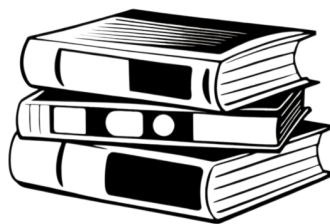


Meccanica Razionale

Universita degli studi Roma3

Docente: **Umberto Iemma**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



NOTESTOBOOK
ELEVATE YOUR NOTES

notestobook.it

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1	Introduzione alla Meccanica Razionale	7
2	Algebra Vettoriale	7
2.1	Definizione e classificazione dei vettori	7
2.2	Operazioni fondamentali tra vettori	8
2.3	Prodotto scalare	8
2.4	Prodotto vettoriale	9
3	Sistemi di riferimento e rappresentazione dei vettori	10
3.1	Basi ortonormali	10
3.2	Decomposizione di un vettore	10
3.3	Invarianza del vettore e varianza delle componenti	11
3.4	Prodotto scalare in termini di componenti	12
4	Gradi di libertà e moto	12
4.1	Definizione di grado di libertà	12
4.2	Equazione del moto	12
5	Momento di un vettore applicato	13
5.1	Definizione di momento	13
5.2	Regola del trasporto del momento	13
5.3	Espressione del modulo del momento	14
6	Analisi dimensionale	15
7	Momento di un vettore applicato: approfondimenti	15
7.1	Il braccio del momento	15
7.2	Prodotto vettoriale in componenti	16
8	Sistemi di vettori applicati	16
8.1	Risultante e momento risultante	16
8.2	Regola del trasporto del momento risultante	17
8.3	Invariante scalare del sistema	18
8.4	Decomposizione del momento risultante	18
9	Asse centrale di un sistema di vettori applicati	19

9.1	Definizione e significato	19
9.2	Dimostrazione dell'esistenza dell'asse centrale	19
9.3	Proprietà dell'asse centrale	21
10	Momento assiale di un vettore applicato	22
11	Proprietà dell'algebra vettoriale	23
11.1	Proprietà della somma	23
11.2	Proprietà del prodotto scalare	23
11.3	Proprietà del prodotto vettoriale	23
11.4	Prodotto misto e identità notevoli	23
12	Derivate e integrali di vettori	24
12.1	Derivata di un vettore rispetto a una variabile scalare	24
12.2	Integrale di un vettore	24
13	Analisi spettrale delle matrici	24
13.1	Autovalori e autovettori	24
13.2	Teoremi sulla diagonalizzazione	25
13.3	Calcolo degli autovalori: equazione caratteristica	26
13.4	Esempio di calcolo: matrice 2×2	26
13.5	Normalizzazione degli autovettori	27
13.6	Trasformazione di coordinate e diagonalizzazione	27
13.7	Applicazione: risoluzione di sistemi lineari	28
14	Cinematica del punto materiale	28
14.1	Vettore posizione, traiettoria e spostamento	28
14.2	Velocità e accelerazione	29
15	Equazioni differenziali in meccanica	29
15.1	Classificazione delle equazioni differenziali	29
15.2	Struttura della soluzione generale	30
15.3	Soluzione dell'equazione omogenea	30
15.4	Equazione del secondo ordine: caso fondamentale	31
15.5	Applicazione: sistema massa-molla	32
16	Applicazione: il sistema massa-molla	32
16.1	Formulazione del problema	32
16.2	Equazione del moto	34
16.3	Soluzione generale e condizioni iniziali	34
16.4	Forma in ampiezza e fase	35
17	Classificazione delle soluzioni per equazioni del secondo ordine	36
17.1	Caso 1: Radici reali e distinte ($\Delta > 0$)	36

