RESISTENZA D RIMANE PERÒ INDETERMINATA.

(L'APPROCCIO DIRETTO PORTA AGLI STESSI RISULTATI)

LA RESISTENZA D È LEGATA A FORZE VISCOSE CHE SE NON TENIAMO IN CONTO NON POSSIAMO TROVARLA.

GRAZIE ALL'INSERIMENTO DEL VORTICE SALVIAMO QUESTO APPROCCIO CHE CI PERMETTE DI CALCOLARE LA PORTANZA. LA RESISTENZA È IMPORTANTE INTORNO ALLE PARETI.

CON IL MODELLO DEL POTENZIALE, IN PROSSIMITÀ DELLA PARETE, AVREMO UNA CONDIZIONE DI QUESTO GENERE IN CUI IL GRADIENTE È NULLO.



MODELLO DEL POTENZIALE

NON DEVE QUINDI ESSERCI UNA CONDIZIONE DEL GENERE, OSSIA GRAD. DI $\vec{u}$ CON u IN PROSSIMITÀ DELLA PARETE $= 0$

MODELLO REALE

ESISTE QUINDI UNA ZONA IN CUI LA VELOCITÀ VARIA IN MANIERA SIGNIFICATIVA PERTANTO L'EFFETTO VISCOSO È RILEVANTE IN PROSSIMITÀ DELLE PARETI.
QUINDI Re IN PROSSIMITÀ PARETE È FINITO $\rightarrow Re \sim 1$
L'EFFETTO È IN GENERE LIMITATO A PARETE.
IL MODELLO DEL POTENZIALE NON VA BENE NELLA REALTÀ.

LA ZONA IN CUI IL GRADIENTE VARIA PER EFFETTI VISCOSI È DEFINITO STRATO LIMITE E TRAMITE QUESTO SEMPLIFICHIAMO LA TRATTAZIONE.

DIVIDIAMO IL CAMPO IN DUE ZONE: UNA IN CUI u RIMANE COSTANTE E UGUALE A $\vec{u}_\infty$ E UNA IN CUI HO GRADIENTE. TRA LE DUE ZONE CAMBIA MODELLO MATEMATICO.

PROFILO DI VELOCITÀ

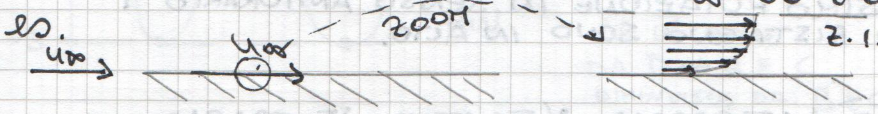
ZONA ESTERNA $\rightarrow$ NELLA ZONA ESTERNA USO IL POTENZIALE

ZONA INTERNA
STRATO LIMITE $\rightarrow$ EFFETTI VISCOSI NON TRASCURABILI
NON POSSO USARE IL POTENZIALE

STRATO LIMITE (BOUNDARY LAYER)

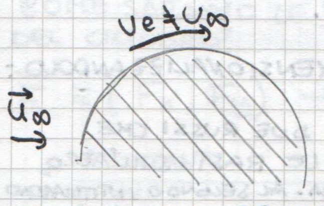
DEFINIAMO U_e = VELOCITÀ CHE IN UN PUNTO CALCOLO CON IL POTENZIALE CIOÈ
e per "esterno" CON MODELLO INVISCIDO O MOD. POT. (ZONA ESTERNA)
È IMPORTANTE RICORDARE CHE U_e NON È UGUALE PER FORZA A U_∞!
SONO UGUALI SOLO NEL CASO DELLA LASTRA PIANA CON INCIDENZA 0. LA U_∞ È ALLINEATA CON LA STRUTTURA

ES.



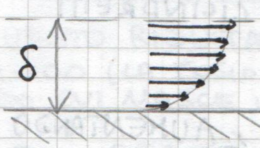
IN QUESTO CASO $U_e = U_\infty$

SE HO SUPERFICIE CURVA:



IN QUESTO CASO $U_e \neq U_\infty$ QUINDI DEVO USARE UN MODELLO DIVERSO CHE TIENE CONTO DELLE FORZE VISCOSE.

DOBBIAMO PRIMA DI TUTTO FARE QUESTA CONSIDERAZIONE:



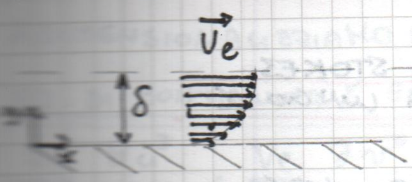
• $\boxed{L_0 \gg \delta}$
CON L_0 LUNGHEZZA CARATTERISTICA DEL PROFILO E δ SPESSORE STRATO LIMITE.

SE LA IPOTESI NON È SODDISFATTA, BISOGNA USARE SET COMPLETO DI EQUAZIONI.

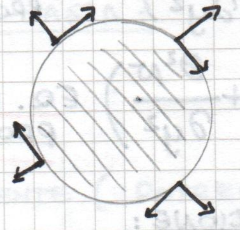
A QUESTO PUNTO, CON IPOTESI VALIDA, DOBBIAMO USARE DUE SCALE ADIMENSIONALI DIVERSE:

$$U_i^* = \frac{U_i}{U_0} \quad \text{E} \quad x_i^* = \frac{x_i}{L_0}$$ CON 1 SOLA SCALA PER ADIMENSIONALIZZARE.

CON STRATO LIMITE LE COSE CAMBIANO



SCELGO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO DI PARETE CHE NON CORRISPONDE AD ASSI VENTO NE ASSI CORPO.



ASSOCIO A:

$y \sim \delta$

$x \sim L_0$

STO CERCANDO DI CAPIRE COME ADIMENSIONALIZZARE

DEVO QUINDI USARE DUE SCALE DIVERSE:

$$y^* = \frac{y}{\delta} = o(1) \quad \text{E} \quad x^* = \frac{x}{L_0} = o(1)$$

VUOL DIRE CHE SE ADIMENSIONALIZZO y CON L_0 AVREI TROVATO VALORE MOLTO PIÙ PICCOLO DI 1, PIÙ GRANDE x CON δ.

SINTETIZZANDO:

IL PROBLEMA DELLO STRATO LIMITE È UN PROBLEMA A 2 SCALE, QUINDI QUANDO PASSO DA VISIONE GLOBALE A LOCALE NON HO PIÙ 1 SCALA MA 2. ADIMENSIONALIZZANDO NON VEDO PIÙ LA DIFFERENZA.

NELLO STRATO LIMITE DOBBIAMO CONSIDERARE CHE CI SIA PICCOLA COMPONENTE IN y, QUINDI:

$\vec{U}_e = (U_e, V_e)$ ← GR. DI RIFERIMENTO, DOVE $U_e \gg V_e$ ← SERVONO COME GR. PER ADIMENSIONALIZZARE

QUINDI AVRÒ:

$$u_1^* = \frac{U_1}{U_e} \to o(1)$$

$$u_2^* = \frac{U_2}{V_e} \to o(1)$$

AL POSTO DI U_1 E U_2 SI USERÀ u E v

STESSA OPERAZIONE VA FATTA NEL CASO DI GRUPPI ADIMENSIONALI:

$$Re = \frac{\rho_0 U_e L_0}{\mu} = \infty$$ ← Q.TÀ ASSOCIATE A MONDO ESTERNO. È CAMPO POTENZIALE

$$Re = \frac{\rho_0 V_e \delta}{\mu} \sim 1$$ È PICCOLO POICHÈ È STRATO LIMITE

LE EQUAZIONI CHE TRATTEREMO AVRANNO UNA SERIE DI IPOTESI:
DEVO RIPRENDERE SET EQUAZIONI COMPLETO E ADIMENSIONALIZZATO ←

- CONTINUIAMO A LAVORARE IN 2D → $u = (u, v)$
- $St \to \infty$ → FLUSSO STAZIONARIO
- $Fr \to \infty$ → FORZA DI MASSA TRASCURABILE
- $M < 0{,}3$ E $Bt_0 \ll 1$ FLUSSO INCOMPRIMIBILE → $E \lll 1$ → $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$
- ρ COSTANTE IL SET DI EQ. DIVENTERÀ

UGUALE A PRIMA MA Re NON C'È MA C'È St

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \cancel{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \overset{\frac{\mu}{3}\dots}{0} \end{cases}$$

SET EQUAZIONI DI STRATO LIMITE NON ADIMENSIONALIZZATE

NON C'È EQ. DI ENERGIA

LE INCOGNITE SARANNO u, v, p (3)

L'EQ. DI CONTINUITÀ DIVENTERÀ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

DEVO ESPLICITARE LE ALTRE EQUAZIONI:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$ EQ. NAVIER STOKES PROIETTATA LUNGO x

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$ EQ. NAVIER STOKES PROIETTATA LUNGO y

PER EFFETTUARE LA ADIMENSIONALIZZAZIONE:

$$u^* = \frac{u}{U_e} = o(1)$$

$$v^* = \frac{v}{V_e} = o(1)$$

$$y^* = \frac{y}{\delta} = o(1)$$

$$x^* = \frac{x}{L_0} = o(1)$$

$$p^* = \frac{p}{p_0} = o(1)$$

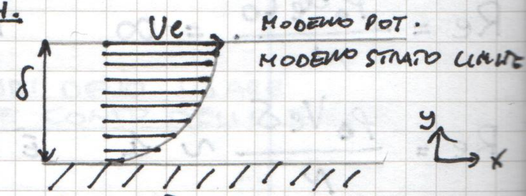
LEZIONE FLUIDODINAMICA 27/MAGGIO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho u \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

SOTTO PARTICOLARI IPOTESI IL SET DI EQUAZIONI DIVENTA COSì. SONO EQUAZIONI GENERALI CHE NON RIGUARDANO SOLO STRATO LIMITE. CON ULTERIORI SEMPLIFICAZIONI ARRIVIAMO A EQ. APPLICATE A STRATO LIMITE.

LA SEMPLIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI AL DI LÀ DELLE IPOTESI DEI GR. ADIM, STA NELLA VISIONE 2D E NELLE 2 SCALE DIMENSIONALI.

DOBBIAMO SCEGLIERE GRANDEZZE DI RIFERIMENTO PER ADIMENSIONALIZZARE:



ASSE X È SCELTO TANGENTE ALLA PARETE PER DEFINIZIONE
$V_e \neq U_\infty$ IN GENERALE

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{x}{L_0} = o(1) \quad V_e, L_0 \\ y^* = \dfrac{y}{\delta} = o(1) \quad V_e, \delta \\ u^* = \dfrac{u}{U_e} \\ v^* = \dfrac{v}{V_e} \end{cases}$$

DEVO UTILIZZARE 2 SCALE DIVERSE NELLA ZONA VISCOSA

POSSO DEFINIRE DUE N. DI REYNOLDS,

Re STRATO LIMITE E Re_∞ CAMPO ESTERNO.

$$Re = \frac{\rho_0 U_e L_0}{\mu}$$ È GRANDE: È ASSOCIATO AL FLUSSO POTENZIALE ESTERNO

ASSOCIATO AL FLUSSO POTENZIALE

ADIMENSIONALIZZIAMO:

EQ. DI CONTINUITÀ / EQ. CONS. MASSA:

$$\boxed{\frac{U_e}{L_0}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{V_e}{\delta}\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0}$$

DIVIDO PER $\frac{U_e}{L_0}$ ARBITRARIAMENTE (POTREI FARLO ANCHE CON $\frac{V_e}{\delta}$)

$$\underbrace{\frac{\partial u^*}{\partial x^*}}_{o(1)}+\underbrace{\frac{V_e}{\delta}\frac{L_0}{U_e}\frac{\partial v^*}{\partial y^*}}_{o(1)}=0 \rightarrow$$

ANCHE $\frac{V_e}{\delta}\frac{L_0}{U_e}$ DEVE ESSERE DI ORDINE DI $1 \sim o(1)$

QUINDI $\frac{V_e}{U_e}\sim\frac{\delta}{L_0}$ IL RAPPORTO TRA SCALE DI LUNGH. DEVE ESSERE UGUALE A SCALE DI VELOCITÀ

EQ. DI NAVIER-STOKES (ADIM. SOLO 1 EQ., STESSO RAGIONAMENTO PER L'ALTRA)

DEVO CONSIDERARE ρ COSTANTE (NON ADIM.) E CONSIDERO $P^*=\frac{P}{P_0}$ ...

$$\rho\frac{U_e^2}{L_0}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\rho\frac{V_e U_e}{\delta}v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{P_0}{L_0}\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\mu\frac{U_e}{L_0^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\mu\frac{U_e}{\delta^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

DIVIDO $\rho\frac{U_e^2}{L_0}\rightarrow u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\underbrace{\cancel{\rho}\frac{V_e U_e}{\delta}\frac{L_0}{\cancel{\rho}U_e^2}}_{o(1)}v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\ \ldots$

$o(1)$ QUINDI LO POSSO ELIMINARE

QUINDI:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\underbrace{\frac{P_0}{\cancel{L_0}}\frac{\cancel{L_0}}{\rho U_e^2}}_{1/Ru}\frac{dP^*}{\partial x^*}+\ldots$$

N. RUARK $\rightarrow$ SCEGLIAMO P. RIF = P. DINAMICA $\Rightarrow Ru=1$
È LA PRESS. DI U_e CHE ASSUMIAMO = P. RIF. POICHÉ È LA P. ESTERNA.

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\mu\underbrace{\frac{U_e}{L_0^2}\frac{L_0}{\rho U_e^2}}_{1/Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\mu\frac{U_e}{\delta^2}\frac{L_0}{\rho U_e^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

ADESSO SEMPLIFICHIAMO:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{1}{\delta^2}\frac{L_0\mu}{\rho U_e}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

QUINDI RAGGRUPPIAMO L'ULTIMO TERMINE IN MODO DIVERSO:

$$\boxed{u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial P^*}{\partial x^*}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\left(\frac{L_0^2}{\delta^2}\right)\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}}$$

IN CUI HO MOLTIPLICATO E DIVISO PER L_0 COSÌ DA FAR APPARIRE Re.

$\rightarrow$ SE $\vec{u}(u,v)$

QUINDI SE U_e È ASSOCIATA A CAMPO POT. $\rightarrow Re\rightarrow\infty$

PER FAR SOPRAVVIVERE TERMINE VISCOSO NELL'EQUAZIONE, $\left(\frac{L_0}{\delta}\right)^2\cdot\frac{1}{Re}\sim 1$
SE NON FACESSI QUESTA ASSUNZIONE 1/Re ANDREBBE VIA, QUINDI SAREMMO SOLO IN CAMPO POT. QUANDO INVECE L'EQUAZIONE È GENERICA.

QUINDI $\boxed{\frac{\delta}{L_0}\sim\frac{1}{\sqrt{Re}}}$ STIMA PER ORDINI DI GRANDEZZA

ES. $L_0=1m$ E $Re\sim10^6$ (NON ECCESSIVAMENTE GRANDE) $\rightarrow\frac{1}{\sqrt{Re}}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{m}\rightarrow\delta=10^{-3}\ m=1mm$ DI STRATO LIMITE

L'ALTRA EQUAZIONE SI TRATTA ALLO STESSO MODO.
RISCRIVIAMO I RISULTATI TROVATI.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \\ + \text{ L'ALTRA} \end{cases}$$

DIVIDO TUTTO PER ρ, FACCIO TENDERE $Re \to \infty$ QUINDI SPARISCE UNO DEI DUE TERMINI VISCOSI E RIMANE QUELLO IN CUI:

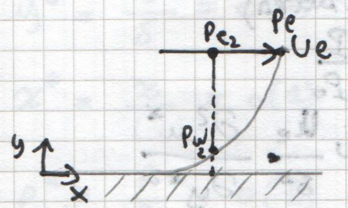
$$\frac{\delta}{L_0} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

FACENDO TENDERE $Re \to \infty$ SI OTTIENE UN RISULTATO PARTICOLARE:

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0}$$

AL POSTO DI TUTTA L'EQ. DI NAVIER-STOKES C'È SOLO 1 TERMINE CHE RIMANE DELL'ORDINE DI 1.

LA PRESSIONE NON È QUINDI INCOGNITA



P_e ESSENDO NEL MONDO POTENZIALE È LEGATA A U_e.

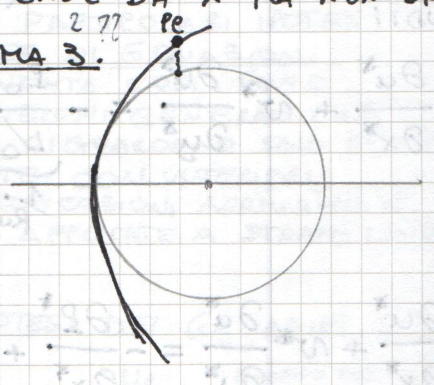
$P(y) = $ COSTANTE

QUINDI $P_{W_2} = P_{e_2}$ POICHÈ P È COSTANTE LUNGO y MA NON LUNGO x
QUINDI PER CALCOLARE P NELLO STRATO LIMITE LA POSSO CALCOLARE TRAMITE LA P_e CORRISPONDENTE LUNGO y.

QUINDI LA 2° EQ. (LA 3 EQ. CIOE) DI NAVIER-STOKES NON MI SERVE PIÙ.

$p^* = p_e^* \rightarrow p^*(x) = p_e^*(x)$ QUINDI LA p DIPENDE DA x MA NON DA y.

LE EQUAZIONI NELLO STRATO LIMITE NON SONO PIÙ 2 (3) MA 3 (2 ??).



PRENDENDO L'EQ. DI BERNOULLI E DERIVANDO:

$$P_e + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = \text{COST} \quad \text{(IN UN DATO } x \text{ INTORNO AL CORPO)}$$

← NON CI SONO GLI ASTERISCHI

$$\frac{dP_e}{dx} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = 0 \quad \text{ABBIAMO DERIVATO BERNOULLI}$$

$$\boxed{\frac{dP_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}}$$

EQUIVALENTE A SCRIVERE:

$$\boxed{u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = + U_e^* \frac{dU_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}}$$

QUESTE EQUAZIONI (EQ. CONTINUITÀ + NAVIER-STOKES) SI CHIAMANO:

EQUAZIONI DI PRANDTL (EQUAZIONI DENTRO STRATO LIMITE) ←

F. ADIM. ←

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = U_e^* \dfrac{dU_e^*}{dx^*} + \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \Leftrightarrow u^* \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\dfrac{\partial P_e^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{cases}$$

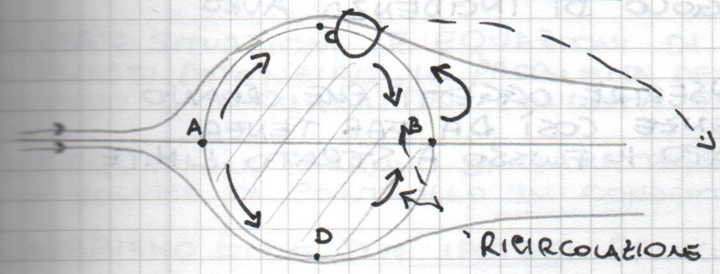
E IN F. DIMENSIONALE: ←

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} = \rho U_e \dfrac{dU_e}{dx} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE

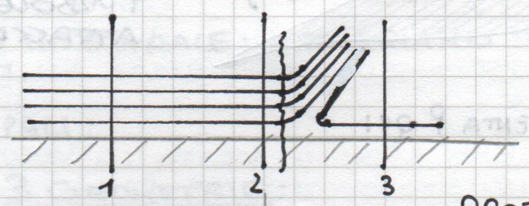
QUESTE EQUAZIONI CI SERVONO NELLO STUDIO DEI FLUSSI INTORNO AI CORPI (FLUSSI CHE SI DISTACCANO). FLUSSO SI STACCA DA PARETE.

CASO REALE

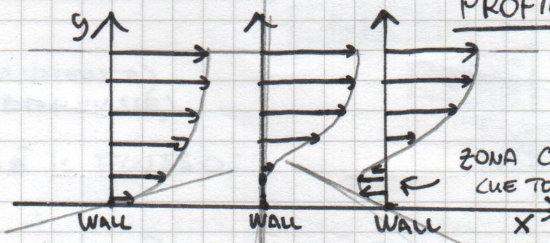


FLUSSO NON RIESCE AD AGGIRARE LA PARETE → IL FLUSSO SI STACCA DALLA PARETE LE SUE LINEE DI CORR. NON SEGUONO PIÙ PARETE.

INGRANDIAMO PARETE: (ANALISI QUALITATIVA)



PROFILI DI VELOCITÀ



$u = 0$ SULLA PARETE

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w > 0$ VELOCITÀ CRESCE $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w = 0$ TANGENTE VERTICALE NEL P.TO DI SEPARAZIONE $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w < 0$

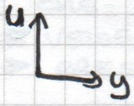
SU $y=0 \rightarrow u=0$ MA $\frac{du}{dy} \neq 0$ TRANNE NEL 2 CASO.