17.2	Caso 2: Radici coincidenti ($\Delta = 0$)	37
17.3	Caso 3: Radici complesse coniugate ($\Delta < 0$)	37
18	Equazioni differenziali non omogenee	38
18.1	Struttura della soluzione	38
18.2	Forma generale della forzante e della soluzione particolare	38
18.3	Applicazione: oscillatore forzato senza smorzamento	39
19	Oscillatore semplice forzato	40
19.1	Formulazione del problema	40
19.2	Caso non risonante: $\Omega \neq \omega$	41
19.3	Caso risonante: $\Omega = \omega$	42
20	Risposta in frequenza dell'oscillatore smorzato	43
20.1	Riepilogo: oscillatore libero non smorzato	43
20.2	Oscillatore smorzato e forzato	44
20.3	Struttura della soluzione	45
20.4	Classificazione in base al rapporto di smorzamento	45
20.5	Classificazione dei regimi di smorzamento	45
20.6	Lo smorzamento critico	46
21	Analisi dell'oscillatore smorzato forzato	46
21.1	Caso sottosmorzato: radici complesse coniugate	46
21.2	Soluzione particolare	47
21.3	Forma in ampiezza e fase	48
22	Risposta in frequenza	48
22.1	Espressioni adimensionali	48
22.2	Ampiezza adimensionalizzata	49
22.3	Diagramma di risposta in frequenza: ampiezza	49
22.4	Il caso limite: risonanza ideale	50
22.5	Diagramma di risposta in frequenza: fase	51
22.6	Effetto dello smorzamento sul diagramma delle fasi	52
23	Sintesi sull'analisi spettrale delle matrici	53
23.1	Spazi vettoriali e basi	53
23.2	Applicazioni lineari	53
23.3	Endomorfismi e cambio di base	54
23.4	Autovalori e autovettori	54
23.5	Diagonalizzazione	55
23.6	Ortogonalità e matrici simmetriche	55
23.7	Esempio di diagonalizzazione	56

23.8	Matrice di trasformazione tra sistemi di riferimento	56
24	Richiami su operatori lineari e momenti	57
24.1	Operatore differenziale lineare	57
24.2	Condizioni di annullamento del momento	57
24.3	Coseni direttori	58
24.4	Diagramma delle fasi in presenza di smorzamento	58
25	Dimostrazione dell'ortogonalità degli autovettori	59
26	Risoluzione del sistema per i coefficienti C e D	59
27	Dimostrazione del prodotto scalare in componenti	60
28	Teorema di Varignon	60
29	Significato fisico dell'asse centrale	61
30	Derivazione della posizione del massimo dell'ampiezza	61
31	Caso particolare: radici nulle coincidenti	62
32	Coseni direttori	63

1 Introduzione alla Meccanica Razionale

La **Meccanica Razionale** è la scienza che descrive i fenomeni naturali del moto dei corpi in modo puramente analitico, senza ricorrere a rappresentazioni grafiche o intuitive. Questo approccio rigoroso è stato reso possibile grazie allo sviluppo del calcolo differenziale, opera di Leibniz e Newton. Nel contesto di questa trattazione, si ipotizzano **corpi rigidi**, trascurando le deformazioni che i corpi reali subiscono sotto l'azione di forze.

L'obiettivo fondamentale è lo studio del moto, ovvero la descrizione di come la posizione di un corpo evolve nel tempo. Per fare ciò, è necessario introdurre gli strumenti matematici dell'algebra vettoriale, che costituiscono il linguaggio naturale della meccanica.