VA GUARDATO NEL PUNTO $y=0$ (W)

QUANDO FLUSSO SI SEPARA SI HA RICIRCOLAZIONE, QUINDI LE LINEE DI CORRENTE POSSONO TORNARE INDIETRO; SI CREANO VORTICI (NON TURBOLENZA); QUINDI NON C'È DIREZIONE PREFERENZIALE

IL RISULTATO DELLE DERIVATE NON CI SPIEGA IL PERCHÉ DELLA SEPARAZIONE.

$$\boxed{\mu \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w \left(= \rho \frac{dP_e}{dx}\right)}$$



LE EQUAZIONI SOPRA SONO IL RISULTATO DELLE EQ. DI PRANDTL APPLICATE ALLA PARETE DOVE $u_w = v_w = 0$ QUINDI SI ANNULLANO I TERMINI

LE DERIVATE PRIME NON MI DICONO MOLTO; LE DERIVATE SECONDE SI. RIPRENDO 2° EQ. APPLICATA ALLA PARETE E QUINDI AVRÒ:

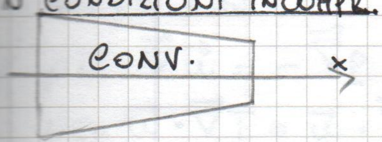
1° CASO: FLUSSO ATTACCATO $\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w < 0 \quad$ CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

2° CASO: PUNTO DI SEPARAZIONE $\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w > 0 \quad$ CONCAVITÀ VERSO L'ALTO

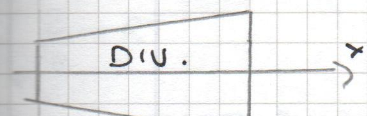
3° CASO: FLUSSO SEPARATO $\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w > 0 \quad$ CONCAVITÀ VERSO L'ALTO

CIÒ MI DICE CHE LA DER. SECONDA DEVE ESSERE POSITIVA CIOÈ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$ AFFINCHÈ CI SIA SEPARAZIONE; NON CI GARANTISCE PERÒ CHE SIA SEPARATO: È CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFF. → SE $\partial u/\partial y < 0$ HO FLUSSO SEPARATO.

IN CONDIZIONI INCOMPR.



$\frac{dP_e}{dx} < 0,\ u\uparrow$ NON HO SEPARAZIONE



$\frac{dP_e}{dx} > 0,\ u\downarrow$

POSSO AVERE SEPARAZIONE

QUANDO HO GRAD. PRES < 0 → NO SEP.

GRAD. PRES > 0 → POSSO AVERE SEPARAZIONE

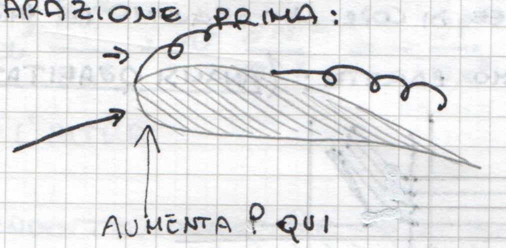
$\frac{dP_e}{dx} > 0$

$\frac{dP_e}{dx} > 0$ È CONDIZIONE AVVERSA →

PER RENDERE GRADIENTE PICCOLO (QUINDI VAR. PRESSIONE PICCOLA) LA POSSO AVERE CON CONDOTTI DEBOLMENTE VARIABILI

NELLA GALLERIA DEL VENTO IL DIFFUSORE ($u \downarrow$) È MOLTO LUNGO; NEGLI AEREI LA PRESA DINAMICA (DIFFUSORE) NON LA SI PUÒ FARE LUNGA; SI CERCA DI COMPRIMERE IL FLUSSO PRIMA (ALL'ESTERNO).

CIÒ SPIEGA PERCHÈ AUMENTANDO L'ANGOLO DI INCIDENZA AVRÒ SEPARAZIONE PRIMA:



POSSO INSERIRE OGGETTI CHE CREANO TURBOLENZE COSÌ DA FAR TENER ATTACCATO IL FLUSSO A STRATO LIMITE

...DO 31 MAGGIO

FLUSSI COMPRESSIBILI IN CONDOTTI

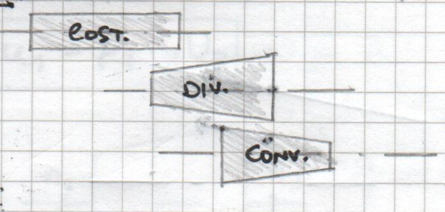
NEI FLUSSI COMPRIMIBILI ρ GIOCA UN RUOLO IMPORTANTE.

IN CERTE SITUAZIONI LE EQUAZIONI DI GOVERNO SI SEMPLIFICANO. ABBIAMO VISTO FLUSSI POTENZIALI, IL PROBLEMA DELLO STRATO LIMITE E ADESSO VEDIAMO I FLUSSI COMPRIMIBILI IN CONDOTTI CHE DEVONO RISPETTARE ALCUNE CARATTERISTICHE.

LE EQUAZIONI SARANNO DI CARATTERE INTEGRALE: INTEGRIAMO EQUAZIONI IN VOLUME DI CONTROLLO DI CONDOTTI.

DOBBIAMO FARE DUE IPOTESI PRINCIPALI:

1) I CONDOTTI SONO IN GENERALE IN 3 GEOMETRIE:



- CONDOTTA A SEZIONE COSTANTE
- CONDOTTA DIVERGENTE (SEZIONE AUMENTA)
- CONDOTTA CONVERGENTE (SEZIONE DIMINUISCE)

UN CONTO È LA GEOMETRIA, UN CONTO È IL FLUSSO:

IN GENERALE POSSIAMO DIRE CHE:
- SE SEZIONE AUMENTA → VELOCITÀ DIMINUISCE / → PRESSIONE AUMENTA } MA NON È SEMPRE VALIDA, COME AVVIENE IN FLUSSI SUPERSONICI
- VICEVERSA L'OPPOSTO

VEDREMO CHE È IL NUMERO DI MACH CHE CI DA INFO SU $\vec{u}$ E P.

2) $M > 0,3$ POICHÈ FLUSSO È COMPRIMIBILE QUINDI DOBBIAMO CONSIDERARE L'INTERO SET DI EQUAZIONI.

FATTE QUESTE IPOTESI, DOBBIAMO FARNE ALTRE PARTENDO DAL SET DI EQUAZIONI:
- $Re \to \infty$: LA DIMENSIONE DEI CONDOTTI È A LIVELLO INDUSTRIALE QUINDI SI PARLA DI CONDOTTI DI ALMENO QUALCHE cm DI DIAMETRO, QUINDI NON SONO PICCOLI.
  PERTANTO U_0, L_0 SONO ABBASTANZA GRANDI → DA CUI Re GRANDE.
- $Fr \to \infty$: FORZE DI MASSA TRASCURABILI. AVREMO GAS O ARIA, QUINDI È LECITO CONSIDERARE CIÒ. INOLTRE I CONDOTTI HANNO IN GENERE STESSA ALTEZZA, QUINDI LA GRAVITÀ NON INFLUISCE MOLTO.
- $St \to \infty$: FLUSSO STAZIONARIO. IL TEMPO CARATTERISTICO DEL FENOMENO È MOLTO LUNGO.
- $Ru = 1$: NON SIAMO IN PRESENZA DI CAVITAZIONE → P. REF = P. DIN.
- $\rho_q = 0$
- $K = 0$ → MA COMUNQUE SI ELIMINERÀ PER VIA DI $\frac{1}{RePr}$ → CONDOTTO ADIABATICO: NON C'È SCAMBIO DI CALORE ATTRAVERSO LE PARETI.

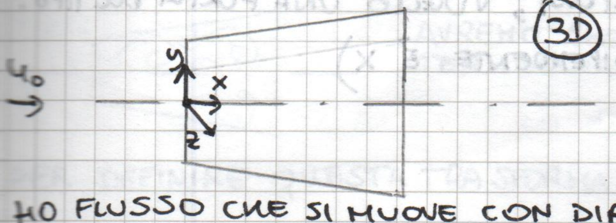
RIPRENDO EQ. ADIMENSIONALIZZATE:
IL SET DI EQUAZIONI DIVENTA: ←

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} = 0 \\ \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}p \\ \rho c_p\,\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p \\ \frac{p}{\rho} = RT \end{cases}$$

PER GIUNGERE A QUESTO SET SI È PARTITI DA EQ. ADIMENSIONALIZZATE E, UNA VOLTA APPLICATE LE IPOTESI, SI RIDIMENSIONALIZZA.

VOGLIO TRASFORMARE L'EQUAZIONE DA FORMA DIFFERENZIALE A FORMA INTEGRALE.

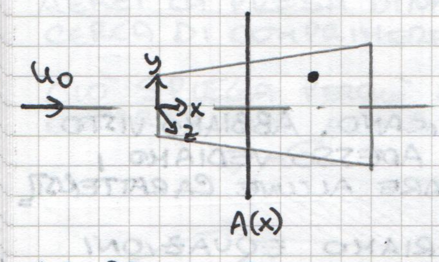
ADESSO SEMPLIFICO IL SET CON L'INTRODUZIONE DI UN CONDOTTO GENERICO:



- SCEGLIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO
- ALLINEAMO ASSE x CON u_0 (E IN QUESTO CASO È ALLINEATO ANCHE CON ASSE GEOMETRICO).

HO FLUSSO CHE SI MUOVE CON DIREZIONE PREFERENZIALE

• IN UN PUNTO ARBITRARIO NEL CONDOTTO AVRÒ: $\vec{u}(u, v, w)$ (3D)

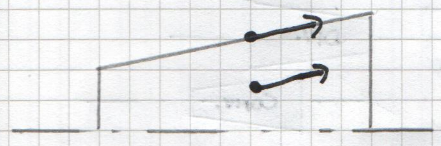


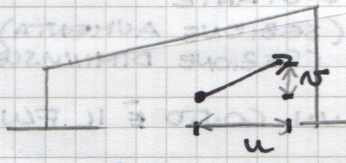
• CONSIDERANDO UNA SEZIONE GENERICA $A(x)$ AVRÒ CHE:

$\frac{dA}{dx} \neq 0$ MA ASSUMO CHE $\frac{dA}{dx}$ = VALORE PICCOLO } IL CONDOTTO È A SEZIONE DEBOLMENTE VARIABILE

LA PRIMA CONSEGUENZA LA TROVO SU COMPONENTI DELLA VELOCITÀ.

PER LE IPOTESI CHE ABBIAMO FATTO LA VELOCITÀ È PARALLELA ALLA PARETE QUINDI NON HO STRATO LIMITE (NON HO IL GRADIENTE).

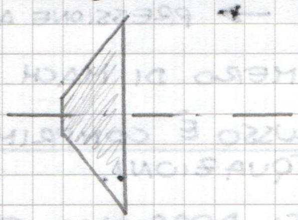




SE LA SEZIONE VARIA POCO CI POSSIAMO ASPETTARE CHE LE COMPONENTI TRASVERSALI v E w SONO PIÙ PICCOLE DI u:

$\boxed{u \gg v}$ E $\boxed{u \gg w}$

SE AVESSIMO CONDOTTO DEL TIPO:
CIÒ NON SAREBBE PIÙ VERO POICHÉ v E w AVREBBERO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DI u.

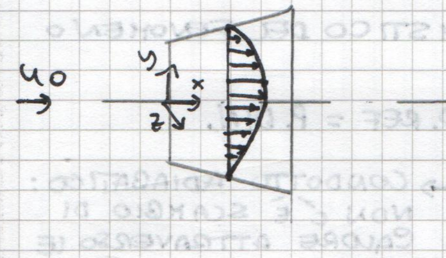


• ALTRA IPOTESI CHE CONSEGUE DA QUESTE CONSIDERAZIONI È CHE LE INCOGNITE (6) DIVENTANO (4):

$$(u, v, w, \rho, T, p) \longrightarrow (u, \rho, T, p)$$

DOVE: $\rho(x,y,z)$; $u(x,y,z)$, $T(x,y,z)$ E $p(x,y,z)$

ADESSO CONSIDERIAMO LO STESSO CONDOTTO:



SE CI FOSSE LO STRATO LIMITE LA VELOCITÀ POTREBBE VARIARE ANCHE SOLO CON COMPONENTE u CHE VARIA SIA IN X CHE IN $y \rightarrow u(x,y)$
CIÒ NON È ACCETTABILE DALLE IPOTESI POICHÉ CI SAREBBERO TERMINI VISCOSI; QUINDI u DIPENDE SOLO DA x: $u(x)$

SPOSTANDOCI LUNGO x OVVIAMENTE u PUÒ VARIARE DI INTENSITÀ.
LO STESSO DISCORSO SI ESTENDE A ρ, T E p:

$\rho(x)$; $u(x)$; $p(x)$ E $T(x)$

QUINDI AVREMO DI CONSEGUENZA CHE TUTTE LE DERIVATE DIVERRANNO:

$$\boxed{\frac{d\bullet}{dy} = \frac{d\bullet}{dz} = 0 \quad E \quad \frac{d\bullet}{dx} \neq 0}$$

SONO IPOTESI CHE SEMPLIFICANO MOLTO L'EQUAZIONE

L'OBIETTIVO È QUELLO DI INTEGRARE LE EQUAZIONI; VOGLIO UNA FORMA DEL TIPO:

$\frac{d}{dx}(\ldots) = 0$ (IN x POICHÉ LA VAR. INDIPENDENTE È X)

↓ INTEGRO

$(\ldots)$ = COSTANTE

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} \quad (2)$$

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \frac{dP}{dx} \quad (3)$$

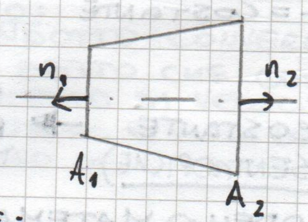
$$\frac{P}{\rho} = RT \quad \text{(GIÀ INTEGRATA)} \quad (4)$$

SCELGO VOLUME DI CONTROLLO CON VOLUME DEL CONDOTTO

(1) $\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \rightarrow \iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \xrightarrow[\text{COME IN IDRO}]{\text{RISOLTO}} \boxed{\rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 U_2}$

IN CUI $\iint_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{A_1} \rho_1 u_1\, dS = -\rho_1 u_1 A_1$

COSTANTI SU y E z



QUALUNQUE VOLUME DI CONTROLLO PRENDO NELLA SEZIONE:

$\boxed{\rho U A = \text{COSTANTE}}$ IN CUI $\rho \rightarrow \rho(x)$; $U \rightarrow u(x)$ E $A \rightarrow A(x)$

CONSERVAZIONE PORTATA IN MASSA

(2) NON RIESCO A SCRIVERE $\frac{d}{dx}(\dots) = 0$ DELLA Q.TÀ DI MOTO POICHÉ NON POSSO PORTARE LE VARIABILI ALL'INTERNO. CI SI TORNA DOPO.

(3) PRENDO ORA L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = u \frac{dP}{dx} \xrightarrow{\text{DALLA (2)}} \cancel{\rho} c_p \cancel{u} \frac{dT}{dx} = \cancel{u}\left(-\cancel{\rho} u \frac{du}{dx}\right) \rightarrow$ PORTO TUTTO AL PRIMO MEMBRO; E RISCRIVO COME:

$$\frac{d}{dx}(c_p T) + u\frac{du}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(c_p T) + \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(c_p T + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \rightarrow \boxed{c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE}}$$

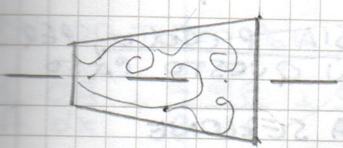
C'È TERMINE CHE ASSOMIGLIA AD ECKERT

QUINDI RISCRIVENDO IL SET DI EQUAZIONI:
L'EQ. DELLA Q.TÀ DI MOTO NON POSSO USARLA

$$\begin{cases} \rho U A = \text{COSTANTE} & \text{(EQ. MASSA)} \\ c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} & \text{(EQ. ENERGIA)} \\ \frac{P}{\rho} = RT & \text{(EQ. STATO)} \end{cases}$$

MANCA UNA EQUAZIONE

L'ULTIMA EQUAZIONE RIGUARDERÀ LA TRASFORMAZIONE CHE SUBISCE IL FLUSSO IN UN CONDOTTO.



AVREMO CHE ρ, P, T E u CAMBIANO MA CHE TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA SUBISCE IL FLUIDO?

PER DEFINIRE QUESTA TRASFORMAZIONE, RIPRENDIAMO EQ. ENERGIA IN F. ENTROPICA.

ARRIVANDO A QUESTO RISULTATO:

$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S$

SE ABBIAMO VARIAZIONE DI ENTROPIA NEL FLUIDO C'È → DISSIPAZIONE $\mu \Phi^2$ → ρq PRODUZIONE CALORE → $k \nabla^2 T$ SCAMBIO CALORE

MA CON LE NOSTRE IPOTESI VANNO VIA TUTTE E 3, DA CUI:

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0} \rightarrow S =$ COSTANTE LUNGO UNA LINEA DI FLUSSO

FLUSSO ISENTROPICO (NON LO STO IPOTIZZANDO MA È CONSEGUENZA DELLE IPOTESI!)

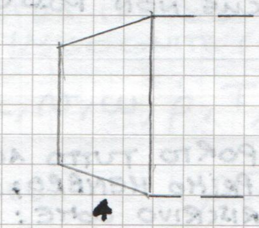
QUINDI IL SET DI EQUAZIONI SARÀ:
FLUSSI COMPRESSIBILI DEL MODELLO QUASI-UNIDIMENSIONALE

$$\begin{cases} \rho u A = \text{COSTANTE} \\ c_p T + \dfrac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} \\ \dfrac{p}{\rho} = RT \\ \dfrac{p}{\rho}\gamma = \text{COSTANTE} \quad (\text{ISENTROPICHE}) \end{cases}$$

→ CON ENTROPIA COSTANTE POSSO USARE UNA DELLE 3 RELAZIONI ENTROPICHE. MANIERA ALTERNATIVA PER SOSTITUIRE EQ. Q.TÀ DI MOTO.

QUESTO MODELLO MATEMATICO È DEFINITO QUASI-UNIDIMENSIONALE

È MODELLO MOLTO USATO NELLA GAS DINAMICA; POICHÈ C'È SOLO VARIABILE x, IL QUASI INDICA CHE L'AREA CAMBIA IN FUNZIONE DI x. SAREBBE UNIDIMENSIONALE CON CONDOTTO COSTANTE. DOVREMMO QUINDI CONSIDERARE ANCHE $A(x)$ COME VARIABILE OLTRE A p, ρ, T, u.



PRESA DINAMICA

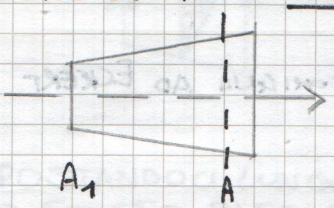
CONOSCENDO QUINDI Q.TÀ IN INGRESSO E LA GEOMETRIA POSSO CALCOLARE LA Q.TÀ IN USCITA CON QUESTO SET DI EQUAZIONI.

È APPROCCIO MOLTO USATO NELLA PROGETTAZIONE

IN GENERALE, PERÒ, LA VARIABILE CINEMATICA NON È MAI u MA IL NUMERO DI MACH (SEMPRE $M > 0{,}3$).

FLUIDODINAMICA 4 GIUGNO

ABBIAMO SCRITTO EQUAZIONI INTEGRALI IN CONDOTTI CON SEZIONE DEBOLMENTE VARIABILE CONSIDERANDO FLUSSI COMPRESSIBILI



IL DOMINIO È DEFINITO IN MANIERA ARBITRARIA (DA A_1 AD A)

NOI CONOSCIAMO p, ρ, T (ANCHE u) IN A_1 DA CUI ABBIAMO TROVATO UN SET DI EQUAZIONI:

MODELLO QUASI UNIDIMENSIONALE (QUASI → X VAR; → SEZIONE VARIABILE E NON COSTANTE)

$$\begin{cases} \rho U A = \text{COSTANTE} & (\text{EQ. MASSA O EQ. CONTINUITÀ}) \\ c_p T + \dfrac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} & (\text{EQ. ENERGIA IN TERMINI ENTALPICI}) \\ \dfrac{p}{\rho} = RT & (\text{EQ. DI STATO}) \\ \dfrac{p}{\rho}\gamma = \text{COSTANTE} & (\text{EQUAZIONE PER SOSTITUIRE EQUAZIONE DI Q.TÀ DI MOTO E FLUSSO ISOENTROPICO TRA SEZIONE } A_1 \text{ E } A) \end{cases}$$

→ ISENTROPICHE

SE CONOSCO COSTANTI E AREA INIZIALE, TROVO LE INCOGNITE

L'IPOTESI FONDAMENTALE È CHE LA VARIAZIONE DI AREA SIA PICCOLA, PER CUI LE VARIABILI SONO IN FUNZIONE DI UN SOLO ASSE, IN QUESTO CASO x E NON y O z.
FISSATO VALORE DI x, TUTTE LE Q.TÀ SONO NOTE IN TUTTA LA SEZIONE (CONOSCIAMO ANCHE $A(x)$ FISSANDO x).
L'AREA LA CONSIDERO COMUNQUE ASSEGNATA.

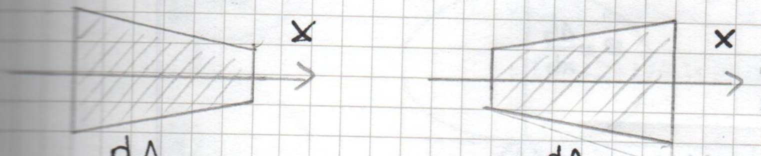
... NON IN $A(x)$. ... IN A_1 (QUINDI DIVENTANO COSTANTI)

SE HO $A(x)$ ASSEGNATO, ABBIAMO <u>4 INCOGNITE</u> PER <u>4 EQUAZIONI</u> (CHE POSSO QUINDI RISOLVERE).

DATO UN $A(x)$ $\xrightarrow{\text{E LE COSTANTI}}$ TROVO LE ALTRE VARIABILI (C_p, R E γ SONO "COSTANTI" — VARIANO POCO AL VAR. DI TEMP. — A MENO CHE NON EFFETTUIAMO APPLICAZIONI PARTICOLARI, ES. ΔT NON TROPPO ALTA).

PER CONTINUARE VOGLIO TIRARE FUORI IL <u>NUMERO DI MACH</u> DA QUESTE EQUAZIONI:

SI PARTE DA $\rho U A$ = COSTANTE. COSA SUCCEDE ALLE VARIABILI SE MODIFICO M?



$\frac{dA}{dx} < 0$ <u>CONDOTTO CONVERGENTE</u)

$\frac{dA}{dx} > 0$ <u>CONDOTTO DIVERGENTE</u>

<u>NON SI DEVE CONFONDERE LA GEOMETRIA CON IL COMPORTAMENTO FISICO DEL FLUSSO:</u>
UN CONDOTTO CONVERGENTE NON È DETTO CHE COMPORTI UN AUMENTO DI VELOCITÀ DEL FLUSSO. QUINDI LE VARIABILI NON POSSO DEDURLE A PRIORI.

NON VA QUINDI CONFUSA LA GEOMETRIA CON:
<u>CARATTERISTICA GEOMETRIA NON È CARATTERISTICA FISICA</u>

CONDOTTO CONVERGENTE $\frac{dA}{dx} < 0$ <u>NON È</u> UGELLO PROPULSIVO $\underbrace{\rho \downarrow \quad u \uparrow}_{}$ DA EQ. DIFF. Q.TÀ DI MOTO
- IN GENERE È PARTE FINALE CHE GENERA SPINTA IN UN MOTORE A REAZIONE; u CRESCE $\uparrow$, ρ DIMINUISCE $\downarrow$

COME AVVIENE IN IDRODINAMICA

CONDOTTO DIVERGENTE $\frac{dA}{dx} > 0$ <u>NON È</u> DIFFUSORE (O PRESA DINAMICA) $u \downarrow$ $\rho \uparrow$
- FLUIDO RALLENTA; u DIMINUISCE $\downarrow$ ρ AUMENTA $\uparrow$
GENERA u PIÙ BASSA.

SE RIPRENDIAMO <u>EQ. DIFFERENZIALE DELLA Q.TÀ DI MOTO</u>:
EQUAZIONE CHE NON SIAMO RIUSCITI A SEMPLIFICARE IN PIÙ;

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

SE CRESCE UNO, DIMINUISCE L'ALTRO

QUINDI È TOTALMENTE DIVERSO DALL'IDRODINAMICA.

ANALIZZIAMO <u>EQ. DI CONTINUITÀ</u> IN CUI C'È <u>INFORMAZIONE SULLA GEOMETRIA</u>.
VOGLIAMO <u>COMBINARE GEOMETRIA CON VELOCITÀ</u>.

$\underset{\text{GEOMETRIA}}{\frac{dA}{dx}} \longleftrightarrow \underset{\text{FISICA}}{\frac{du}{dx}}$ VOGLIO COMBINARE QUESTE DUE DERIVATE

DERIVO IN x $\longrightarrow$ $\rho U A$ = COSTANTE
QUINDI:

LEGAME GEOMETRIA - FISICA
DERIVAZIONE $\rho U A$

$$\rho U \frac{dA}{dx} + \rho A \frac{du}{dx} + u A \frac{d\rho}{dx} = \overset{d(\text{COSTANTE})}{0}$$

DIVIDO TUTTO PER $\rho U A$:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

L'ELEMENTO CHE DEVO MANIPOLARE È $\frac{d\rho}{dx}$ PERCHÈ GLI ALTRI LI HO TROVATI.

UTILIZZO QUINDI L'EQ. DI Q.TÀ DI MOTO - MA DEVO EFFETTUARE UN DOPPIO PASSO

$\boxed{p \xrightarrow[C_0^2]{} \rho \xrightarrow[\text{E.Q.M.}]{} u}$ PASSAGGI TRA RELAZIONI DIFFERENZIALI

USO $C_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S$ VELOCITÀ DEL SUONO

$S \longrightarrow$ ENTROPIA È COSTANTE (FLUSSO ISENTROPICO)

QUINDI RISCRIVO:

$$\partial \rho \, C_0^2 = \partial p$$

ALLORA DERIVO PER X:

$$\frac{d\rho}{dx} \cdot C_0^2 = \frac{dp}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{C_0^2} \frac{dp}{dx}$$

ALLORA DA EQUAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{C_0^2} \cdot \frac{dp}{dx} = -\rho u \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{dx} C_0^2 = -\rho u \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = -\frac{u}{C_0^2}\frac{du}{dx}$$

HO TROVATO $1/\rho \cdot d\rho/dx$ QUINDI SOSTITUISCO IL RISULTATO NELLO SVILUPPO FATTO PRIMA DI $\rho U A$:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = -\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{u}{C_0^2}\frac{du}{dx}$$

IN CUI ABBIAMO SPOSTATO I TERMINI DIVERSO DA A AL SECONDO MEMBRO

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\left(\frac{u^2}{C_0^2} - 1\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\left(M^2 - 1\right)}$$

RELAZIONE FONDAMENTALE A E U CON M

CIÒ CHE DEFINISCE FLUSSO COMPRIMIBILE È $M > 1$ (FLUSSI SUPERSONICI) O $M < 1$ (FLUSSI SUBSONICI)

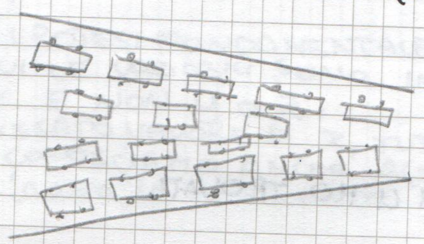
FLUSSI SONICI $\longrightarrow M = 1$

A SECONDA SE $M>1$ O $M<1$ CAMBIA IL SEGNO DELLA DERIVATA, POICHÉ du/dx CAMBIA SEGNO A SECONDA DEL VALORE DI (M^2-1).

	$M < 1$	$M > 1$
$\frac{dA}{dx} < 0$ CONVERG.	CONCORDI $\frac{du}{dx} > 0$ UGELLO PROPULSIVO	DISCORDI $\frac{du}{dx} < 0$ DIFFUSORE
$\frac{dA}{dx} > 0$ DIVERG.	DISCORDI $\frac{du}{dx} < 0$ DIFFUSORE	CONCORDI $\frac{du}{dx} > 0$ UGELLO PROPULSIVO
	FLUSSO QUASI INCOMPR. CON COMPORT. TIPICO	COMPORTAMENTO DIVERSO DA QUELLO TIPICO

NEL CASO DI $M > 1$ (FLUSSI SUPERSONICI) ESSENDO $\rho U A = \text{COST}$, AD UN AUMENTO DI U E VARIAZIONI DI A CORRISPONDE UNA COMPENSAZIONE DELLA DENSITÀ

ESEMPIO PRATICO DI QUESTO COMPORTAMENTO ATIPICO:



MACCHINE IN STRETTOIA. È COMPORTAMENTO DI FLUIDI INCOMPRIMIBILI O IN GENERALE DI LIQUIDI

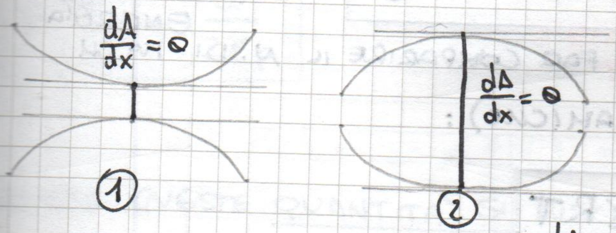
TRAFFICO IN STRETTOIA

PASSO PRENDIAMO ORA IL CASO DI $M = 1$, AVREMO:

$M = 1$ QUANDO $\boxed{\frac{dA}{dx} = 0}$ (INFATTI $\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dx} = -\frac{1}{u} \frac{du}{dx} (M^2 - 1)$
SI ANNULLA CON $M = 1$

CI SONO DUE CASI IN CUI $dA/dx = 0 \leftrightarrow M = 1$

- CONDOTTO COSTANTE (QUINDI AVREMO $M = 1$ IN TUTTO IL CONDOTTO)
- QUANDO AREA È A MINIMO O MASSIMO:



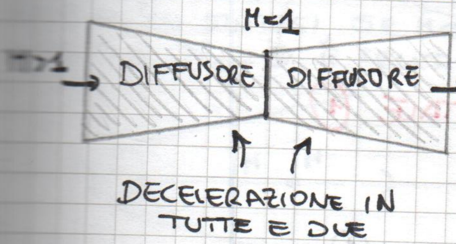
IL (2) È RARAMENTE USATO (MATEM. CORRETTO)
IL (1) È QUELLO INGEGNERISTICAMENTE PIÙ UTILE

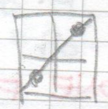
QUINDI SOLO NELLE SEZIONI $\frac{dA}{dx} = 0$ HO $M = 1$, ALTROVE NO!

L'AREA MINIMA (1) SI CHIAMA GOLA. (THROAT)

OVVIAMENTE NON SIGNIFICA CHE SE HO UNA GOLA ALLORA AVRÒ PER FORZA $M = 1$:
SE IMPONGO FLUSSO E PER QUALCHE MOTIVO HO $M = 1$ ALLORA SARÀ SITUATO NELLA GOLA PER DEFINIZIONE.

CI SONO SITUAZIONI IN CUI SI DEVE PASSARE DA $M > 1$ A $M < 1$ O VICEVERSA.
SE PASSO DA $M < 1$ A $M > 1$ O DA $M > 1$ A $M < 1$ AVRÒ PER FORZA UN $M = 1$ DA QUALCHE PARTE.

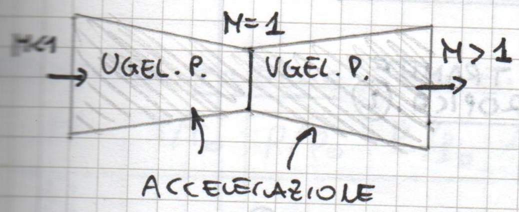


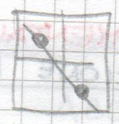


(GUARDA LA TABELLA)

PASSAGGIO TRA MACH

CONVERGENTE - DIVERGENTE



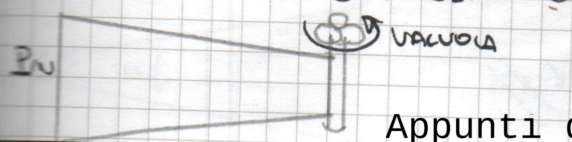


LA CONDIZIONE $M = 1$ CORRISPONDE A MASSIMA PORTATA SMALTITA IN UN CONDOTTO:

$\boxed{Q_{max} \Rightarrow M = 1}$ DA DEFINIZIONE

$M = 1$ LIMITA LA PORTATA IN CONDOTTO (CONDIZIONE DI CHOCKING)
SOFFOCAMENTO

PIÙ DI TOT. MASSA NON PUÒ PASSARE, ESEMPIO:
PENSIAMO A CONDOTTO SOLO CONVERGENTE O SOLO DIVERGENTE;
IL FLUSSO È ACCELERATO (CONV.) GRADUALMENTE DALL'APERTURA DI UNA VALVOLA CHE REGOLA LA PRESSIONE IN USCITA. SE UN SERBATOIO FISSA P_{IN}, LA VALVOLA AUMENTA LA DIFF. DI PRESSIONE, AUMENTANDO LA VELOCITÀ DEL FLUSSO.
CONTINUANDO AD APRIRE LA VALVOLA, ACCELERANDO SI ARRIVA A $M = 1$ NELLA SEZIONE MINIMA, MA SE CONTINUO AD ACCELERARE NON AVVIENE NULLA.
$M = 1 \rightarrow$ PORTATA È MASSIMA E SEMPRE QUELLA.



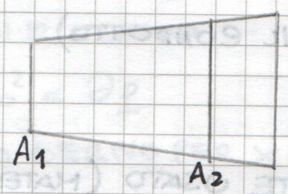
SOLO AUMENTANDO SEZIONE HO MACH DIVERSO
(DOPO CONV. → CI VUOLE DIVERG.)

VOGLIO ORA LEGARE P, T A M :

$P \to M$, $T \to M$ E $\rho \to M$ STESSO DISCORSO PER LE ALTRE VARIABILI

RITORNO A EQUAZIONI INTEGRALI (L'EQ. DI PRIMA NON RIESCO AD INTEGR.):

RIPARTO DA EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA:



EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA TRA A_1 E A_2

$$\boxed{c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}}$$

HO CONSIDERATO V. CONTROLLO SU EQUAZIONE DI ENERGIA

DEVO CERCARE DI FAR COMPARIRE IL N. DI MACH

RICORDANDOCI CHE (RELAZIONI TERMODINAMICHE):

$$\boxed{c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}} \quad E \quad \boxed{u^2 = M^2 c_0^2 = M^2 \gamma R T}$$

SOSTITUENDO:

$$\frac{\gamma R T_1}{(\gamma-1)} + \frac{M_1^2 \gamma R T_1}{2} = \frac{\gamma R T_2}{(\gamma-1)} + \frac{M_2^2 \gamma R T_2}{2}$$

MOLTIPLICO PER $(\gamma - 1)$ E METTO IN EVIDENZA T_1 E T_2 :

$$T_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) = T_2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)$$

DA CUI:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}$$

$\frac{T_2}{T_1}$ RELAZIONE FONDAMENTALE 1

PER TROVARE LE ALTRE USO LE RELAZIONI ISENTROPICHE: 1

DA QUI:

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

RELAZIONE FONDAMENTALE 2 TRAMITE APPLICAZIONE DI RELAZIONE ISENTROPICA.

E INSERENDO NELL'EQUAZIONE DI STATO $\to$

$\frac{P_2}{P_1}(M_2, M_1) \longrightarrow$ TROVO $\frac{\rho_2}{\rho_1}$

IN GENERALE:

RELAZIONE FONDAMENTALE 3

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = H(M_1, M_2)}$$

IN CUI H È CERTA QUANTITÀ f DI M_1 E M_2

SPESSO NEI CONDOTTI CI SONO CONDIZIONI IN CUI $u = 0$, OSSIA CONDIZIONI DI RISTAGNO E SI INDICANO CON PEDICE ZERO (0).

$T_0, P_0, \rho_0 \longrightarrow$ LO 0 STA PER $M = 0$

IN ALTRI TESTI SI TROVA CON PEDICE t:

$T_t, P_t, \rho_t \longrightarrow t$ PER "TOTALE"

L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA DIVENTA:

$$\boxed{c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} = H_0}$$

CONDIZIONE DI RISTAGNO

ENTALPIA TOTALE

IN CONDIZ. DI RISTAGNO QUINDI $u = 0$ — IN SEZIONE GENERICA

SE DIVIDO TUTTO PER c_p:

$$\boxed{T_0 = T + \frac{u^2}{2 c_p}}$$

TEMPERATURA DI RISTAGNO O TEMPERATURA TOTALE

IN GENERE QUESTE QUANTITÀ SI RISCRIVONO CON:

$A_1 \rightarrow$ SEZIONE DI RISTAGNO: T_0, p_0, ρ_0 $(M_1 = 0)$

$A_2 \rightarrow$ SEZIONE GENERICA CON:

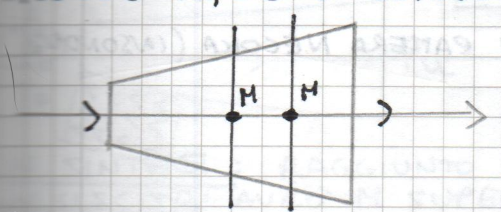
QUINDI NON PARLIAMO PIÙ DI SEZIONE DI INGRESSO E SEZIONE DI USCITA MA SEZ. A_1 CON $M_1 = 0$ E SEZ. A_2 CON M_2 = GENERICO

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}} \rightarrow \frac{T}{T_0}(M) \text{ È FUNZIONE DI MACH}$$

E TRAMITE RELAZIONI ISENTROPICHE:

$\frac{p}{p_0}(M)$ E $\frac{\rho}{\rho_0}(M)$ $\leftarrow$ LI TROVO CON $M_1 = 0$ E M_2 = GENERICO

QUINDI, IN SINTESI, SE HO UN CERTO M, CON QUESTE RELAZIONI TROVO ρ, T E p AVENDO $M_1 = 0$ E RELATIVE T_0, p_0 E ρ_0.



ESISTONO TABELLE (VEDI DISPENSE) CON TUTTI I VALORI DI QUESTE VARIABILI:

M	T/T_0	ρ/ρ_0	p/p_0	A_2/A_1
0,1				
0,2				
0,3				
0,4				
0,5				

ABBIAMO NELLA TABELLA ANCHE L'INFORMAZIONE SU A(x):

POSSO TROVARE A_2/A_1 IN F. DI (M_1, M_2)

BASTA UTILIZZARE EQ. MASSA:

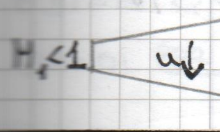
INFATTI: $\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2 \rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 U_1}{\rho_2 U_2}$ E RICORDANDO CHE:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{c_1 M_1}{c_2 M_2} = \frac{\sqrt{\gamma R T_1} \cdot M_1}{\sqrt{\gamma R T_2} \cdot M_2}$$

(RITORNO T_1/T_2 E M_1/M_2) QUINDI: $\rightarrow \boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1 \sqrt{\gamma R T_1}}{\rho_2 \sqrt{\gamma R T_2}} \cdot \frac{M_1}{M_2}}$

$\frac{A_2}{A_1}(M_1, M_2)$ HO USATO L'EQ. MASSA PER GIUNGERE A QUESTO RISULTATO (3)

• È OVVIO CHE IL CASO $M_1 = 0$ NON POSSO INSERIRLO NEL RAPPORTO A_2/A_1, ALTRIMENTI DOVREI AVERE AREA INFINITA!



$\cancel{A_2 = A_1 \frac{c_1 M_1}{c_2 M_2} \rightarrow A_2 = \infty \text{ SE } M_1 = 0}$

A_1 QUINDI SAREBBE $A_1 = \infty$ X

QUANDO RAGIONO SULLE AREE $\frac{A_2}{A_1}$ DEVO ASSUMERE $M_1 = 1$ IN A_1

GENERICAMENTE CHIAMATA $A^* = A_1$ SEZIONE MINIMA

MENTRE A_2 RIMANE GENERICA.

$$\frac{A}{A^*}(M, M_1 = 1) \longrightarrow \frac{A}{A^*}(M)$$

QUINDI IL RAPPORTO È FUNZIONE DI SOLO M GENERICO E NON DI M_1.
QUINDI SOLO NEL RAPPORTO TRA LE AREE AVREMO $M = 1$ MENTRE GLI ALTRI RAPPORTI NO.

NELLE TABELLE CI SONO ALTRE DUE COLONNE ($M^* \neq 1 \rightarrow$ È M PARTICOLARE E UN'ALTRA ANCORA).

$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow$ EQ. ENERGIA ; $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow$ ISENTROPICHE ; $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow$ EQ. STATO ; $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow$ EQ. MASSA

LEZIONE FLUIDODINAMICA 9 GIUGNO

ABBIAMO VISTO LE TABELLE RELATIVE A FLUSSI ISENTROPICI COMPRESSIBILI, SVILUPPATE DURANTE GLI ANNI '40 E '50.