2 Algebra Vettoriale

2.1 Definizione e classificazione dei vettori

Un **vettore** è un ente geometrico definito da tre proprietà: modulo (o intensità), direzione e verso. Geometricamente, può essere rappresentato come un segmento orientato. I vettori si classificano in base al loro punto di applicazione:

- **Vettore libero:** non dipende dal punto di applicazione; due vettori liberi \vec{a} e \vec{b} sono equivalenti, $\vec{a} \equiv \vec{b}$, se hanno uguale modulo, direzione e verso.
- **Vettore applicato:** è definito dalla coppia (P, \vec{N}) , dove P è il punto di applicazione e \vec{N} è il vettore stesso. Due vettori applicati \vec{a} e \vec{b} si dicono **equipollenti** se hanno stessa intensità, stessa direzione e stesso verso, ma diverso punto di applicazione; in tal caso $\vec{a} \neq \vec{b}$.
- **Vettore di posizione:** è un vettore applicato con punto di applicazione nell'origine del sistema di riferimento. È intrinsecamente **variante**, poiché la sua rappresentazione dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

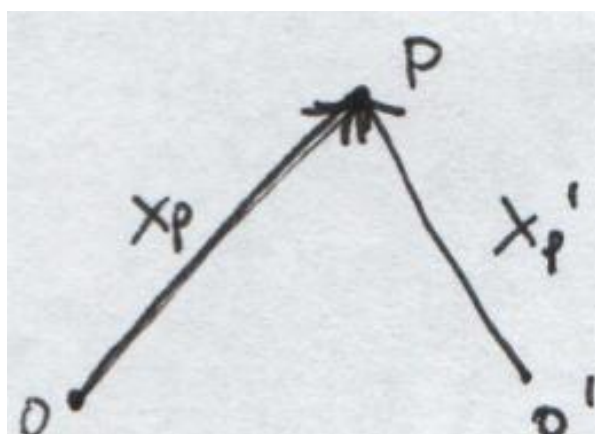


Figura 1: Due vettori di posizione \vec{x}_p e \vec{x}'_p che individuano lo stesso punto P rispetto a due origini diverse O e O' .

Come illustrato in Figura 1, i vettori \vec{x}_p e \vec{x}'_p sono vettori di posizione relativi a due sistemi di riferimento distinti. Sebbene il vettore posizione vari con il sistema di riferimento, la posizione fisica del punto P che esso identifica rimane invariata.

2.2 Operazioni fondamentali tra vettori

Le operazioni elementari definite sui vettori liberi sono le seguenti:

Prodotto vettore-scalare. Dato un vettore \vec{N} e uno scalare α , il prodotto $\alpha\vec{N} = \vec{u}$ genera un vettore con la stessa giacitura e direzione di \vec{N} , modulo scalato di un fattore $|\alpha|$, e verso concorde a \vec{N} se $\alpha > 0$, discorde se $\alpha < 0$.

Somma tra vettori. La somma $\vec{N} = \vec{a} + \vec{b}$ si costruisce geometricamente unendo il punto finale del primo addendo con il punto iniziale del secondo (regola del parallelogramma o punta-coda).

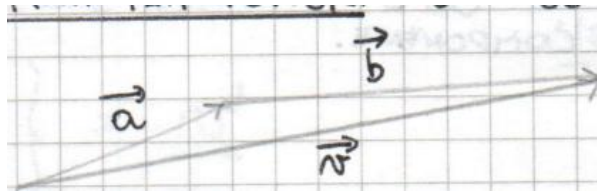


Figura 2: Rappresentazione grafica della somma vettoriale: il vettore \vec{N} è la risultante di \vec{a} e \vec{b} .

Vettore nullo. Il **vettore nullo** $\vec{0}$ è associato a un segmento orientato di lunghezza nulla, che collassa in un punto. Per ogni vettore \vec{a} esiste un **vettore opposto** \vec{b} tale che $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$; i due vettori hanno stessa giacitura e intensità, ma verso opposto.

Interpretazione fisica. Il vettore nullo $\vec{0}$ non coincide con lo zero scalare: esso rappresenta l'assenza di una grandezza vettoriale, come ad esempio una velocità nulla o una forza risultante nulla.

2.3 Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** tra due vettori \vec{a} e \vec{b} è definito come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \quad (1)$$

dove $a = |\vec{a}|$ e $b = |\vec{b}|$ sono i moduli dei vettori e α è l'angolo compreso tra essi. Il risultato è uno **scalare**.