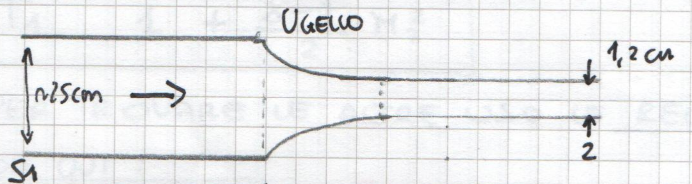
LE INFORMAZIONI SULLE TABELLE SONO: $\frac{p}{p_0}(M)$, $\frac{\rho}{\rho_0}(M)$; $\frac{T}{T_0}(M)$

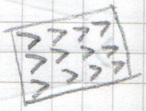
L'<u>INPUT</u> CHE INSERIAMO È IL N. DI MACH $M \longrightarrow$ TROVO QUESTI RAPPORTI

NEL CASO DI $M_1 = 0$ SI PARLA DI p_0, T_0 E ρ_0 (0 CON PEDICE t)

INVECE DI PARLARE DI $M_1 = 0$ $\rightarrow$ POSSIAMO DIRE $\boxed{M^2 \ll 1}$

ES. LABORATORIO FLUIDODINAMICA ROMA3, POSIZIONATO IN CAMERA ANECOICA (INSONORIZ.)





CONOSCIAMO $A(x)$ E MISURIAMO T O p IN USCITA (SEZIONE 2) E TROVIAMO T_0 E p_0 IN S_1.
ABBIAMO UN $M \sim 0,01$ IN INGRESSO MENTRE IN USCITA $M \sim 0,8$
QUINDI IL FLUSSO CHE ARRIVA È A VELOCITÀ BASSA MENTRE IN USCITA AUMENTA.
HO PERTANTO UNA CONDIZIONE DI RISTAGNO IN INGRESSO.
POSSO ASSUMERE, PER TALE MOTIVO ($M \sim 0,01$ E RISTAGNO) CHE $M_1 = 0$.
POSSO TROVARE ALLORA:

$$\frac{T}{T_0} \quad \text{O} \quad \frac{p}{p_0} \quad \text{USANDO LE TABELLE}$$

ALTRA INFORMAZIONE CHE TROVIAMO NELLE TABELLE È INFO GEOMETRICA:

$\frac{A_2}{A_1} \longrightarrow$ NON POSSO RIFERIRMI A CONDIZIONE DI RISTAGNO POICHÉ SE $M_1 = 0 \rightarrow A_2 = \infty$

QUINDI CI PONIAMO NEL CASO $M_1 = 1$ DA CUI:

$A_1 = A^*(M = 1)$ <u>CONDIZIONE DI CHOCKING</u>

I VARI RAPPORTI LI ABBIAMO TROVATI TRAMITE <u>SET DI EQUAZIONI</u> (SOTTO IPOTE

<u>EQ. ENERGIA</u>

- $c_pT + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} \longrightarrow \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \xrightarrow[\text{CONDIZIONI DI RISTAGNO}]{\text{TRAMITE}} \frac{T}{T_0}(M) \xrightarrow[\text{RELAZIONI ISENTROPICHE}]{\text{APPLICO}} \frac{p}{p_0}(M) \text{ E } \frac{\rho}{\rho_0}(M)$

A_1 QUINDI SAREBBE $A_1 = \infty$ X

QUANDO RAGIONO SULLE AREE $\frac{A_2}{A_1}$ DEVO ASSUMERE $M_1 = 1$ IN A_1

GENERICAMENTE CHIAMATA $A^* = A_1$ SEZIONE MINIMA

MENTRE A_2 RIMANE GENERICA.

$$\frac{A}{A^*}(M, M_1 = 1) \rightarrow \frac{A}{A^*}(M)$$

QUINDI IL RAPPORTO È FUNZIONE DI SOLO M GENERICO E NON DI M_1.
QUINDI SOLO NEL RAPPORTO TRA LE AREE AVREMO $M = 1$ MENTRE GLI ALTRI RAPPORTI NO.

NELLE TABELLE CI SONO ALTRE DUE COLONNE ($M^* \neq 1 \rightarrow$ È M PARTICOLARE E UN'ALTRA ANCORA).

$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow$ EQ. ENERGIA ; $\frac{p_2}{p_1} \rightarrow$ ISENTROPICHE ; $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow$ EQ. STATO ; $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow$ EQ. MASSA

LEZIONE FLUIDODINAMICA 9 GIUGNO

ABBIAMO VISTO LE TABELLE RELATIVE A FLUSSI ISENTROPICI COMPRESSIBILI, SVILUPPATE DURANTE GLI ANNI '40 E '50.

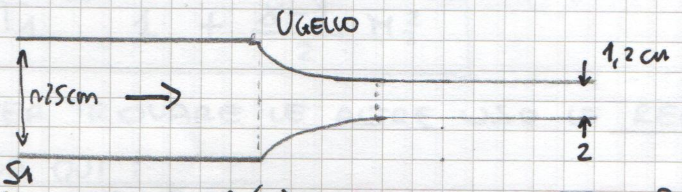
LE INFORMAZIONI SULLE TABELLE SONO: $\frac{p}{p_0}(M)$, $\frac{\rho}{\rho_0}(M)$; $\frac{T}{T_0}(M)$

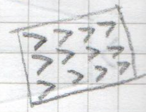
L'INPUT CHE INSERIAMO È IL N. DI MACH $M \rightarrow$ TROVO QUESTI RAPPORTI

NEL CASO DI $M_1 = 0$ SI PARLA DI p_0, T_0 E ρ_0 (0 CON PEDICE ⟨)

INVECE DI PARLARE DI $M_1 = 0$ $\rightarrow$ POSSIAMO DIRE $\boxed{M^2 \ll 1}$

ES. LABORATORIO FLUIDODINAMICA ROMA3, POSIZIONATO IN CAMERA NECOICA (INSONORIZ.





CONOSCIAMO A(x) E MISURIAMO T_0 p IN USCITA (SEZIONE 2) E TROVIAMO T_0 E p_0 IN S_1.
ABBIAMO UN $M \sim 0,01$ IN INGRESSO MENTRE IN USCITA $M \sim 0,8$
QUINDI IL FLUSSO CHE ARRIVA È A VELOCITÀ BASSA MENTRE IN USCITA AUMENTA.
HO PERTANTO UNA CONDIZIONE DI RISTAGNO IN INGRESSO.
POSSO ASSUMERE, PER TALE MOTIVO ($M \sim 0,01$ E RISTAGNO) CHE $M_1 = 0$.
POSSO TROVARE ALLORA:

$\frac{T}{T_0}$ O $\frac{p}{p_0}$ USANDO LE TABELLE

ALTRA INFORMAZIONE CHE TROVIAMO NELLE TABELLE È INFO GEOMETRICA:

$\frac{A_2}{A_1} \rightarrow$ NON POSSO RIFERIRMI A CONDIZIONE DI RISTAGNO POICHÉ SE $M_1 = 0 \rightarrow A_2 = \infty$

QUINDI CI PONIAMO NEL CASO $M_1 = 1$ DA CUI:

$A_1 = A^*(M = 1)$ CONDIZIONE DI CHOCKING

I VARI RAPPORTI LI ABBIAMO TROVATI TRAMITE SET DI EQUAZIONI (SOTTO IPOT

EQ. ENERGIA

• $c_pT + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} \rightarrow \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \xrightarrow[\text{CONDIZIONI DI RISTAGNO}]{\text{TRAMITE}} \frac{T}{T_0}(M) \xrightarrow[\text{RELAZIONI ISENTROPICHE}]{\text{APPLICO}} \frac{p}{p_0}(M)$ E $\frac{\rho}{\rho_0}(M)$

EQ. MASSA

NON POSSO APPLICARE C. RISTAGNO MA $M_1 = 0$ (SEZ. MINIMA)

$\rho U A = \text{COSTANTE} \rightarrow \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \xrightarrow{\text{C. RISTAGNO}} \frac{A}{A^*}(M)$

ASSEGNATA UN' ARE A $\rightarrow \frac{A}{A^*}$ È LEGGE NON LINEARE ←

INFATTI OTTENGO 2 SOLUZIONI:

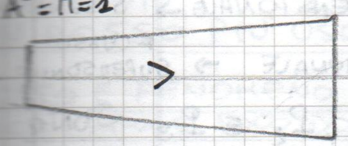
$\frac{A}{A^*}$ → $M^I > 1$ SUPERSONICO
→ $M^{II} < 1$ SUBSONICO

ESEMPIO:

$\frac{A}{A^*} = 2$ → $M^I = 0,2$; $M^{II} = 2,2$

QUESTO INDICA IL FATTO CHE DATA SEZIONE GENERICA, NON CONOSCO LA STORIA DEL FLUSSO. NON SAPPIAMO QUALE È LA GEOMETRIA DEL CONDOTTO. SE IL FLUSSO È PASSATO DA SUBSONICO A SUPERSONICO AVRÒ SEZIONE A^* CON CONDIZIONE CRITICA

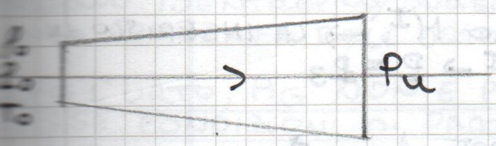
$A^* = M = 1$



CONSIDERIAMO $A^* (= A_1)$ QUINDI $M = 1$

- SE È DIFFUSORE SUBSONICO $\rightarrow M^I = 0,2$
- SE È UGELLO PROP. ... SUPERSONICO $\rightarrow M^{II} = 2,2$

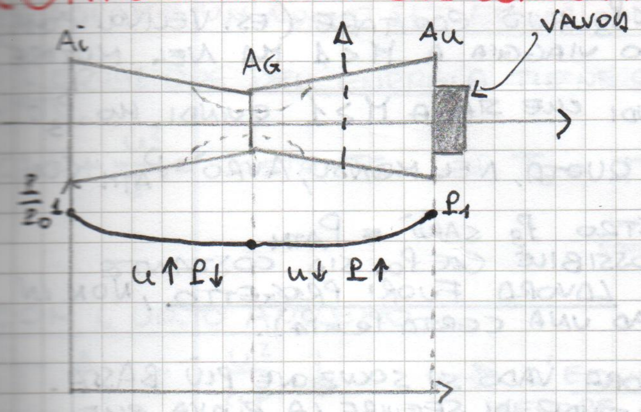
SE HO UN SERBATOIO (TUBO/CONDOTTO/SERBATOIO) CON p_0, T_0, ρ_0 A SECONDA DELLA PRESSIONE IN USCITA AVRÒ M^I O M^{II}



- SE p_u È BASSO → $u \uparrow$ SUPERSONICO
- SE p_u È ALTA → $u \downarrow$ SUBSONICO

IN SINTESI: RAGGIUNTO $M = 1$ → A SECONDA DI PRESSIONE CHE IMPONGO IN USCITA AVRÒ M SUPERSONICO O SUBSONICO → SCELGO QUINDI UNA DELLE 2 SOLUZIONI

COMPORTAMENTO DEL CONDOTTO AL VARIARE DI p_u



CONSIDERO VALVOLA: QUANDO LA APRO ABBASSO LA PRESSIONE IN USCITA. HO INOLTRE CONDOTTO CONV-DIV. COSÌ DA AVERE $M = 1$ IN $dA/dx = 0$ OSSIA IN GOLA.

- PRENDIAMO IN ANALISI SITUAZIONE SUBSONICA SIAMO INIZIALMENTE CON FLUSSO IN QUIETE. APRO PIANO PIANO LA VALVOLA → SIAMO SEMPRE IN SITUAZIONE INCOMPRIMIBILE

NON È DETTO CHE HO $M = 1$! DIPENDE DA p_u!

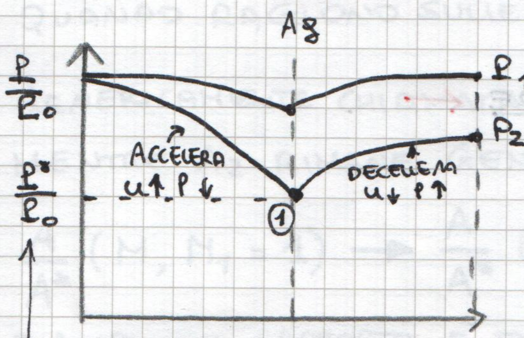
SE CONOSCO A, DATA CONDIZIONE $\frac{p}{p_0}$, QUALE p O M HO IN A GENERICO? DEVO FARE QUESTA CONSIDERAZIONE:

$\frac{A(x)}{A_G} \rightarrow A_G \neq A^*$ NON È DETTO CHE MI TROVI IN $M = 1$ IN A_g IN GENERALE HO $M \neq 1$

ESISTE QUINDI UNA GOLA VIRTUALE CHE CORRISPONDE AD A^*.

QUINDI PER ENTRARE NELLE TABELLE DEVO PRIMA TROVARE $A_g = A^* \rightarrow M = 1$

A^* PUÒ NON ESSERE L'AREA DI GOLA, PUÒ ESSERCI ALTRA AREA DI GOLA CON $M \neq 1$.



È TUTTA ZONA SUBSONICA TRANNE UN PUNTO IN ① CUI HO $\underline{M=1}$

- PRENDIAMO UN ALTRO CASO: FLUSSO ACCELERA (APRO VALVOLA) FINO A RAGGIUNGERE $M=1$

IN QUESTO CASO $A_G = A^*$ QUINDI CON $P_u = P_2$

$\Downarrow$

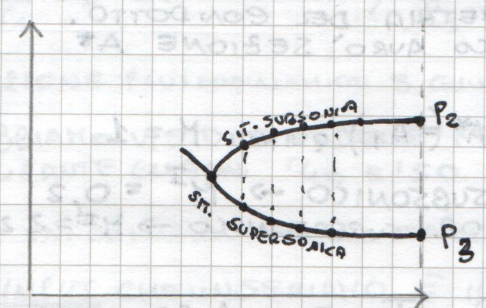
È UNICA SITUAZIONE IN CUI A_G CORRISPONDE CON DIAMETRO AD A^*.

IL PROBLEMA È CHE TRA P_1 E P_2 HO SITUAZIONI INTERMEDIE.

P^* SI METTE ASTERISCO SE RIFERITO A $M=1$

TRA P_1 E P_2 NON POSSO USARE LE TABELLE.

SE A_G È IN CHOCKING $\rightarrow$ ENTRO NELLE TABELLE CON $\frac{A}{A^*}$ $\rightarrow$ TROVO ρ, T, P $\rightarrow$ CON CUI TROVO N. MACH $\nearrow M^{I}$ $\searrow M^{II}$



SOLO CON P_3 PIÙ BASSA HO M^{II}.

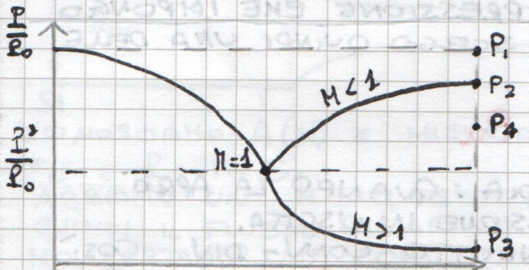
- P_2 SOLUZIONE QUASI-UNIDIMENSIONALE $\rightarrow$ FLUSSO SUBSONICO M^{I}
- P_3 SOLUZIONE QUASI-UNIDIMENSIONALE $\rightarrow$ FLUSSO SUPERSONICO M^{II}

È IMPORTANTE RICORDARE CHE P_1, P_2 E P_3 SONO ASSEGNATI CON VALVOLA.

ES. PER TROVARE P_2:

$\frac{A_u}{A^*}$ $\rightarrow$ ENTRO IN TABELLE E TROVO 2 SOLUZIONI $\rightarrow$ SCELGO M^{I} $\rightarrow$ LA INSERISCO IN $P/P_0(M)$ E TROVO P (CIOÈ P_2). SE SCEGLIESSI $M^{II} \rightarrow P = P_3$

ORA RIPRENDIAMO IL CASO DI SOPRA IN CUI HO SEMPRE $A_G = A^*$



(SI RICORDA CHE SE NON HO $M=1$, CIOÈ HO $M \neq 1$ AVREI $A_G \neq A^*$ DA CUI NON HO DUE SOLUZIONI MA SOLO 1!)

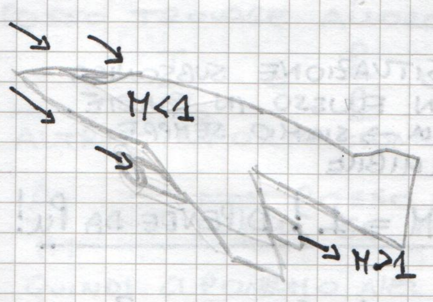
SE HO $P_2 < P_4 < P_3$ PUÒ CAPITARE (ES. VELIVOLI COMM.) IN CUI IL VELIVOLO VIAGGIA A $M<1$ MA NEL MOTORE ABBIAMO $M>1$.

IMMAGINIAMO QUINDI CHE SIA A $M>1$ QUINDI HO P_3:

A SECONDA DELLA QUOTA, NEL MONDO, AVRÒ P_{ATM} CON VALORI DIVERSI.

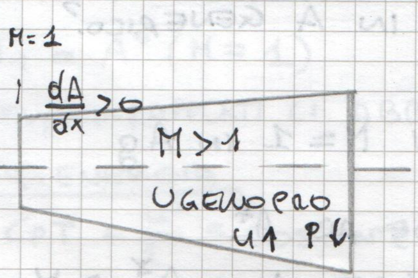
OVVIAMENTE IL NOSTRO P_3 SARÀ $= P_{ATM}$

NEI VIAGGI È IMPOSSIBILE CHE P_a SIA COSTANTE QUINDI IL MOTORE LAVORA FUORI PROGETTO, NON IN P_3 MA ES. IN P_4 (AD UNA CERTA $P_a = P_4$).



SE $P_4 < P_2$ $\rightarrow$ ALLORA VADO SU SOLUZIONE PIÙ BASSA. STO QUINDI SCEGLIENDO DI SEGUIRE LA CURVA CHE PORTA A P_3 OSSIA A MACH SUPERSONICO ($M>1$): MA CON QUESTA CURVA NON ARRIVO A P_4: MA DEVO RALLENTARE.

IL RALLENTAMENTO PERÒ AVVIENE IN DIVERGENTE:



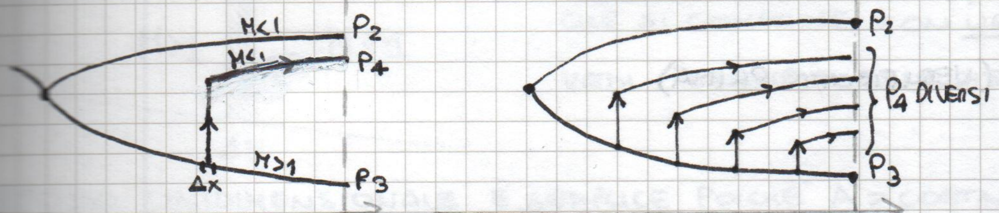
SE HO DIV: $\frac{dA}{dx} > 0$ E $M \gtrless 1$ HO UN UGELLO PRO. $du/dx > 0$

QUINDI NON PUÒ RALLENTARE.

DEVE QUINDI VERIFICARSI UN URTO

Appunti di Davide Antonio Mautone

L'URTO È UN FENOMENO IN CUI LA PRESSIONE P SALE MOLTO E FLUSSO DA SUPERSONICO $M>1$ DIVENTA SUBSONICO $M<1$ (es. DA $M=3$ SI PASSA A $M=0,5$). NON È FENOMENO ISENTROPICO. DOPO URTO IL FLUSSO RALLENTA, RAGGIUNGENDO P_4 (PRESSIONE PIÙ ELEVATA) QUINDI IL FLUSSO DEVE NECESSARIAMENTE COMPRIMERSI.



NELLO SPAZIO Δx SI HA CHE u PASSA DA (es.) 500 m/s A 70 m/s. IL GRADIENTE DI VELOCITÀ CAMBIA ENORMEMENTE

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_s} = \vec{\nabla}\vec{u}$$

SE $\vec{\nabla}\vec{u}$ VARIA → EFFETTI VISCOSI NON SONO TRASCURABILI → NON POSSO PIÙ CONSIDERARE FLUSSO ISENTROPICO

→ LA 4° EQUAZIONE DEL SET DEL M. QUASI-UNID. $\boxed{\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{COSTANTE}}$ NON LA POSSO PIÙ USARE

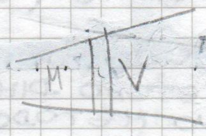
TOGLIENDO UNA EQUAZIONE HO 4 INCOGNITE IN 3 EQUAZIONI → NON RISOLVIBILE

L'URTO È FENOMENO DISSIPATIVO, IN CUI CADE QUINDI LA TRASCURABILITÀ DEGLI EFFETTI VISCOSI. LE RELAZIONI ISENTROPICHE CON CUI TROVIAMO LA 4° EQ. NON VALGONO PIÙ.
NON POSSO PIÙ USARE METODO QUASI-UNIDIMENSIONALE.

L'URTO È FENOMENO MOLTO CONCENTRATO (QUALCHE DECINA DI MICRON), PERTANTO POCO PRIMA E POCO DOPO IL Δx HO DI NUOVO MODELLO QUASI-UNIDIMENSIONALE (QUINDI MODELLO ISENTROPICO)

NON DEVO USARE UN NUOVO METODO PER TUTTO IL CONDOTTO MA SOLO PER UN Δx. DA INGRESSO A POCO PRIMA DELL'URTO E DA POCO DOPO L'URTO A USCITA HO MODELLO ISENTROPICO/QUASI-UNIDIMENSIONALE. LA SOLUZIONE CHE TROVEREMMO CON LA PRESENZA DELL'URTO TRAMITE MODELLO QUASI-UNID. NON È CORRETTA.

DOPO L'URTO, A_G NON È PIÙ A^* → È COME SE AVESSI CONDOTTO CON DIVERSE CONDIZIONI DI PARTENZA: P_0 (o P_T) A VALLE DELL'URTO ≠ A MONTE DELL'URTO.
AVREMO QUINDI $\boxed{P_{0V}, \rho_{0V}, T_{0V} \text{ E } P_{0M}, \rho_{0M} \text{ E } T_{0M}}$ CHE SONO DIVERSI TRA LORO.
È COME SE CAMBIASSI IL SERBATOIO.



POICHÉ È FENOMENO DISSIPATIVO AVRÒ CARICO DIVERSO

CERCHIAMO UN NUOVO SET. EQUAZIONI PER IL NUOVO METODO:

L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA TIENE CONTO DEL RALLENTAMENTO O DELLA COMPRESSIONE URTO.

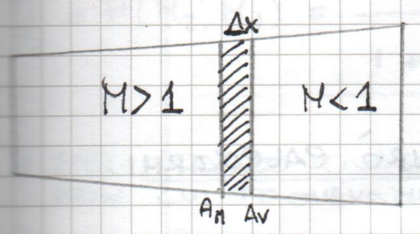
$$c_p T + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} \rightarrow T_0 = \underbrace{T}_{\text{STATICA}} + \underbrace{\frac{u^2}{2c_p}}_{\text{DINAMICA}} = \text{COSTANTE}$$

AVRÒ $T=T_0$ QUANDO IL FLUSSO È FERMO, QUANDO SI MUOVE LA SOMMA SARÀ COMUNQUE COSTANTE: $T_{STAT}\downarrow$ $T.DIN\uparrow$

CON L'URTO AVREMO:

$\underbrace{T\uparrow}_{\text{STATICA}}$ E $\underbrace{\frac{u^2}{2c_p}\downarrow}_{\text{DINAMICA}}$ → L'EQUAZIONE CONTINUA A VALERE MENTRE LA P_0 (o P_T) VARIA → T_0 (o T_T) SI CONSERVA

MODELLO UNIDIMENSIONALE



PRENDIAMO SITUAZIONE CON URTO (SOLO CON $M>1$) CHE MI PORTA A P_U GIUSTA.

$A_M \sim A_V \rightarrow \Delta x$ MOLTO PICCOLO

IL NUOVO SET DI EQUAZIONI SARÀ COMPOSTO DA EQUAZ. SIMILI:

1. EQ. MASSA

$A = \text{costante}$ $(A_M \simeq A_V)$ $\rightarrow$ $\boxed{\rho U = \text{costante}}$

PER TALE MOTIVO SI PASSA DA QUASI UNIDIM. → UNIDIMENSIONALE

2. EQ. ENERGIA

$c_pT + \frac{u^2}{2} = \text{costante}$ (VERIFICATA PRIMA)

3. EQ. STATO

$\frac{P}{\rho} = RT$ POICHÉ PARLIAMO DI GAS PERFETTI

4. 4° EQUAZIONE

È EQUAZIONE CHE DEVO TROVARE: RIPRENDO EQ. Q.TÀ DI MOTO (QUELLA CHE NON ABBIAMO POTUTO INTEGRARE) CIOÈ:

$\boxed{\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx}}$ STAVOLTA LA POSSIAMO INTEGRARE POICHÉ A È COSTANTE

È COSTANTE DA EQ. MASSA $\rho U = \text{cost}$

$\rightarrow \frac{d\rho u^2}{dx} + \frac{dP}{dx} = 0 \rightarrow \boxed{P + \rho u^2 = \text{costante}}$

SET DI EQUAZIONI METODO DIMENSIONALE (URTO)

$$\begin{cases} \rho U = \text{costante} \\ c_pT + \frac{u^2}{2} = \text{costante} \\ \frac{P}{\rho} = RT \\ P + \rho U^2 = \text{costante} \end{cases}$$

RELAZIONI DI SALTO
(PERCHÉ STO SALTANDO ATTRAVERSO L'URTO)

4 INCOGNITE (u, P, T, ρ)

- CON METODO ISENTROPICO AVENDO $P_0, \rho_0, T_0, u_0 \rightarrow$ TROVO u_M, ρ_M, P_M, T_M
- CON METODO DIMENSIONALE AVENDO $P_M, \rho_M, T_M, u_M \rightarrow$ TROVO u_V, ρ_V, P_V, T_V
- DI NUOVO METODO ISENTROPICO.

QUINDI ALL'INTERNO DELL'URTO, TRAMITE METODO DIMENSIONALE:

$$\begin{cases} \rho_M U_M = \rho_V U_V \\ c_pT_M + \frac{u_M^2}{2} = c_pT_V + \frac{u_V^2}{2} \\ \left(\frac{P}{\rho} = RT\right)_M = \left(\frac{P}{\rho} = RT\right)_V \rightarrow \frac{\left(\frac{P}{\rho} = RT\right)_M}{\left(\frac{P}{\rho} = RT\right)_V} \\ P_M + \rho_M U_M^2 = P_V + \rho_V U_V^2 \end{cases}$$

↑

HO SOLO LA VALLE INCOGNITA

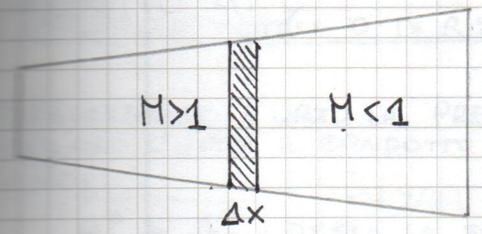
DA CUI TROVO P_V, ρ_V, T_V E U_V (O M_V).

DA VALLE IN POI RIUSO METODO ISENTROPICO MA DOVRÒ CALCOLARMI UNA NUOVA

$\boxed{P_{0V} \neq P_{0M}}$

FLUIDODINAMICA 10 GIUGNO ULTIMA LEZIONE

ABBIAMO STUDIATO MODELLO MATEMATICO DEGLI URTI (SU DISPENSE C'È ESPERIMENTO DI PISTONE IN CONDOTTO).



SE P_u NON È QUELLA CORRISPONDENTE IN MODELLO ISENTROPICO, AVREMO UN FLUSSO CHE SI COMPRIME CON URTO.

VEDI L'ESEMPIO SULLE DISPENSE

METODO UNIDIMENSIONALE È SEMPLICE POICHÈ $A=$ COSTANTE DA CUI Δx È INFINITESIMO.
L'URTO È FENOMENO DISSIPATIVO → PRESSIONE ED ENTROPIA NON SI CONSERVANO → QUINDI PERDIAMO 1 EQUAZIONE → MA EQ. Q.TÀ DI MOTO SI PUÒ INTEGRARE PER LA COSTANZA DELL'AREA.

SET DI EQUAZIONI DIVENTA:

$$\begin{cases} \rho U = \text{COSTANTE} \\ C_p T + \frac{u^2}{2} = \text{COSTANTE} \\ P + \rho U^2 = \text{COSTANTE} \\ \frac{P}{\rho} = RT \end{cases}$$

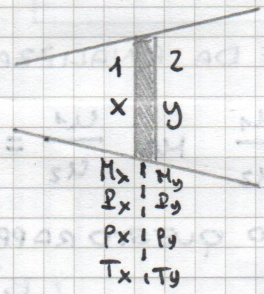
RELAZIONI DI SALTO → NOTE LE VARIABILI A MONTE, TROVO LE INCOGNITE A VALLE

SI PARLA DI URTI NORMALI PERCHÈ SI GENERANO SU SEZIONI PERPENDICOLARI A MOTO $\vec{u}$.

IL SET DI EQUAZIONI SI USA IN APPLICAZIONI PRATICHE. QUANDO C'È URTO LE PERDITE DI CARICO SONO DOVUTE A QUEST'ULTIMO; L'ATTRITO È TRASCURABILE (NO STRATO LIMITE) MA IL FENOMENO DISSIPATIVO DELL'URTO HA ORDINI DI GRANDEZZA MOLTO MAGGIORI RISPETTO VISCOSITÀ.

IN GENERE PER DEFINIRE LA SEZIONE A MONTE E QUELLA A VALLE SI SCRIVE:

$(S_1 \text{ E } S_2)$ O $(S_x \text{ O } S_y)$ (AL POSTO DI S, QUALSIASI LETTERA)
NOI USIAMO LA PRIMA



$$\begin{cases} \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \\ C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \\ P_1 + \rho_1 U_1^2 = P_2 + \rho_2 U_2^2 \\ \frac{P_1}{\rho_1} = RT_1 \\ \frac{P_2}{\rho_2} = RT_2 \end{cases}$$

SI FA RAPPORTO

$$\frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

4 INCOGNITE (u_2, P_2, ρ_2, T_2)

SI PUÒ NOTARE COME L'EQUAZIONE ENERGIA È UGUALE IN METODO UNIDIMENSION. E IN QUELLO QUASI-UNIDIMENSIONALE.

ALLORA:

$$\frac{T_2}{T_1} = H(M_2, M_1) = \boxed{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}} \quad (2)$$

NEL MODELLO QUASI-UNIDIMENSIONALE USAVAMO RELAZIONI ISENTROPICHE CON CUI TROVAVAMO:

$\frac{P_2}{P_1}$ E $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ → TRAMITE EQ. MASSA INVECE $\frac{A_2}{A_1}$

NON AVENDO LE RELAZIONI ISENTROPICHE DOBBIAMO USARE ALTRA VIA:

- PRENDIAMO EQ. STATO: $\rho = \frac{P}{RT}$ E LA SOSTITUISCO NELL' EQ. ~~DI MASSA/CONTINUITÀ~~ Q.TÀ DI MOTO

$$P_1 + \frac{P_1}{RT}u_1^2 = P_2 + \frac{P_2}{RT_2}u_2^2$$

- MOLTIPLICO E DIVIDO PER γ:

$$P_1 + \frac{\gamma}{\gamma}\frac{P_1}{RT_1}u_1^2 = P_2 + \frac{\gamma P_2}{\gamma RT_2}\cdot u_2^2$$

QUINDI:

$$P_1 + \gamma P_1 M_1^2 = P_2 + P_2 \gamma M_2^2$$

RAGGRUPPO:

$$P_1(1+\gamma M_1^2) = P_2(1+\gamma M_2^2)$$

QUINDI:

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = G(M_1, M_2) = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}} \quad (1)$$

E HO (DA PRIMA) ANCHE:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = H(M_1, M_2)} \quad (2)$$

ADESSO, INSERENDO $\frac{P_2}{P_1}$ E $\frac{T_2}{T_1}$ IN EQ. STATO TROVO $\rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1}$

QUINDI:

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, M_2)} \quad (3)$$

- RIMANE DA ANALIZZARE EQ. CONTINUITÀ MASSA:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{MA} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1\sqrt{\gamma RT_1}}{M_2\sqrt{\gamma RT_2}} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

SE USO QUESTO RAPPORTO ALLORA:

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, M_2) = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{1}{H(M_1, M_2)}}} \quad (3)$$

HO QUINDI TROVATO UNA RELAZIONE CHE LEGA M_1 E M_2 (TRAMITE EQ. CONTINUITÀ)

QUINDI IO POSSO ESPRIMERE

$$\boxed{M_2 = E(M_1)} \quad (4)$$

SOSTITUENDO NEL SET DI EQUAZIONI: DEI RAPPORTI (RELAZIONI DI SALTO)

$$\begin{cases} \frac{T_2}{T_1} = H(M_1, E(M_1)) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} = F(M_1, E(M_1)) \\ \frac{P_2}{P_1} = G(M_1, E(M_2)) \\ M_2 = E(M_1) \end{cases}$$

Q.TÀ IN INPUT È M_1

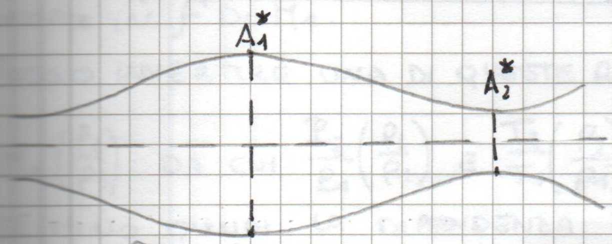
QUINDI DATO $M_1 \rightarrow$ LO INSERISCO IN $\frac{T_2}{T_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{p_2}{p_1}$ E TROVO T_2, p_2, ρ_2 (E ANCHE M_2).

NELLE TABELLE TROVIAMO INFATTI QUESTE SOPRA E IN PIÙ ABBIAMO ANCHE LE PRESSIONI TOTALI O DI RISTAGNO $\boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}}}$.

ATTRAVERSANDO L'URTO LA PRESSIONE TOTALE (DI RISTAGNO) CAMBIA. È COME SE PASSANDO L'URTO IL CONDOTTO DOPO $A_V (A_2)$ FOSSE COLLEGATO A SERBATOIO DIVERSO QUINDI:

$\boxed{A_1^* \neq A_2^*}$ OSSIA LA SEZIONE IN CUI HO $M = 1$

IMMAGINANDO DI DOVER RIACCELERARE DA $M<1$ A $M>1$ AVREMO ALTRA SEZIONE DI GOLA A_2^* MA È SEZIONE "VIRTUALE". NON È DETTO CHE CI SIA VERAMENTE NELLA STRUTTURA.



È IMPORTANTE RICORDARE CHE:

$\boxed{T_{02} = T_{01}}$

$\boxed{p_{02} \neq p_{01}}$

QUINDI TRA VALLE E MONTE SI CONSERVA T_0

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}} \longrightarrow \boxed{\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}} = D(M_1)} \quad (5)$$

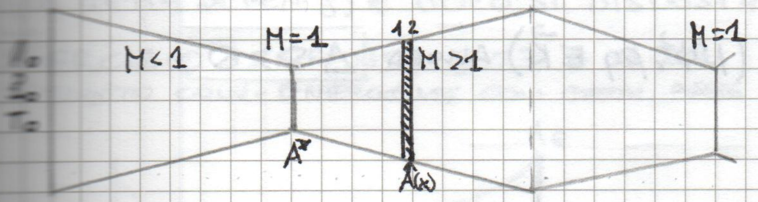
ANCH'ESSO IN TABELLA

DA TABELLE ISENTROPICHE DA $M = M_2(M_1)$

LA HO DA TAB. IN FUNZ. DI M_1 MET. UNIDIM.

DA TABELLE ISENTROPICHE CON $M = M_1$

ESEMPIO: HO CONDOTTO CON UGELLO PROPULSIVO; CONOSCO LA GEOMETRIA $A(x)$ E LE QUANTITÀ TOTALI (O DI RISTAGNO):



METODO QUASI-UNID.

M	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*}$
0				
⋮				
∞				

(1)

METODO UNIDIMENSIONALE

M_1	$M_2(M_1)$	$\frac{p_2}{p_1}(M_1)$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}(M_1)$

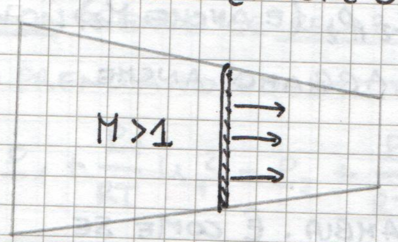
(2)

- ENTRO IN TABELLA (1) CON $A(x) \rightarrow \frac{A}{A^*} \rightarrow$ TROVO GLI ALTRI
- ARRIVO AD URTO, ENTRO CON M_1 CHE LO TROVO DA MODELLO ISENTROPICO, USO QUINDI LA TABELLA (2) E TROVO M_2, p_2, T_2, ρ_2 E p_{02}
- NOTO M_2, O ASSEGNO p_u O $A_2^* \neq A^*$, POTREI AVERE CASO IN CUI DEVO RIPORTARE M DA >1 A $M<1$, QUINDI HO BISOGNO DI SEZIONE DIVERSA DA QUELLA DI PRIMA (A^*), SE CONOSCO A_2 ($\leftrightarrow$ CONOSCO $A(x)$), NOTO M_2 E A_2 TROVO $A_2^* \xrightarrow{DA} \frac{A}{A^*}$ TRAMITE TABELLE ISENTROPICHE. A_2^* È SEZIONE VIRTUALE, NON È DETTO CHE CI SIA NEL CONDOTTO.

IL PROBLEMA PRINCIPALE NELLA PROGETTAZIONE È TROVARE $A(x)$. SI USANO MODELLI NUMERICI PER CIÒ.

CI POSSONO ESSERE URTI IN DIFFERENTI CONDOTTI:

1)

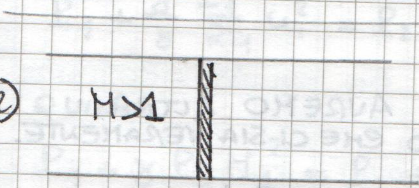


CONVERGENTE

L'URTO PUÒ PRESENTARSI ANCHE IN CONDOTTO CONVERGENTE MA LA SEZIONE D'URTO A(x) TENDE A SCAPPARE VIA

IN CONV. È INSTABILE

2)

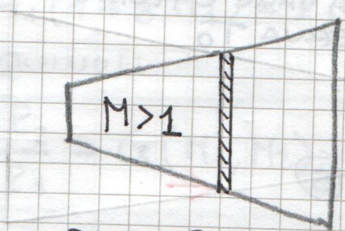


CONDOTTO COSTANTE

(FLUSSI ALLA RAYLEIGH)

EQUILIBRIO INDIFFERENTE IN CONDOTTO COSTANTE

3)



DIVERGENTE

È STABILE

È IMPORTANTE RICORDARE CHE URTO SI FORMA SOLO CON FLUSSO SUPERSONICO $(M>1)$

NEL CASO DEL SUBSONICO NON PUÒ FORMARSI PER UN MOTIVO BEN PRECISO:

$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1}$ È DIFFERENZA DI ENTROPIA TRA VALLE E MONTE

ENTROPIA E FLUSSI SUBSONICI

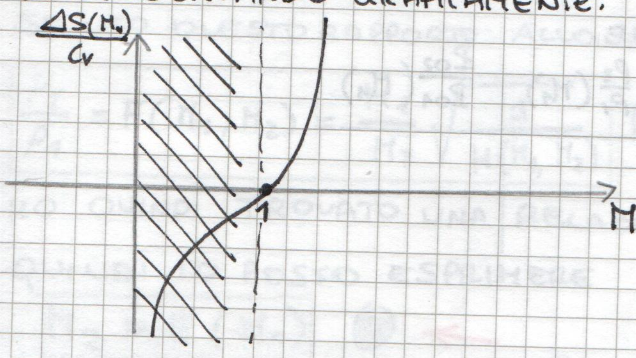
$S_2 \rightarrow S_2 > S_1$ PER CLASIUS - DUHÉN

SE UNO DEI 3 EFFETTI DISSIPATIVI È ATTIVATO $(\mu\Phi^2, \rho q \; E \; \vec{K})$ ALLORA $\boxed{\Delta S > 0}$

AVREMO (SENZA DIMOSTRARE) CHE:

$\boxed{\Delta S \Rightarrow \Delta S(M_1)}$ ←

RAPPRESENTANDO GRAFICAMENTE:



ΔS SI ADIMENSIONALIZZA TRAMITE C_V DATO CHE NEL GRAFICO C'È GRUPPO ADIMENSIONALE M. (È PRASSI).

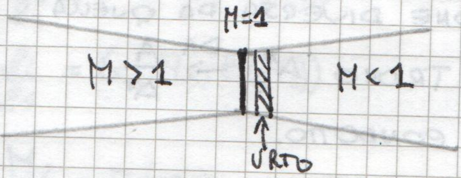
SCRITTA L'EQUAZIONE DI ΔS, NULLA VIETA CHE $M_1 < 0$, MA SAPENDO CHE $\Delta S > 0$ PER DEFINIZIONE, ALLORA SI TOGLIE IL GRAFICO DA $M_1 < 1$

CIÒ DIMOSTRA CHE NON POSSONO ESSERCI URTI PER $M < 1$

AVREI $\Delta S < 0$ CIOÈ UN AUMENTO DI ENERGIA (MA IO HO SOLO DISSIPAZIONE).