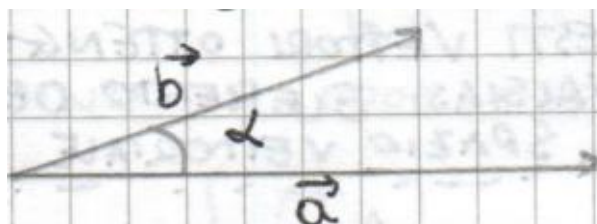


Figura 3: Interpretazione geometrica del prodotto scalare: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ rappresenta la proiezione di \vec{b} su \vec{a} , moltiplicata per il modulo di \vec{a} .

Interpretazione fisica. Il prodotto scalare misura quanto due vettori sono “allineati”. Se $\alpha = 0$ (vettori paralleli e concordi), il prodotto è massimo e pari a ab ; se $\alpha = \pi/2$ (vettori ortogonali), il prodotto è nullo; se $\alpha = \pi$ (vettori antiparalleli), il prodotto è $-ab$.

Consideriamo il caso particolare in cui \vec{b} sia un **versore**, ovvero un vettore di modulo unitario. Se $|\vec{b}| = 1$, allora:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cos \alpha \quad (2)$$

che rappresenta la **componente** di \vec{a} lungo la direzione di \vec{b} .

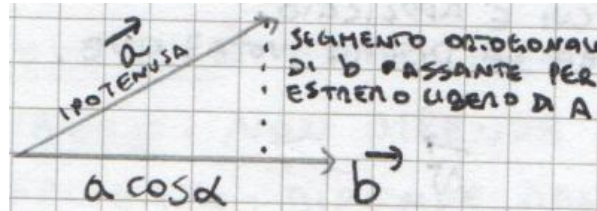


Figura 4: Proiezione del vettore \vec{a} lungo la direzione del versore \hat{b} : la componente scalare è $a \cos \alpha$.

Il **versore** \hat{b} associato a un vettore \vec{b} è definito come:

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \quad (3)$$

Il **vettore componente** di \vec{a} lungo \hat{b} è quindi:

$$(\vec{a} \cdot \hat{b})\hat{b} \quad (4)$$

che ha direzione di \hat{b} e modulo pari alla componente scalare $a \cos \alpha$.

2.4 Prodotto vettoriale

Il **prodotto vettoriale** tra due vettori \vec{u} e \vec{N} genera un nuovo vettore \vec{w} :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{N} \quad (5)$$

Le proprietà di \vec{w} sono:

- **Intensità:** $|\vec{w}| = u \cdot N \cdot \sin \alpha$, dove α è l'angolo minore tra i due vettori.
- **Direzione:** ortogonale al piano individuato da \vec{u} e \vec{N} .
- **Verso:** determinato dalla regola della mano destra (o della vite destrorsa), tale che la terna $(\vec{u}, \vec{N}, \vec{w})$ sia una terna destra.

Interpretazione fisica. Il modulo del prodotto vettoriale rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui due vettori. Inoltre, il prodotto vettoriale è **anticommutativo**: $\vec{u} \times \vec{N} = -\vec{N} \times \vec{u}$.

3 Sistemi di riferimento e rappresentazione dei vettori

3.1 Basi ortonormali

Per descrivere quantitativamente i vettori, si introduce un **sistema di riferimento cartesiano** costituito da un'origine O e da una **base ortonormale** $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$ di versori mutuamente ortogonali.

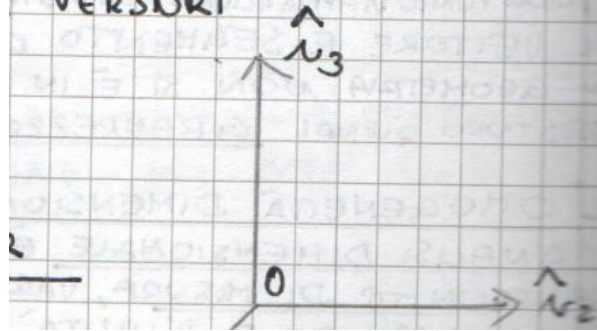


Figura 5: Sistema di riferimento cartesiano tridimensionale con versori $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$.