L'ANDAMENTO INTORNO A $M_1 = 1$ SI HA A TANGENTE ORIZZONTALE (FLESSO, CAMBIA CONCAVITÀ)

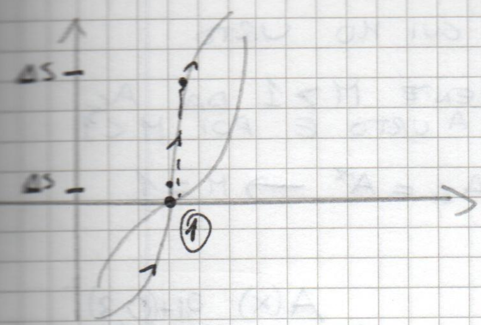
CIÒ CI FA CAPIRE CHE A $M \overset{CIRCA}{=} 1 \longrightarrow \Delta S$ È PICCOLO $\rightarrow$ HO FLUSSO ISENTROPICO



QUINDI L'URTO SUBITO DOPO LA GOLA AVREBBE EFFETTO POCO DISSIPATIVO (POCO INTENSO), CIOÈ MI FA PERDERE POCA ENERGIA.

SE AVESSIMO GRAFICO DIVERSO, CIOÈ IL PILOTA DELL'AEREO DOVREBBE PILOTARE IN MODO TALE DA AVERE URTO ESATTAMENTE IN GOLA PER AVERE ΔS PICCOLO

SE IL GRAFICO FOSSE STATO: AVREMMO AVUTO ΔS MOLTO PIÙ GRANDE.



URTO FA PERDERE POTENZA: CONSUMA ENERGIA. O LO SI ELIMINA ANNULLANDOLO IN SEZIONE DI GOLA (MOLTO DIFFICILE) O ALMENO LO SI AVVICINA AD A^*.

SI CERCA DI AVERE UN URTO A MACH POCO SUPERIORI A $M=1$ COSÌ LE PERDITE SONO PICCOLE.

PICCOLA VARIAZIONE DI MACH PORTA PICCOLA VARIAZIONE DI ENTROPIA.

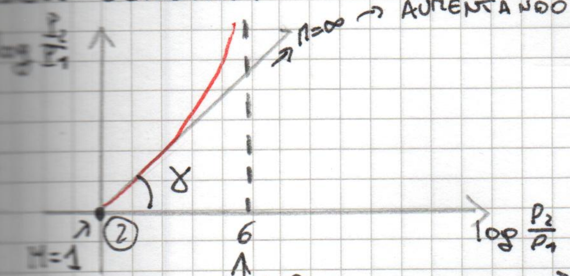
RELAZIONI DI RANKIN-HUGONIOT

SONO EQUAZIONI CHE SI RICAVANO RIMANIPOLANDO I RAPPORTI $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ E $\frac{T_2}{T_1}$ ESPRESSI SEMPRE IN f DI M_1.

POSSO INVERTIRE UNA DI QUESTE RELAZIONI ESPRIMENDO M_1 COME f DI $\frac{p_2}{p_1}$:

$$M_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{DA CUI} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \text{E} \quad \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

ELIMINO QUINDI LA DIPENDENZA DA MACH, SOLITAMENTE IL MACH SI TROVA IN FUNZIONE DELLA DENSITÀ.



SE FLUSSO È ISENTROPICO:

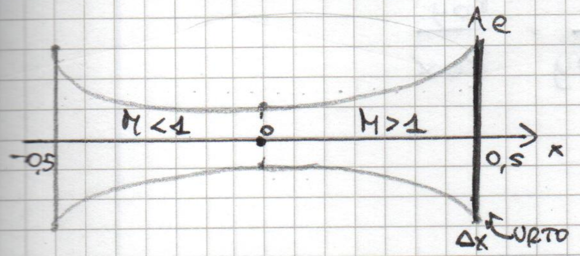
$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma}} \leftarrow \gamma \text{ PENDENZA (SCALA BILOGARITMICO)}$$

RAPPORTO DI DENSITÀ È 6 E NON SI SA PERCHÉ (NON ESISTE SPIEGAZIONE FISICA). MA NON CI INTERESSA PERCHÉ IL MODELLO FUNZIONA FINO A $M=4$ E I MODELLI POI CAMBIANO.

VARIANDO 1 POCO LA VARIAZIONE DI ENTROPIA È PICCOLA → È VICINA A LEGGE ISENTROPICA (LA RETTA DI PEN. γ) E DOPO SI DISCOSTA 2.

ESERCIZIO DISPENSE 6.23 E 6.24

CONDOTTO CONV-DIVERGENTE CON GEOM. ASSEG.



VANNO DETERMINATE Q.TÀ TERMODINAMICHE OVUNQUE (USANDO QUINDI I DUE MODELLI).

$$A(x) = 0{,}1 + x^2$$

IN CUI X VARIA TRA -0,5 A +0,5

1) HO URTO IN A_e

2) CALCOLA RAPPORTO P_y/P_{0x} CIOÈ P_{2_V}/P_{01_M}

L'URTO AVVIENE SOLO SU $M>1$ QUINDI FLUSSO IN INGRESSO È $M<1$ (DEFINITO DALL'ES.) QUINDI HO SEZ. GOLA CRITICA → $A_G = A^*$

ENTRO IN TABELLE ISENTROPICHE CON $\frac{A_e}{A^*}$ IN CUI $A_e \sim A_{e_V} \sim A_{e_M}$

QUINDI $\frac{P_x}{P_{0x}}$ IN TAB. ISENTR LA TROVO IN QUESTE TABELLE

QUINDI $A_G = A^* = 0{,}1\ m^2 \rightarrow A_e \overset{u}{=} 0{,}35 \rightarrow \frac{A_e}{A^*} = 3{,}5 \rightarrow$ VADO SU TABELLE ISENTR.

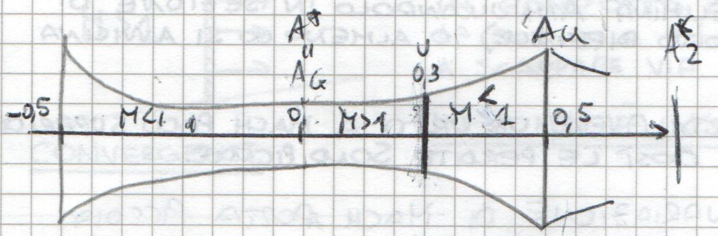
TROVO N. MACH $M_x = M_1 = M_{MONTE}$ → ENTRO IN TABELLE URTI → TROVO

$P_y/P_x = P_2/P_1$ CIOÈ:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{P_y}{P_x}\cdot\frac{P_x}{P_{0x}}$$

Es. 6.2.4 DEVO DETERMINARE P_u/P_{01}

STESSO ESERCIZIO DI PRIMA MA CON $x = 0{,}3\,m$ IN CUI HO URTO



AVRÒ SICURAMENTE $M>1$ DA A_G IN POI FINO A URTO E POI $M<1$ DOPO URTO
HO QUINDI $A_G = A^* \rightarrow M = 1$

• PERTANTO TRAMITE TABELLE ISOENTROPICHE ENTRO CON $\dfrac{A(x)}{A^*} = \dfrac{0{,}1+(0{,}3)^2}{0{,}1} \simeq 1{,}9$

CHE NELLE TABELLE CORRISPONDE A $M_1 (= M_x)(= M_{MONTE}) = 2{,}14$ E

HO ANCHE $\dfrac{P_1}{P_{01}}$ SE NECESSARIO

• TRAMITE LE RELAZIONI DI SALTO USO $M_1 (= M_x = M_{MONTE})$ PER TROVARE

$\dfrac{P_2}{P_1}\left(= \dfrac{P_y}{P_x}\right)$, TROVO M_2 SE NECESSARIO E $\dfrac{P_{02}}{P_{01}} = \dfrac{P_{0V}}{P_{0M}}$

NON HO PIÙ STESSA A^* MA A_2^* QUINDI:

$\dfrac{A_y}{A_2^*}\left(= \dfrac{A_2}{A_2^*} = \dfrac{A_{VALLE}}{A_2^*}\right) \rightarrow$ ENTRO NELLE ISOS

MENTRE $\dfrac{A_u}{A_y}\left(= \dfrac{A_{USCITA}}{A_{VALLE}}\right)$

DA CUI:

$\dfrac{A_{USCITA}}{A_2^*}\left(= \dfrac{A_V}{A_2^*}\right) = \dfrac{A_y}{A_2^*} \cdot \dfrac{A_u}{A_y}$ AVENDO TROVATO $\dfrac{A_u}{A_2^*}$ ENTRO IN ISOS

E TROVO $\dfrac{P_u}{P_{0y}}\left(= \dfrac{P_u}{P_{02}}\right)$ DA CUI $\dfrac{P_u}{P_{01}} = \dfrac{P_2}{P_{0y}} \cdot \dfrac{P_{0y}}{P_{0x}}$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ o BILANCIO/CONSERVAZIONE DELLA MASSA

F. VETTORIALE

$$\frac{DM}{Dt}=\emptyset \rightarrow \frac{D}{Dt}\underbrace{\iiint}_{V \text{ materiale}} \rho\, dV \overset{\text{derivata materiale}}{\underset{\text{T. Reynolds}}{=}} \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint}_{V \text{ controllo}}\rho\, dV + \underbrace{\iint}_{S \text{ di controllo}} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS$$

DERIVATA MATERIALE DELLA MASSA

F. INT. (VETT)

$$\xrightarrow{\text{T. GAUSS-GREEN}} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint}_{V \text{ controllo}}\rho\, dV + \underbrace{\iiint}_{V \text{ controllo}}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})dV} \xrightarrow{\text{IMPOSTATA L'ARBITRARIETÀ DEL V. DI CONTROLLO}} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \emptyset}$$

F. DIFF. (VETT).

EQ. BILANCIO MASSA FORMA GENERALE

SE DIMOSTRIAMO CHE ρ NON VARIA CON IL TEMPO E ρ LO PORTO FUORI DA DIVERGENZA $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \emptyset$

CASO PARTICOLARE → FL. NEWTONIANI EQ. BILANCIO MASSA

F. INDICIALE

$$\frac{DM}{Dt}=\emptyset \rightarrow \frac{D}{Dt}\underbrace{\iiint}_{V \text{ materiale}}\rho\, dV \overset{\text{da der. materiale}}{\underset{\text{T. Reynolds}}{=}} \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint}_{V \text{ controllo}}\rho\, dV + \underbrace{\iint}_{S \text{ controllo}}\rho\, u_i \cdot n_i\, dS = \emptyset$$

F. INT. (INDICIALE)

$$\xrightarrow{\text{T. GAUSS-GREEN}} \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint}_{V}\rho\, dV + \underbrace{\iiint}_{V}\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}dV} \xrightarrow{\text{IMPOSTATA L'ARBITRARIETÀ DEL V. CONTROLLO}} \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = \emptyset}$$

F. DIFF. (IND.)

SE DIMOSTRO CHE ρ NON VARIA NEL TEMPO, PORTO FUORI ρ $\rightarrow \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \emptyset}$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}F$$

ALTRO METODO TRAMITE DERIVATA MATERIALE

F. VETTORIALE $= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \emptyset$ GIÀ IMPOSTATA L'ARBITRARIETÀ DEL V. DI CONTROLLO

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho = \emptyset$$ ATTRAVERSO D. MATERIALE

MA $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho$ QUINDI DIVENTA

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \emptyset}$$

F. DIFF. (VETT) II FORMA

EQUAZIONE DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\underbrace{\frac{D\vec{Q}}{Dt}}_{\text{DERIVATA MATERIALE QTÀ DI MOTO}} = \underbrace{\sum \vec{F}_M}_{\text{FORZE DI MASSA}} + \underbrace{\sum \vec{F}_S}_{\text{FORZE DI SUPERFICIE}} \qquad \vec{Q} = m\vec{u} = \iiint_V \rho \vec{u}\, dV$$

I MEMBRO:
$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{u}\, dV + \iint_S (\rho\vec{u})\,\vec{u}\cdot\vec{n}\, dS$$

T. GAUSS-GREEN ⟶ PER TRASFORMARE INT. SUP ⟶ INT. VOLUME

$$\rightarrow \frac{D\vec{Q}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\, dV$$

IN CUI $\vec{u}\otimes\vec{u}$ È PRODOTTO DIADICO CI DA TENSORE IN QUESTO CASO.

II MEMBRO:
$$\underbrace{\iiint_V \rho\vec{f}\, dV}_{\text{FORZA DI MASSA}} + \iint_S \vec{\vec{T}}\cdot\vec{n}\, dS =$$

IN CUI $\vec{\vec{T}}\cdot\vec{n} = \vec{\vec{\Phi}}\,\vec{n} = \varphi$ SFORZO IN IDRODINAM.

$$\xrightarrow{\text{APPLICO T. GREEN}} = \iiint_V \rho\vec{f}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}\, dV$$

METTENDO TUTTO INSIEME:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\, dV = \iiint_V \rho\vec{f}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}\, dV} \quad ①$$

FORMA VETTORIALE GENERICA

IPOTIZZANDO L'ARBITRARIETÀ DEL VOLUME DI CONTROLLO:

$$\boxed{\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) = \rho\vec{f} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}} \quad \text{F. VETTORIALE} \quad ②$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_J}(\rho u_i u_J) = \rho f_i + \frac{\partial T_{iJ}}{\partial x_J}} \quad \text{F. INDICIALE} \quad ②$$

PROCEDIAMO CON LA SEMPLIFICAZIONE:

I MEMBRO: POSSIAMO SEMPLIFICARLO SCOMPONENDO LE DERIVATE:

$$\underbrace{\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{DA } \frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}} + \underbrace{\rho\vec{u}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{u}}_{\text{GRADIENTE}} + \vec{u}\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})}_{\text{DIVERGENZA}}}_{\text{DA } \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})}$$

IL RISULTATO DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE UN VETTORE

POSSIAMO METTERE IN EVIDENZA $\vec{u}$ SOLO PER ALCUNI TERMINI IN MODO TALE CHE:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u})\right)}_{\text{EQUAZIONE DEL BILANCIO/DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA} = 0} \rightarrow \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \text{I MEMBRO}$$

F. VETTORIALE

RAGGRUPPANDO
$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right] = \rho\frac{D\vec{u}}{Dt}} \quad ③ \qquad \text{I MEMBRO}$$

DERIVATA MATERIALE

QUINDI:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}}\ (3)$$

$\vec{\vec{T}}$ È TENSORE DEGLI SFORZI/TENSIONI CON 6 COMPONENTI INDIPENDENTI CHE SONO INCOGNITE. NON POSSO RISOLVERE IL SISTEMA POICHÉ HO PIÙ INCOGNITE DI EQUAZIONI (3)

SCRIVIAMO:

$$T_{ij} = \boxed{\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\sigma}}}$$

FLUIDO $\vec{u}$ $\vec{u}$ — IDRO $\vec{u}$ $\vec{u}$

L'EQUAZIONE QUINDI DIVENTA:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\sigma}}}$$

F. VETTORIALE (4)

$$\boxed{\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}}$$

F. INDICIALE (4)

PER ELIMINARE σ_{ij} o $\vec{\vec{\sigma}}$ (QUINDI PER SEMPLIFICARE $\vec{\vec{T}}$) CI BASIAMO SU ASSIOMI NOLL:

$$\vec{\nabla}\vec{u} = \vec{\vec{\varepsilon}} + \vec{\vec{\Omega}}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

SAPENDO CHE $\boxed{\vec{\vec{T}}\left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, S.T.\right)}$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\vec{T}}(\vec{u}, \vec{\nabla}\vec{u}, S.T)$$

CIÒ CHE CONTA È LA PARTE SIMMETRICA $\vec{\vec{\varepsilon}}$: $\vec{\vec{T}}(\vec{\vec{\varepsilon}}, S.T.)$

$$\sigma_{ij} = \underset{\text{FUNZIONE}}{G}(\varepsilon_{ij}) \xrightarrow{\text{SVILUPPO IN SERIE}} \sigma_{ij} = \underset{\text{I ORDINE}}{A\delta_{ij}} + \underset{\text{II}}{B\varepsilon_{ij}} + \underset{\text{III}}{C\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}} + \dots$$

CONDIZIONI IDROSTATICHE

LA DIPENDENZA NELLA VELOCITÀ È TUTTA IN σ_{ij}

CONDIZIONI DINAMICHE

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

CASO GENERICO

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} + B\varepsilon_{ij}$$

CASO INCOMPRIMIBILE

$$\sigma_{ij} = \underbrace{2\mu}_{B}\varepsilon_{ij}$$

L'INFORMAZIONE DI COMPRIMIBILITÀ STA IN A DA CUI:

A: $=0$ INCOMPR. ; $\neq 0$ COMPRIMIBILE

PERTANTO IL TERMINE CHE STABILISCE COMPRIMIBILITÀ O INCOMPRIMIBILITÀ È LEGATO ALLA DIVERGENZA DI $\vec{u}$:

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}$ INSIEME AD UNA COSTANTE $\boxed{\lambda}$

$$\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \lambda\varepsilon_{kk}$$

QUINDI AVREMO:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

DA CUI:

$$\boxed{T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}}$$

$$\underset{A\delta_{ij}}{\uparrow} \qquad \underset{B\varepsilon_{ij}}{\uparrow}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA PER FLUIDI COMPRIMIBILI E INCOMPRIMIBILI

IL TERMINE λ PORTA CONSEGUENZE CON LA PRESSIONE:

(1) FLUIDO IN QUIETE $\rightarrow$ $p = \dfrac{-tr(T_{ij})}{3}$ ED $\varepsilon_{ij} = 0$ (CASO STATICO)

DA CUI $T_{ij} = -p\,\delta_{ij}$

(2) FLUIDO INCOMPRIMIBILE MA IN MOTO $\rightarrow$ $T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$

(3) FLUIDO COMPRIMIBILE $\rightarrow$ $T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$

SE CALCOLASSIMO LA TRACCIA DI T_{ij}:

$tr(T_{ij}) = -p\cdot 3 + \lambda\cdot\varepsilon_{kk}\cdot 3 + 2\mu\,\varepsilon_{kk}$ $\quad -\dfrac{tr(T_{ij})}{3} = p - \lambda\varepsilon_{kk} - \dfrac{2}{3}\mu\,\varepsilon_{kk}$

DIVIDENDO PER 3 E CAMBIANDO SEGNO:

RAGGRUPPANDO: $-\dfrac{tr(T_{ij})}{3} = p + \varepsilon_{kk}\left(\lambda + \dfrac{2}{3}\mu\right)$

PER MOLTI FLUIDI: $\boxed{\lambda = -\dfrac{2}{3}\mu}$ IPOTESI DI STOKES

SEMPLIFICA L'EQUAZIONE MA NON SIGNIFICA CHE FLUIDO DIVENTA INCOMPRIMIBILE

$\boxed{\left(\lambda + \dfrac{2}{3}\mu\right)}$ VISCOSITÀ VOLUMETRICA BULK VISCOSITY

$\downarrow$ PER LE NOSTRE APPLICAZIONI QUINDI $\lambda = -\dfrac{2}{3}\mu$ DA CUI:

$$\boxed{p = -\frac{tr(T_{ij})}{3}}$$

QUINDI RIPRENDENDO L'EQUAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO IN F. INDICIALE E IN F. DIFF:

$$\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{o} \quad \left(\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}\right)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p\,\delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial(\lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij})}{\partial x_j}{}^{*} + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

IN CUI SEMPLIFICO 2 E $\frac{1}{2}$ $\quad \mu\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \mu\left[\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] = \mu\left[\underset{\text{LAPLACIANO}}{\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}} + \dfrac{\partial}{x_i}(\varepsilon_{kk})\right]^{*}$

TERMINE NULLO IN LORO POICHÉ LA DIV DI $\vec{u} = 0$ IN FLUIDO INCOMP.

USANDO QUESTO ULTERIORE PASSAGGIO: *

$$\boxed{\rho\frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{kk})}$$ F. INDICIALE

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

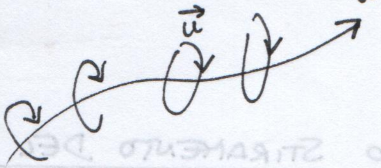
$$\boxed{\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{F} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}_{\varepsilon_{kk}})}$$ F. VETTORIALE

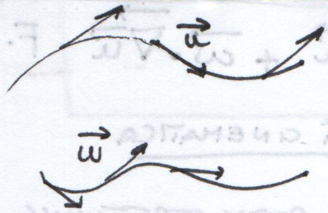
IN CUI SI È POSTO $\lambda = -\dfrac{2}{3}\mu$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

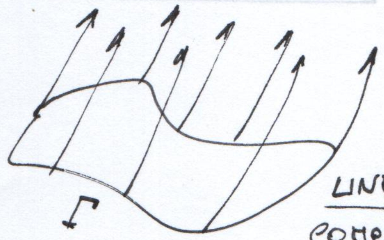
VORTICITÀ ED EQUAZIONE VORTICITÀ

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$





VORTICE È INSIEME DI LINEE DI VORTICITÀ



INTENSITÀ DEL VORTICE $\boxed{\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{e}}$

T. STOKES

$$\Gamma = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \boxed{\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dS}$$

KELVIN FECE LE PRIME CONSIDERAZIONI MATEMATICHE SU VORTICITÀ:

- $Re \to \infty \to \frac{\rho u \ell}{\mu} \to \mu$ TRASCURABILE
- FORZE CONSERVATIVE: $\vec{f} = -\vec{\nabla} G$
- FLUSSO INCOMPRIMIBILE (LUI CONSIDERÒ FLUSSO BAROTROPICO $\rho(P)$)

CON QUESTE IPOTESI AVREMO:

$\boxed{\Gamma = \text{COSTANTE}}$ POICHÉ $\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$ $\left(o\ \frac{D\Gamma}{Dt}\right)$

HELMOLTZ SI BASÒ SULLE IPOTESI DI KELVIN E INTRODUSSE 3 TEOREMI:

1. TEOREMA: Γ NON PUÒ VARIARE. IL VORTICE PUÒ CHIUDERSI SU SE STESSO O INIZIARE E FINIRE AGLI ESTREMI DEL CAMPO.
2. TEOREMA: UNA PARTICELLA ESTERNA NON PUÒ ENTRARE ALTRIMENTI LA LINEA MAT. VARIEREBBE E DI CONSEGUENZA VARIEREBBE Γ E QUINDI $\vec{\omega}$.
3. TEOREMA: $\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \to \Gamma = \text{COSTANTE}$ (VISIONE FISICA DELL'AFFERMAZIONE DI KELVIN)

IN CUI $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \bullet = 0$
$\vec{\nabla} \times \nabla^2 \bullet = \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \bullet)$

PER TRATTAZIONE DIFFERENZIALE (NAVIER-STOKES PER FLUIDI INCOMPRIMIBILI)

$$\vec{\nabla} \times \left(\text{EQ. NAVIER-STOKES}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\rho \frac{D\vec{u}}{Dt}\right) = -\vec{\nabla} G - \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\mu}{3} \cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}$$

$\to$ SI ANNULLA POICHÉ NEI FLUIDI INCOMPR. $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \varepsilon_{KK} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \left[\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}\right] = +0 + 0 + \mu \nabla^2 \vec{\omega}$$

PORTO FUORI ρ ESSENDO COSTANTE:

$$\rho\left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\right] = \mu \nabla^2 \vec{\omega} \to \rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho(-\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega}) = \mu \nabla^2 \vec{\omega}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \rho \omega \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \mu \nabla^2 \vec{\omega} \to \rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = \mu \nabla^2 \vec{\omega} + \rho \omega \cdot \vec{\nabla} \vec{u}$$

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \nu\mu\nabla^2\vec{\omega} + \vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}}$$ F. DIFFERENZIALE DELLA VORTICITÀ

N CU ν È VISCOSITÀ CINEMATICA

$\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\vec{\omega}$ È IL VORTEX STRETCHING O STIRAMENTO DEL VORTICE

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$dU = c_v\,dT$ (E. INTERNA) $\qquad dH = c_p\,dT$ (ENTALPIA)

SI PARTE DA PRINCIPIO PRIMO:

$$E = \iiint_V \rho e\, dV$$ IN CUI e È ENERGIA TERMO-CINETICA (Q.TÀ ESTENSIVA) ENERGIA SU ~~VOLUME~~ MASSA

$$\boxed{e = \frac{1}{2}u_i^2 + U} \rightarrow \text{IN CUI } u_i^2 = \sum_{i=1}^{3} u_i u_i = u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3$$

$\vec{K}$ È FLUSSO TERMICO

k È CONDUCIBILITÀ TERMICA

$$\boxed{\frac{DE}{Dt} = L + Q}$$

- Q → CALORE
  - PRODOTTO → ENTROPICO; ENTALPICO
  - SCAMBIATO
- L → LAVORO
  - MASSA
  - DI SUPERFICIE

SONO IN REALTÀ POTENZE ESSENDO $\frac{DE}{Dt} = \frac{\text{LAVORO}}{\text{TEMPO}}$

I) MEMBRO: $\xrightarrow{\text{T. REY.}} \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iint_S \rho e(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dS \overset{\text{T.G.}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\rho e\vec{u}\, dV$

II) MEMBRO: $L = L_M + L_S \rightarrow \iiint_V \rho \vec{f}\cdot\vec{u}\, dV + \iint_S (\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\vec{n}\, dS \overset{\text{T.G.}}{\rightarrow} \iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u}\, dV$

(RICORDANDO CHE $P = \vec{F}\cdot\vec{u}$)

$Q = Q_S + Q_P \rightarrow \iint_S -\vec{K}\cdot\vec{n}\, dS + \iiint_V \rho q\, dV \overset{\text{T.G.}}{\rightarrow} \iiint_V \rho q\, dV - \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{K}\, dV$

METTENDO INSIEME I E II MEMBRO:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\rho e\vec{u}\, dV = \iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{u}\, dV + \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u})\, dV + \iiint_V \rho q\, dV - \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{K}\, dV}$$

F. VETTORIALE

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA F. INTEGRALE

POSTA L'ARBITRARIETÀ DEL VOLUME DI CONTROLLO:

$$\boxed{\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho e\vec{u} = \rho\vec{f}\cdot\vec{u} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u}) + \rho q - \vec{\nabla}\cdot\vec{K}}$$

F. VETTORIALE

EQ. BILANCIO ENERGIA F. DIFF.

SVILUPPIAMO UNA FORMA DIFFERENZIALE ALTERNATIVA:

I) MEMBRO: $\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho e\vec{u} = \rho\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e + e\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} \rightarrow \rho\left[\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}e\right] + \underbrace{e\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u}\right]}_{0 \text{ POICHÉ È EQ. CONS. MASSA}}$

IN CUI CONSIDERO $\rho\vec{u}$ ED e

QUINDI $\boxed{\rho\frac{De}{Dt} = \text{II MEMBRO}}$

II) MEMBRO: LASCIAMO INVARIATO $\rho\vec{f}\cdot\vec{u}$ E ρq MA SEMPLIFICHIAMO $\iiint_V \vec{\nabla}\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u}\, dV$ E $-\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{K}\, dV$

$\boxed{\vec{K} = -k\vec{\nabla}T}$ POICHÉ LA DERIVATA CRESCE VERSO VALORI POSITIVI DI T MA FLUSSO VA DA VALORI PIÙ ALTI A QUELLI PIÙ BASSI, QUINDI È INVERSO. k È COSTANTE.

DA CUI $\boxed{k\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}T) \Rightarrow k\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = k\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = k\nabla^2 T}$

$\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}} + \vec{\vec{\sigma}} \xrightarrow{\text{FACCIO } \cdot\vec{u}} \boxed{\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u} = -p\vec{\vec{I}}\cdot\vec{u} + \vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u}} \xrightarrow{\text{FACCIO DIVERG.}} \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{T}}\cdot\vec{u}) =$

$\vec{\nabla}\cdot(-p\vec{\vec{I}}\cdot\vec{u} + \vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(-p\,\delta_{ij}\cdot u_j + \sigma_{ij}u_j)$

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\vec{f}\cdot\vec{u} - p(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u}) + \rho q + k\nabla^2 T$$

UN CASO PARTICOLARE DELL'EQ. DELL'ENERGIA È:
T. BERNOULLI:

- MOTO STAZIONARIO/PERMANENTE: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- FLUIDO INCOMPRIMIBILE: $\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ (IL ρ STA FUORI POICHÉ LA DENSITÀ È COSTANTE)
- FLUIDO INVISCIDO: μ TRASCURABILE $\rightarrow$ $\vec{\vec{\sigma}} = A\delta_{ij} + B\varepsilon_{ij} = 0$ POICHÉ $A\delta_{ij}$ È NULLO PER INCOMP. MENTRE $B\varepsilon_{ij} = 0$ PER μ TRASCURABILE.
- $q = 0$ (FLUSSO PRODOTTO)
- $\vec{K} = 0$ (FLUSSO SCAMBIATO)
- FORZE DI MASSA CONSERVATIVE: $\vec{f} = -\vec{\nabla}G$

L'EQUAZIONE SI SEMPLIFICA IN:

$$\rho\left[0 + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}e\right] = 0 - \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}G - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p$$

DIVIDO TUTTO PER ρ E PORTO AL PRIMO MEMBRO:

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}e + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}G + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$$

RAGGRUPPO:

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(e + G + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{u}\cdot\boxed{\vec{\nabla}\left(u_i^2 + U + G + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{\nabla}H = 0}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA (COLLEGAMENTO TRA TERMINE CINETICO E TEMPERATURA)

$$e = U + \frac{1}{2}u_i^2 \rightarrow U = e - \frac{1}{2}u_i^2 \quad \left|\, dU = c_v\, dT \,\right| \rightarrow dU = de - u\,du = dU = de - d\frac{u^2}{2}$$

MOLTIPLICHERÒ L'EQUAZIONE DI N.S. CON $\vec{u}$:

$$\left[\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{f} \underbrace{- \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\sigma}}}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}}\right]\cdot\vec{u} \Rightarrow \boxed{\rho\frac{D u_i^2/2}{Dt} = \rho\vec{f}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\sigma}})}$$

ADESSO SOTTRAGGO $\frac{De}{Dt}$ A $\frac{D\frac{u^2}{2}}{Dt}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{DU}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{D\frac{u^2}{2}}{Dt}}$

$$\rho\frac{De}{Dt} - \rho\frac{D\frac{u^2}{2}}{Dt} = \left[\cancel{\rho\vec{f}\cdot\vec{u}} - p(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \cancel{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p} + \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{u})}_{\text{LO SVILUPPO COME } \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\sigma}}) + \vec{\vec{\sigma}}:\vec{\nabla}\vec{u}} + \rho q + k\nabla^2 T\right] - \left[\cancel{\rho\vec{f}\cdot\vec{u}} - \cancel{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p} + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{\sigma}})\right]$$

$$\rho\frac{De}{Dt} - \rho\frac{D\frac{u_i^2}{2}}{Dt} = \boxed{\frac{DU}{Dt} = -p(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \vec{\vec{\sigma}}:\vec{\nabla}\vec{u} + \rho q + k\nabla^2 T}$$

ADESSO SVILUPPO $\vec{\vec{\sigma}}$:

$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}}$ E RICORDANDO CHE $dU = c_v dT \rightarrow \frac{DU}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt}$

ALLORA:

$$\boxed{\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} + \rho q + k \nabla^2 T}$$

$$\vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} = \underbrace{\left[2\mu \vec{\vec{\varepsilon}} + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{\vec{I}} \right]}_{2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} \rightarrow 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{\vec{\varepsilon}} = \boxed{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2\mu (\varepsilon_{ij})^2 + \lambda (\varepsilon_{kk})^2} \sim \boxed{\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2} = \mu \phi^2$$

DA CUI:

$$\boxed{\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T}$$

ENERGIA INTERNA U

A QUESTO PUNTO FACCIAMO STESSO RAGIONAMENTO MA CON ENTALPIA h

$h = U + p v = \boxed{U + \frac{p}{\rho}}$ E $\boxed{dh = c_p dT}$

ENTALPIA

DA CUI $U = h - \frac{p}{\rho}$

DIFFERENZIANDO:

$$dU = dh - d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dh - \frac{1}{\rho} dp + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

IL DIFFERENZIALE NON È LONTANO DA SCRIVERE $\frac{D\circ}{Dt}$ QUINDI:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \boxed{\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}}$$

SOSTITUENDO A $\rho \frac{DU}{Dt}$ DELL'EQ. DI BILANCIO L'ESPRESSIONE SOPRA:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}_{p \underbrace{\left(\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)}_{\text{EQ. CONS. MASSA} = 0}} + \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T$$

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA IN TERMINI ENTALPICI

$$\boxed{\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T}$$

IN CUI $dh = c_p dT$

RAGIONAMENTO IDENTICO SI PUÒ FARE CON L'ENTROPIA: (NIENTE SVOLGIMENTO)

$dS = \frac{dQ}{T}$ E L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\boxed{\rho T \frac{DS}{Dt} = \mu \phi^2 + \rho q + k \nabla^2 T}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA IN TERMINI ENTROPICI

SOTTO PARTICOLARI CONDIZIONI (ALCUNE IPOTESI COME $\rho q = 0$, $k\nabla^2 T = 0$ E $Re \to \infty$ CIOÈ $\mu \to 0$) ALLORA:

L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{DS}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0$$

E IN CASO DI $St \to \infty \to \frac{\partial}{\partial t} = 0$ QUINDI

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{\nabla} S = 0}$$

FLUSSO ISOENTROPICO
ENTROPIA UGUALE SU UNA STESSA LINEA DI FLUSSO.

AVREMMO FLUSSO OMOENTROPICO SE ENTROPIA È UGUALE SU TUTTE LE LINEE DI FLUSSO.

TEOREMA DI CROCCO

CROCCO DIMOSTRÒ CHE SOTTO PARTICOLARI CONDIZIONI, SE ABBIAMO DIFFERENZA DI ENTROPIA TRA LINEE ALLORA ABBIAMO VORTICITÀ,

$$\vec{\nabla} S \rightarrow \vec{\omega}$$

CLASIUS - DUHÉN

FACENDO INTEGRALE DI EQ. ENERGIA IN TERMINI ENTROPICI AVREMO CHE:

$$\iiint_V T \frac{DS}{Dt} dV \geq 0 \longrightarrow \text{ENTROPIA} \begin{cases} \text{O COSTANTE} \\ \text{O AUMENTA} \end{cases}$$

ADIMENSIONALIZZAZIONE

ABBIAMO SET DI 4 EQUAZIONI DIMENSIONALI

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} & \text{EQ. CONSERV. MASSA} \\ ② \ \rho\left(\dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right) = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \dfrac{\mu}{3}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) & \text{EQ. NAVIER-STOKES CON IPOTESI DI STOKES (DA EQ. BILANCIO Q.TÀ MOTO)} \\ ③ \ \rho c_p\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}T\right) = \dfrac{\partial p}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \mu\phi^2 + \rho q + K\nabla^2 T & \text{EQ. BILANCIO ENERGIA TERMICA IN TERMINI DI ENTALPIA (3° EQ. VISTA)} \\ ④ \ \dfrac{p}{\rho} = RT & \text{EQ. DI STATO} \end{cases}$$

POICHÈ LE EQUAZIONI SONO DIFFICILI DA RISOLVERE NELLA REALTÀ, APPLICHIAMO LA ADIMENS:

ADIMENSIONALIZZARE UNA GRANDEZZA SIGNIFICA:

$$\boxed{A^* = \frac{A}{A_0}}$$

DEFINIRE RAPPORTO TRA GRANDEZZA DA ADIMENSIONALIZZARE (A, GR. DIM) E GR. DI RIFERIMENTO DIMENSIONALE A_0 CHE VA PRESA CON ATTENZIONE

QUINDI:

$$\boxed{A = A^* A_0}$$

LE GR. DI RIF = COSTANTI

GR. CON AST = VARIABILI

GR. DIMENS = VARIABILI

AVREMO QUINDI:

$$x_i = x_i^* L_0$$

$$u_i = u_i^* u_0 \rightarrow \begin{cases} u_1 = u_1^* u_0 \\ u_2 = u_2^* u_0 \\ u_3 = u_3^* u_0 \end{cases}$$

$$t = t^* t_0$$

$$T = T^* \Delta t \qquad \text{E} \qquad \vec{\nabla} = \frac{1}{L_0}\vec{\nabla}^* = \frac{1}{L_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^*}, \frac{\partial}{\partial x_2^*}, \frac{\partial}{\partial x_3^*}\right)$$

$$\rho = \rho^* \rho_0$$

$$p = p^* p_0$$

PASSAGGI FONDAMENTALI SONO QUINDI: 1) ADIMENS. EQUAZIONI SOSTITUENDO LE VAR. CON I RISPETTIVI SOSTITUTI 2) DIVIDIAMO PER COSTANT, COSI DA SEMPLIFICARE TERMINI COMPLESSI RENDENDOLI DI ORDINE 1 4) CONFRONTARE IL RIMANENTE PER COMPRENDERE LA RILEVANZA DEI TERMINI

EQUAZIONE MASSA ADIMENSIONALE

$$① \ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} = 0 \xrightarrow{\text{ADIM.}} \frac{\partial(\rho^*\rho_0)}{\partial(t^* t_0)} + \frac{1}{L_0}\vec{\nabla}^*\cdot(\rho^*\rho_0 u_i^* u_0) = \frac{\rho_0}{t_0}\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial t^*}\right) + \frac{\rho_0 u_0}{L_0}\vec{\nabla}^*\cdot(\rho^* u_i^*) = 0$$

$$\xrightarrow[\frac{\rho_0 u_0}{L_0}]{\text{DIVIDO PER}} \frac{L_0}{\rho_0 u_0}\frac{\rho_0}{t_0}\left(\frac{\partial\rho^*}{\partial t^*}\right) + \vec{\nabla}^*\cdot(\rho^*\vec{u}^*) = 0 \rightarrow \frac{L_0}{u_0 t_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^*\cdot(\rho^*\vec{u}^*) = 0$$

$$\frac{L_0}{u_0 t_0} = \frac{1}{St} \rightarrow \underline{\text{STROUHAL}} = \boxed{\frac{u_0 t_0}{L_0}} = \boxed{\frac{t_0}{\frac{L_0}{u_0}}}$$

$$\boxed{\frac{1}{St}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0}$$

EQ. CONSERVAZIONE MASSA IN FORMA ADIMENSIONALE → IN CUI ABBIAMO LEVATO GLI ASTERISCHI PERCHÈ ORMAI TUTTE LE VARIABILI SONO ADIMENSIONALI E LE COSTANTI HANNO FORMATO UN GRUPPO ADIMENSIONALE

NUMERO DI STROUHAL St

$$St = \boxed{\frac{u_0 t_0}{L_0}} = \boxed{\frac{t_0}{\frac{L_0}{u_0}}}$$

IN CUI t_0 È TEMPO CARATT. DEL FENOMENO (PROFILO CHE OSCILLA)

$\frac{L_0}{u_0}$ È TEMPO LEGATO A FLUSSO (PARTICELLE CHE PERCORRONO I CAPI DEL PROFILO)

NEGLI ESPERIMENTI $St_R = St_E$ NECESSARIAMENTE

SOLUZIONE ASINTOTICA

$\boxed{St \rightarrow \infty} \leftrightarrow$ FLUSSO È STAZIONARIO

QUINDI STUDIANDO STROUHAL CAPISCO SE DERIVATA TEMP. PUÒ ESSERE TRASCURATA O MENO $\partial/\partial t$

IN/COMPRIMIBILITÀ: FLUSSI INC., TERMOTR, BAROTR. TRAMITE αP_0 E $\beta \Delta T$

DA EQUAZIONE CONSERV. MASSA (II FORMA) → OTTENGO αP_0 E $\beta \Delta T$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

LO SVILUPPO RICORDANDO CHE $\boxed{d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial P} dP + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT}$ ALLORA → $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \cdot \frac{DP}{Dt} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \cdot \frac{DT}{Dt}$ →

NON STO FACENDO LA DER. MATERIALE)

E RICORDANDO CHE:
→ $\frac{\partial \rho}{\partial P} = \alpha \rho$ E $\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\beta \rho$ → $\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt}}$

ADESSO SOSTITUENDO QUESTA EQUAZIONE IN (1) E SVILUPPANDO L'EQUAZIONE SI OTTENGONO 2 GRUPPI ADIMENSIONALI

$$\boxed{\alpha \rho \frac{DP}{Dt} - \beta \rho \frac{DT}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0}$$ IN CUI ABBIAMO SOSTITUITO

CON RELATIVI SVILUPPI OTTENIAMO:

$\alpha P_0 \rightarrow \overset{(\alpha)}{\frac{1}{P}} \cdot \overset{(P_0)}{P_0} = 1$ → SE $\boxed{\alpha P_0 << 1}$ ALLORA AUMENTO $\rho(T)$ FLUSSO TERMOTROPICO

$\beta \Delta t \rightarrow \underset{(\beta)}{\frac{1}{T}} \cdot \underset{(\Delta t)}{T_0} = 1$ → SE $\boxed{\beta t_0 << 1}$ o $\beta \Delta t$ ALLORA AUMENTO $\rho(P)$ FLUSSO BAROTROPICO

SE $\boxed{(\alpha P_0 \text{ E } \beta \Delta t) << 1}$ ALLORA ρ NON DIPENDE DA P E T FLUSSO INCOMPRIMIBILE

NUMERO DI MACH M

$$\boxed{M = \frac{u_0}{c_0}} \quad \begin{matrix} \text{VELOCITÀ FLUSSO} \\ \text{VELOCITÀ DEL SUONO} \end{matrix}$$

IL NUMERO DI MACH LO SI STUDIA PER COMPRENDERE LA COMPRIMIBILITÀ O INCOMPRIMIBILITÀ DI UN FLUIDO

c_0 = V. SUONO → INDICA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE DELLE PERTURBAZIONI

$c_0 = 340$ m/s ARIA
$c_0 = 1500$ m/s ACQUA

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \gamma R T \rightarrow c_0 = \sqrt{\gamma R T}$$

$287 \frac{J}{kg\,K}$ x ARIA

È INVERSO DELLA SENSIBILITÀ ρ SU P

ENTROPIA COSTANTE, NEGLI URTI L'ENTROPIA VARIA

IN GENERE (MA NON SEMPRE) QUANDO M È ELEVATO → Re È ELEVATO

NON È VALIDO NEL CASO DEGLI UAV O USV IN CUI M GRANDE MA Re PICCOLO

NUMERO DI RUARK Ru

$$\boxed{Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{P_0}} \qquad \frac{\text{P. DINAMICA}}{\text{P. DI RIFER}}$$

NELLE NOSTRE APPL. CONSIDERIAMO P. DINAMICA = P. RIF $\rightarrow$ $\boxed{Ru = 1}$

PER FENOMENI DI CAVITAZIONE ASSUME VALORE DIVERSO

PER RICAVARE RUARK USIAMO IL GRUPPO ADIMENSIONALE $\alpha_0 P_0$

$$\alpha_0 P_0 = P_0 \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right) = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{C_0^2} \cdot \frac{u_0^2}{u_0^2} \Rightarrow$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER u_0^2

$\hookrightarrow = \alpha_0 \rho_0 = \frac{1}{C_0^2}$ SENSIBILITÀ A PRESSIONE; INFATTI $C_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$

$\Rightarrow$ RAGGRUPPO IN MODO TALE DA OTTENERE GRUPPI ADIMENSIONALI

$$\underbrace{\left(\frac{u_0^2}{C_0^2}\right)}_{M^2}\underbrace{\left(\frac{P_0}{\rho_0 U_0^2}\right)}_{Ru^{-1}} = \boxed{M^2 Ru^{-1}} = \boxed{\alpha P_0}$$

$\leftarrow$ GR. ADIM

CIÒ SIGNIFICA CHE PONENDO $\boxed{Ru = 1} \longrightarrow \boxed{\alpha P_0 = M^2}$ QUINDI:

INCOMPRIMIBILITÀ: MACH E $\beta \Delta t$

INVECE DI SCRIVERE CHE FL. INC. È QUANDO:

$$\begin{cases} \alpha P_0 \ll 1 \\ \beta \Delta T \ll 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M^2 \ll 1 \\ \beta \Delta T \ll 1 \end{cases}$$

FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$M^2 \cong 1 \rightarrow M \cong 0,3$ PERTANTO

$$\begin{cases} M < 0,3 \\ \beta \Delta T \ll 1 \end{cases}$$

FLUIDO INCOMPRIMIBILE

FLUSSI

1. FLUSSO SUBSONICO: $0,3 < M < 0,8$ (CASO SPERIM. FAVOR.)
2. FLUSSO TRANSONICO: $0,8 < M < 1,2$ (SE CAMBIO MACH DI ESP. CAMBIA TUTTO)
3. FLUSSO SUPERSONICO: $1,2 < M < 4$ o 5 (CASO SPERIM. FAVOR.)
4. FLUSSO IPERSONICO: $M > 4$ o 5 (FLUIDO IONIZZATO O PLASMA)

PASSANDO DA MACH SUBSONICO A SUPERSONICO SI GENERANO ONDE D'URTO.