L'ortogonalità dei versori è espressa dal **delta di Kronecker**:

$$\hat{u}_k \cdot \hat{u}_j = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad (6)$$

Per una **terna destra**, vale la relazione ciclica per il prodotto vettoriale:

$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3, \quad \hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1, \quad \hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2 \quad (7)$$

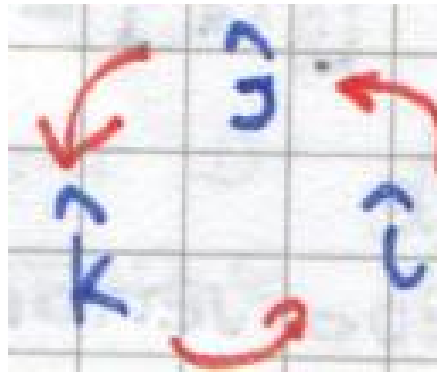


Figura 6: Relazione ciclica tra i versori di una terna destra.

3.2 Decomposizione di un vettore

Qualsiasi vettore \vec{N} può essere espresso come combinazione lineare dei versori della base:

$$\vec{N} = \sum_{k=1}^3 N_k \hat{u}_k = \sum_{k=1}^3 (\vec{N} \cdot \hat{u}_k) \hat{u}_k \quad (8)$$

dove $N_k = \vec{N} \cdot \hat{u}_k$ è la **componente** di \vec{N} lungo il k -esimo asse.

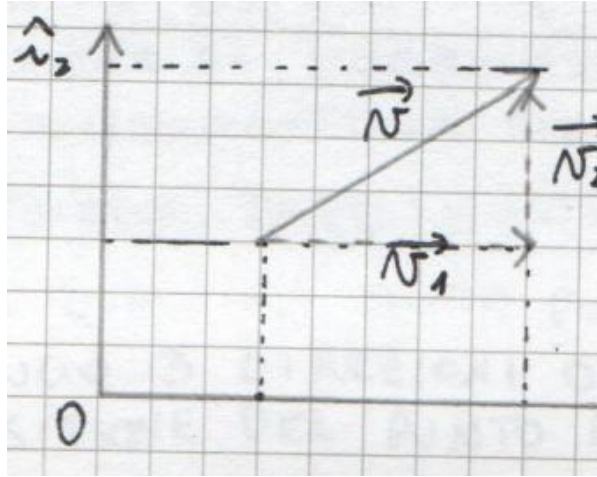


Figura 7: Proiezione del vettore \vec{N} sull'asse \hat{u}_1 : la componente è $N_1 = \vec{N} \cdot \hat{u}_1$.

Interpretazione fisica. Le componenti N_1, N_2, N_3 rappresentano “quanto” del vettore \vec{N} è diretto lungo ciascun asse coordinato. La decomposizione permette di ridurre problemi vettoriali a problemi scalari su ciascuna componente.

3.3 Invarianza del vettore e varianza delle componenti

È fondamentale distinguere tra il **vettore fisico** \vec{N} , che è un ente geometrico **invariante** rispetto al sistema di riferimento, e il **vettore algebrico** \underline{N} , ovvero la matrice colonna delle sue componenti:

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

che è **variante**, poiché dipende dalla scelta degli assi.