EQUAZIONE Q.TÀ DI MOTO ADIMENSIONALE

PRENDO EQ. DI NAVIER-STOKES ED ESPANDO (EQ. Q.TÀ DI MOTO) E INSERISCO $\vec f = \vec g$ CHE DEFINISCE LA FORZA DI MASSA

$$\rho\left(\frac{\partial \vec u}{\partial t}\right) + \rho \vec u \cdot \vec\nabla \vec u = \rho \vec g - \vec\nabla p + \mu \nabla^2 \vec u + \frac{\mu}{3}\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec u)$$

CON IPOT. STOKES $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

ADIMENSIONALIZZO E SOSTITUISCO LE VARIABILI: $g = |\vec g|$ E $\vec g = \vec g^* g \to \vec g^* = \frac{\vec g}{g}$

$$\frac{\rho_0 u_0}{t_0}\left(\rho^*\frac{\partial \vec u^*}{\partial t^*}\right) + \frac{\rho_0 u_0^2}{L_0}\left(\rho^* \vec u^* \cdot \vec\nabla^* \vec u^*\right) = \rho_0 \rho^* g \overbrace{\left(\frac{\vec g}{g}\right)}^{\vec g^*} - \frac{p_0}{L_0}\vec\nabla^* p^* + \mu\frac{u_0}{L_0^2}\nabla^{2*}\vec u^* + \frac{\mu}{3}\frac{u_0}{L_0^2}\vec\nabla^*(\vec\nabla^*\cdot\vec u^*)$$

IL TERMINE CHE MI DA FASTIDIO È QUESTO QUINDI DIVIDO TUTTO PER $\frac{\rho_0 u_0^2}{L_0}$, ALLORA:

$$\frac{L_0}{u_0 t_0}\left(\rho^*\frac{\partial\vec u^*}{\partial t^*}\right) + (\rho^*\vec u^*\cdot\vec\nabla^*\vec u^*) = \frac{L_0 g}{u_0^2}(\vec g^* \rho^*) - \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}\vec\nabla^* p^* + \mu\frac{1}{L_0 u_0 \rho_0}(\nabla^{2*}\vec u^*) + \frac{\mu}{3 u_0 \rho_0 L_0}\vec\nabla^*(\vec\nabla^*\cdot\vec u^*)$$

$$\frac{1}{St}\rho^*\frac{\partial \vec u^*}{\partial t^*} + \rho^*\vec u^*\cdot\vec\nabla^*\vec u^* = \frac{1}{Fr}\rho^*\vec g^* - \frac{1}{Ru}\vec\nabla^* p^* + \frac{1}{Re}\nabla^{2*}\vec u^* + \frac{1}{3Re}\vec\nabla^*(\vec\nabla^*\cdot\vec u^*)$$

RISCRITTA SENZA ASTERISCHI:

$$\boxed{\frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec u}{\partial t} + \rho\vec u\cdot\vec\nabla\vec u = \frac{1}{Fr}\rho\vec g - \frac{1}{Ru}\vec\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec u + \frac{1}{3Re}\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec u)}$$

EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA Q.TÀ DI MOTO / EQ. DI NAVIER-STOKES ADIMENSIONALE

- $\boxed{Re\to\infty}$ FLUSSI EULERIANI (VISCOSITÀ TRASCURABILE)
- $\boxed{Re\to 0}$ FLUSSI STOKESIANI (VISCOSITÀ NON TRASCURABILE)

NUMERO DI FROUDE Fr

È NUMERO RILEVANTE IN APPLICAZIONI IDRODINAMICHE:

$$\boxed{Fr = \frac{u_0^2}{L_0}}$$

NEGLI ESPERIMENTI VA RISPETTATO IL VALORE TRA Fr_R E Fr_E

SOL. ASINTOTICHE

SE $Fr\to\infty$ → F. DI MASSA TRASCURABILI

EQUAZIONE DI BILANCIO ENERGIA TERMICA IN TERMINI ENTALPICI ADIMENSIONALE

PRENDO EQ. IN TERMINI ENTALPICI E SVILUPPO $\frac{DT}{Dt}$ E $\frac{Dp}{Dt}$. c_p È COSTANTE

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec u\cdot\vec\nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec u\cdot\vec\nabla p + \mu\phi^2 + \cancel{\rho q} + k\nabla^2 T$$

$\phi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2$ ↳ LO ASSUMO $\rho q = 0$

$$\frac{\rho_0 c_p T_0}{t_0}\left(\rho^*\frac{\partial T^*}{\partial t^*}\right) + \frac{\rho_0 c_p u_0 T_0}{L_0}(\rho^*\vec u^*\cdot\vec\nabla^* T^*) = \frac{p_0}{t_0}\left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*}\right) + \frac{u_0 p_0}{L_0}(\vec u^*\cdot\vec\nabla p^*) + \frac{\mu}{2}\frac{u_0^2}{L_0^2}(\vec\nabla^*\vec u^*)^2 + \frac{kT_0}{L_0^2}\nabla^{2*}T^*$$

IL TERMINE CHE MI DA FASTIDIO È QUESTO, QUINDI MOLTIPLICO E DIVIDO PER LE COSTANTI $\frac{\rho_0 c_p u_0 T_0}{L_0}$

$$\overbrace{\frac{L_0}{t_0 u_0}}^{St}\left(\rho^*\frac{\partial T^*}{\partial t^*}\right) + (\rho^*\vec u^*\cdot\vec\nabla^* T^*) = \frac{p_0 L_0}{t_0 \rho_0 c_p u_0 T_0}\left(\frac{\partial p^*}{\partial t^*}\right) + \frac{p_0}{T_0 c_p \rho_0}(\vec u^*\cdot\vec\nabla p^*) + \frac{1}{2}\frac{\mu u_0}{\rho_0 c_p T_0 L_0}\phi^2 + \frac{k}{\rho_0 c_p u_0 L_0}\nabla^{2*}T^*$$

$\frac{\rho_0 u_0^2 L_0}{t_0 \rho_0 c_p u_0 T_0}$ St Ec

$\frac{\rho u^2}{T_0 c_p \rho_0}$ Ec

QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\boxed{\frac{1}{St}\rho\frac{\partial T}{\partial t}+\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T=\frac{E_c}{Ru\,St}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{E_c}{Ru}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p+\frac{E_c}{Re}\phi^2+\frac{1}{Re\,Pr}\nabla^2T}$$

EQUAZIONE DI BILANCIO DI ENERGIA TERMICA IN TERMINI ENTALPICI ADIMENSIONALIZZATA

PER SEMPLICITÀ DOVE APPARE:

- $p \rightarrow Ru$
- DER. TEMPORALE $\rightarrow St$
- $c_pT_0 \rightarrow E_c$
- $k \rightarrow Pr$
- IN ϕ^2 E $k \rightarrow Re$

NUMERO DI ECKERT E_c

$$\boxed{E_c=\frac{u_0^2}{c_pT_0}}=\boxed{\frac{u_0^2}{\gamma RT}(\gamma-1)}=\boxed{M^2(\gamma-1)}$$

È QUINDI LEGATO A M^2

NUMERO DI PRANDTL Pr

$$\boxed{Pr=\frac{c_p\mu}{k}}=\frac{c_p\mu}{k}\cdot\frac{\rho}{\rho}=\boxed{\frac{\nu}{K}}\longrightarrow K=\frac{k}{\rho c_p}$$

VISCOSITÀ DINAMICA (μ)

CONDUCIBILITÀ TERMICA (k)

VISCOSITÀ CINEMATICA (ν)

DIFFUSIVITÀ TERMICA (K)

NON PUÒ ESSERE PORTATO A VALORI ASINTOTICI POICHÉ DIPENDE DA PROPRIETÀ DEL FLUIDO

NUMERO DI REYNOLDS Re

$$\boxed{Re=\frac{\rho_0u_0L_0}{\mu}}\qquad \frac{\text{FORZA INERZIA}}{\text{FORZA VISCOSA}}$$

EQUAZIONE DI STATO IN FORMA ADIMENSIONALE

$$\frac{p}{\rho T}=R \qquad R=287\,\frac{J}{Kg\,K} \text{ PER ARIA}$$

ADIMENSIONALIZZIAMO:

$$\frac{p_0p^*}{\rho_0\rho^*T_0T^*}=R \rightarrow \left(\frac{p^*}{\rho^*T^*}\right)=\frac{R\rho_0T_0}{p_0} \xrightarrow[\text{DIVIDO PER } \gamma \text{ E } U_0^2]{\text{MOLTIPLICO E}} \frac{R\rho_0T_0}{p_0}\cdot\frac{\gamma}{\gamma}\cdot\frac{U_0^2}{U_0^2}$$

RICORDANDO CHE:

$$Ru=\frac{\rho_0U_0^2}{p_0} \quad \text{E} \quad M=\frac{U_0}{c_0}=\frac{U_0}{\sqrt{\gamma RT}} \qquad \text{ALLORA} \left(\frac{p^*}{\rho^*T^*}\right)=\frac{Ru}{\gamma M^2}$$

TOGLIENDO GLI ASTERISCHI

$$\boxed{\left(\frac{p}{\rho T}\right)=\frac{Ru}{\gamma M^2}}$$

EQUAZIONE DI STATO IN FORMA ADIMENSIONALE

SET DI EQUAZIONI ADIMENSIONALIZZATE

$$\begin{cases} \frac{1}{St}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{1}{Fr}\rho\frac{\vec{g}}{g} - \frac{1}{Ru}\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{3Re}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T = \frac{Ec}{Ru\,St}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \frac{Ec}{Re}\phi^2 + \frac{1}{Re\,Pr}\nabla^2 T \\ \frac{p}{\rho} = \frac{Ru}{\gamma M^2} \end{cases}$$

6 INCOGNITE $(u_1, u_2, u_3, p, \rho, T)$

PER GIUNGERE ALLE EQUAZIONI DI EULERO DEVO FARE IPOTESI:

- $Re \to \infty$ ($\mu \sim 0$ TRASCURABILE)
- $M < 0{,}3$ e $\beta t_0 \ll 1$ (FLUSSO INCOMPRIMIBILE) $\to Ec \ll 1$
- $Fr \to \infty$
- $Ru = 1$
- ρ COSTANTE (NON STO DICENDO CHE $St \to \infty$!) $\to \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e $\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{u}$

EQUAZIONI DI EULERO

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla}p \end{cases}$$

4 INCOGNITE (u_1, u_2, u_3, p)

PER RISOLVERE $\underbrace{\rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}}_{\text{T. NON LINEARE}} \longrightarrow$ INTRODUCO IL POTENZIALE

POTENZIALE φ

PER RISOLVERE IL PROBLEMA TRAMITE φ DEVO INTRODURRE ALTRE IPOTESI:

- $\vec{\omega} = 0 \to \vec{\nabla}\vec{u}$ NON RILEVANTE $\to \mu \sim 0$ TRASCURABILE

$\to$ T. KELVIN:
- $Re \to \infty$
- $M < 0{,}3$ $\beta t_0 \ll 1$ $\to \Gamma = \text{COST} \Leftrightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = 0$
- $\vec{f} = -\vec{\nabla}G$

DA CUI SE $\vec{\omega}(x_i, 0) = 0 = \omega(x_i, t)$, ALLORA:

$\boxed{\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi}$ e $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \nabla^2\varphi$

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = 0 \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u}\cdot\vec{\nabla}u = -\vec{\nabla}p \end{cases}$$

1. RISOLVO $\nabla^2\varphi$
2. DA $\varphi \to \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi$
3. USO T. BERNOULLI

SINTESI EQUAZIONI FONDAMENTALI

$\frac{\partial\rho}{\partial p} = \alpha\rho$ α MODULO DI COMPRIMIBILITÀ (Pa^{-1}) $\frac{\partial\rho}{\partial T} = -\beta\rho$ β COEFFICIENTE DI ESPANSIONE TERMICA (K^{-1})

EQUAZIONE CONSERVAZIONE/CONTINUITÀ MASSA

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV + \iiint_V \vec\nabla\cdot\rho\vec u\, dV = 0$$ F. INT

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\rho\vec u = 0$$ F. DIFF. I

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\vec\nabla\cdot\vec u = 0$$ F. DIFF. II

EQUAZIONE BILANCIO QUANTITÀ DI MOTO / NAVIER-STOKES

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\vec u\, dV + \iiint_V \vec\nabla\cdot\rho\vec u\vec u = \iiint_V \rho\vec f\, dV + \iiint_V \vec\nabla\cdot\vec{\vec T}\, dV$$ F. INT. I

$$\frac{\partial\rho\vec u}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\rho\vec u\vec u = \rho\vec f + \vec\nabla\cdot\vec{\vec T}$$ F. DIFF. I

$$\rho\frac{D\vec u}{Dt} = \rho\vec f + \vec\nabla\cdot\vec{\vec T}$$ F. DIFF. II

SVILUPPANDO $\vec{\vec T}$;

$$\rho\frac{D\vec u}{Dt} = \rho\vec f - \vec\nabla p + \mu\nabla^2\vec u + \frac{\mu}{3}\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec u)$$ F. DIFF. III NAVIER-STOKES

VORTICITÀ ED EQUAZIONE DI TRASPORTO DELLA VORTICITÀ

$$\Gamma = \oint \vec u\cdot d\vec\ell \xrightarrow[\text{T. STOKES}]{} \Gamma = \iint_S (\vec\nabla\times\vec u)\cdot\vec n\, dS$$ F. INT.

TRATTAZIONE DIFFERENZIALE $\omega(x_i,t)$

$$\vec\nabla\times(N.S.) \Rightarrow \vec\nabla\times\left(\rho\frac{Du}{Dt}\right) = \vec\nabla\times\left(-\rho\vec\nabla G - \vec\nabla p + \vec\nabla\cdot\vec{\vec\sigma}\right)$$

$$\frac{D\vec\omega}{Dt} = \nu\nabla^2\vec\omega + \vec\omega\cdot\vec\nabla\vec u$$ F. DIFF.

$\omega\cdot\vec\nabla\vec u$ VORTEX STRETCHING

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho e\, dV + \iiint_V \vec\nabla\cdot\rho e\vec u\, dV = \iiint_V \rho\vec f\cdot\vec u\, dV + \iiint_V \vec\nabla\cdot(\vec{\vec T}\cdot\vec u) + \iiint_V \rho q\, dV - \iiint_V \vec\nabla\cdot\vec K\, dV$$ F. INT.

$$\frac{\partial\rho e}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\rho e\vec u = \rho\vec f\cdot\vec u + \vec\nabla\cdot(\vec{\vec T}\cdot\vec u) + \rho q - \vec\nabla\cdot\vec K$$ F. DIFF. I

$$\rho\frac{De}{Dt} = \rho\vec f\cdot\vec u + \vec\nabla\cdot(\vec{\vec T}\cdot\vec u) + \rho q - \vec\nabla\cdot\vec K$$ F. DIFF. II

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \vec{f}\cdot\vec{u} - p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{u}) + \rho q + k\nabla^2 T$$ F. DIFF. III

EQ. ENERGIA IN TERMINI DI e

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\left(e + G + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$ T. BERNOULLI

$$(N.S.)\cdot\vec{u} \Rightarrow \left(\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}\right)\cdot\vec{u} = \left[\rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\right]\cdot\vec{u}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{D\frac{u^2}{2}}{Dt} = \rho\vec{f}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}p + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})$$ EQ. NAVIER-STOKES CON $D\frac{u^2}{2}/Dt$ EN. CINETICA

$$U = e - \frac{u^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho\frac{DU}{Dt} = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\vec{u}) + \rho q + k\nabla^2 T$$ F. DIFF. I FORMA U

RICORDANDO $\mu\phi^2$ E $dU = c_v dT$

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$ F. DIFF. II FORMA U

$$h = U - p v = U - \frac{p}{\rho}$$ → DIFFERENZIANDO E POI PASSANDO A DERIVATE MATERIALI

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$ F. DIFF. h

$$dS = \frac{dQ}{T} \longrightarrow \rho T\frac{DS}{Dt} = \mu\phi^2 + \rho q + k\nabla^2 T$$ F. DIFF S

SOTTO PARTICOLARI IPOTESI:

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \xrightarrow[\text{DI } St\to\infty]{\text{IN CASO}} \vec{u}\cdot\vec{\nabla}S = 0$$ FLUSSO ISOENTROPICO

CLASIUS-DUHÉN

$$\iiint_V T\frac{DS}{Dt}\,dV \geq 0$$

E CROCCO $\vec{\nabla}S \rightarrow \vec{\omega}$

EQUAZIONE CONTINUITÀ / CONSERVAZIONE MASSA ADIM

$$\frac{1}{St}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{u} = 0$$

EQUAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO/NAVIER-STOKES ADIM

$$\frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{Ru}\vec{\nabla} p + \frac{1}{Re}\nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3Re}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{Fr}\rho\vec{g}$$

EQUAZIONE BILANCIO ENERGIA IN T. ENTALPICI ADIM

$$\frac{1}{St}\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = +\frac{Ec}{Ru\, St}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Ec}{Ru}\vec{u} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{Ec}{Re}\phi^2 + \frac{1}{Re Pr}\nabla^2 T$$

EQUAZIONE DI STATO ADIM

$$\frac{p}{\rho} = \frac{Ru}{\gamma M^2}$$

EQUAZIONI DI EULERO (ADIM.)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{cases}$$

- $Re \to \infty$
- $Ru = 1$
- $Fr \to \infty$
- $M < 0,3$ E $\beta t_0 \ll 1$
- ρ COSTANTE

EQUAZIONI DI EULERO CON POTENZIALE φ (ADIM.)

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi \\ \frac{1}{St}\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} = -\vec{\nabla} p \end{cases}$$

- IPOTESI SOPRA
- $\omega(x_i, t) = 0$ → 3 IPOTESI LORD KELVIN
  - ↳ $Re \to \infty$
  - $\vec{f} = -\vec{\nabla} G$
  - $M < 0,3$ E $\beta t_0 \ll 1$

T. BERNOULLI

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{u}|^2 = \text{cost} \quad \text{o} \quad p + \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 = \text{cost}$$