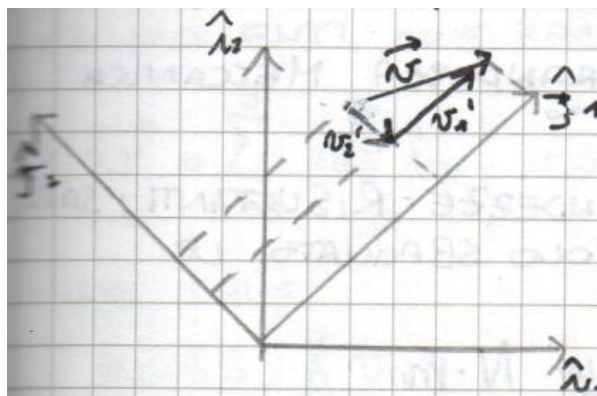


Figura 8: Lo stesso vettore \vec{N} rappresentato in un diverso sistema di riferimento $\{\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3\}$ ha componenti diverse.

Interpretazione fisica. Il vettore \vec{N} rappresenta una grandezza fisica (velocità, forza, ecc.) che esiste indipendentemente da come scegliamo di descriverla. Le componenti sono solo numeri che dipendono dal “punto di vista” (sistema di riferimento) scelto dall’osservatore.

3.4 Prodotto scalare in termini di componenti

Fissato un sistema di riferimento, il prodotto scalare tra due vettori \vec{N} e \vec{u} può essere calcolato come:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^3 N_k u_k = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (10)$$

In notazione matriciale:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \underline{N}^T \underline{u} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

dove il risultato è uno scalare (matrice 1×1).

4 Gradi di libertà e moto

4.1 Definizione di grado di libertà

Il **grado di libertà** di un punto libero in uno spazio è il numero di parametri scalari indipendenti necessari per individuare univocamente la sua posizione. In uno spazio tridimensionale, un punto libero possiede **tre gradi di libertà**: servono tre coordinate (ad esempio x, y, z) per specificare la sua posizione.

Interpretazione fisica. I gradi di libertà rappresentano le “direzioni indipendenti” lungo cui il punto può muoversi. Se si impongono vincoli (ad esempio, il punto deve giacere su una superficie), il numero di gradi di libertà si riduce.

4.2 Equazione del moto

Il **moto** di un punto materiale è descritto dall’evoluzione temporale del suo vettore posizione:

$$\vec{x}_P = \vec{x}_P(t) \quad (12)$$

dove t è l’unica variabile indipendente scalare.

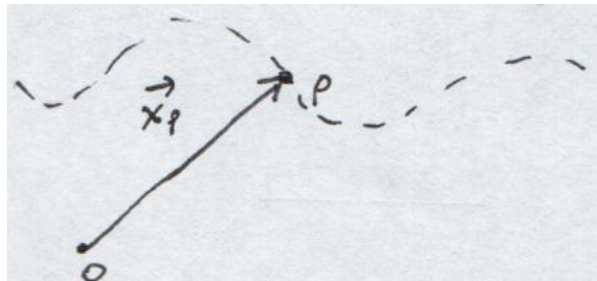


Figura 9: Vettore posizione $\vec{x}_P(t)$ di un punto P in moto: la linea tratteggiata indica la traiettoria.

Per grandezze vettoriali variabili nel tempo, se i versori della base sono costanti, si ha:

$$\vec{N}(t) = \sum_{k=1}^3 N_k(t) \hat{N}_k \quad (13)$$

Nel caso più generale in cui anche i versori varino nel tempo¹:

$$\vec{N}(t) = \sum_{k=1}^3 \left(\vec{N}(t) \cdot \hat{N}_k(t) \right) \hat{N}_k(t) \quad (14)$$

5 Momento di un vettore applicato

5.1 Definizione di momento

Dato un vettore applicato (P, \vec{N}) e un punto O dello spazio (detto **polo**), si definisce **momento di \vec{N} rispetto al polo O** il vettore:

$$\vec{m}_O = \vec{OP} \times \vec{N} \quad (15)$$

dove \vec{OP} è il **raggio vettore** che congiunge il polo O al punto di applicazione P .

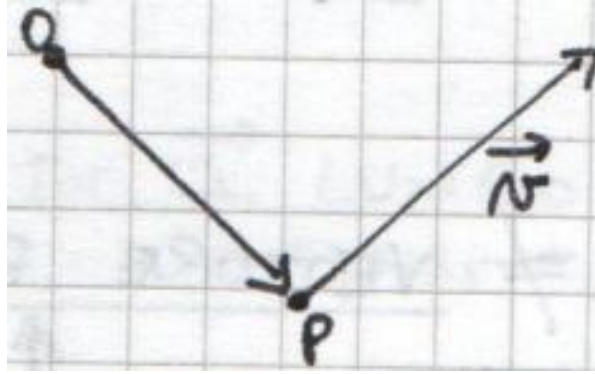


Figura 10: Momento del vettore \vec{N} applicato in P rispetto al polo O : $\vec{m}_O = \vec{OP} \times \vec{N}$.

Interpretazione fisica. Il momento misura la “tendenza” di un vettore applicato (tipicamente una forza) a produrre una rotazione attorno al polo. Il modulo del momento è proporzionale sia all’intensità del vettore sia alla distanza del polo dalla retta d’azione del vettore. Nel caso di una forza, il momento si misura in $N \cdot m$.

È importante osservare che:

- Il momento \vec{m}_O è un **vettore libero**, mentre \vec{N} è un vettore applicato.
- Cambiando il polo, il momento cambia (se $\vec{N} \neq \vec{0}$).

5.2 Regola del trasporto del momento

Se si cambia polo da O a Ω , il momento si trasforma secondo la **regola del trasporto**:

$$\vec{m}_\Omega = \vec{\Omega P} \times \vec{N} = (\vec{\Omega O} + \vec{OP}) \times \vec{N} = \vec{\Omega O} \times \vec{N} + \vec{OP} \times \vec{N} \quad (16)$$

ovvero:

$$\vec{m}_\Omega = \vec{m}_O + \vec{\Omega O} \times \vec{N} \quad (17)$$

¹Questa situazione si presenta, ad esempio, quando si utilizzano coordinate curvilinee o sistemi di riferimento non inerziali.

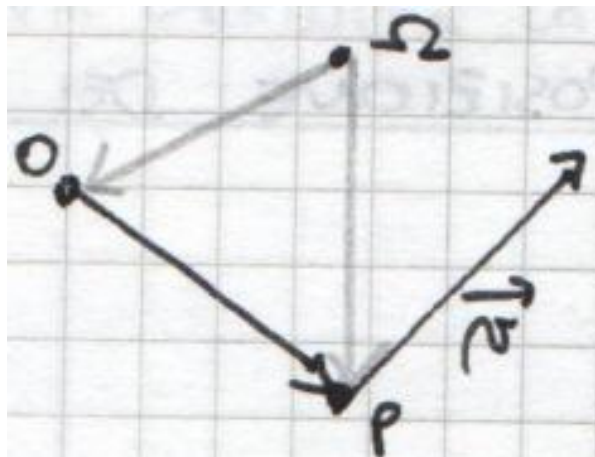


Figura 11: Trasporto del momento da un polo O a un polo Ω .

Interpretazione fisica. La regola del trasporto mostra che il momento rispetto a un nuovo polo Ω differisce da quello rispetto a O per un termine correttivo che dipende dalla posizione relativa dei due poli e dal vettore \vec{N} stesso.

Una conseguenza importante è che **se la risultante di un sistema di vettori è nulla** ($\vec{R} = \vec{0}$, come nel caso di una coppia di forze uguali e opposte), il momento risultante **non dipende dalla scelta del polo**.

5.3 Espressione del modulo del momento

Considerando il piano π in cui giacciono \vec{OP} e \vec{N} , il momento ha direzione ortogonale a tale piano. Detto γ l'angolo tra \vec{OP} e \vec{N} , il modulo del momento è:

$$|\vec{m}_O| = |\vec{OP}| \cdot |\vec{N}| \cdot \sin \gamma = b \cdot N \quad (18)$$

dove $b = |\vec{OP}| \sin \gamma$ rappresenta la **distanza** (o braccio) del polo O dalla retta d'azione di \vec{N} .

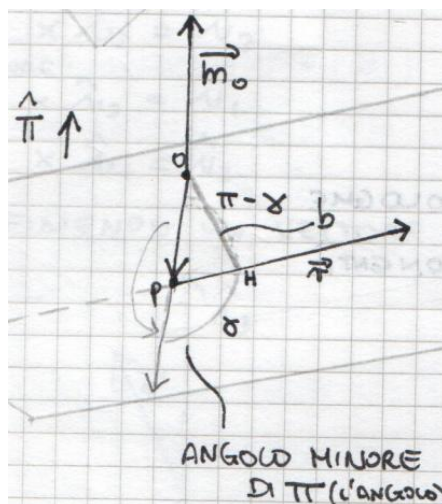


Figura 12: Interpretazione geometrica del braccio b : distanza del polo O dalla retta d'azione del vettore \vec{N} .

Interpretazione fisica. Il braccio b è la distanza perpendicolare tra il polo e la linea lungo cui agisce il vettore. Maggiore è il braccio, maggiore è il momento a parità di intensità del vettore.

Questo spiega perché, ad esempio, è più facile svitare un bullone usando una chiave con manico lungo.

Un'importante proprietà è che **se il polo O si muove lungo una retta parallela alla retta d'azione di \vec{N}** , la distanza b e quindi il momento rimangono invariati.

6 Analisi dimensionale

L'**analisi dimensionale** consiste nel determinare le **dimensioni fisiche** di una grandezza, che sono universali e invarianti, a differenza delle **unità di misura**, che sono convenzioni variabili.

Le **grandezze fondamentali** della meccanica sono:

- $[M] = \text{massa}$
- $[L] = \text{lunghezza}$
- $[T] = \text{tempo}$

A queste si aggiungono, per fenomeni elettromagnetici e termici:

- $[Q] = \text{carica elettrica}$
- $[\theta] = \text{temperatura assoluta}$

L'**omogeneità dimensionale** richiede che in ogni equazione fisica valida, i due membri abbiano le stesse dimensioni. Questa è una potente verifica della correttezza formale delle equazioni.

7 Momento di un vettore applicato: approfondimenti

Riprendiamo l'analisi del momento di un vettore applicato, concentrandoci sulla sua interpretazione geometrica e sulle proprietà fondamentali che ne derivano.

7.1 Il braccio del momento

Consideriamo un vettore applicato (P, \vec{N}) e un polo O . Il momento $\vec{m}_O = \vec{OP} \times \vec{N}$ può essere espresso in termini del **braccio** b , definito come la distanza tra il polo O e la retta d'azione del vettore \vec{N} .

Geometricamente, se γ è l'angolo tra \vec{OP} e \vec{N} , si forma un triangolo rettangolo con ipotenusa \vec{OP} , e il braccio risulta essere il cateto:

$$b = |\vec{OP}| \sin \gamma \quad (19)$$

Il braccio b è uno **scalare**, non un vettore: rappresenta la distanza punto-retta tra il polo O e il punto H sulla retta d'azione di \vec{N} .

Il modulo del momento può quindi essere scritto come:

$$|\vec{m}_O| = |\vec{N}| \cdot b \quad (20)$$

dove $\hat{\pi}$ è il versore ortogonale al piano individuato da \vec{OP} e \vec{N} .

Interpretazione fisica. Il braccio b misura l'efficacia con cui il vettore \vec{N} (ad esempio una forza) può indurre una rotazione attorno al polo O . Maggiore è la distanza dalla retta d'azione, maggiore è il momento a parità di intensità del vettore. È fondamentale tuttavia partire sempre dalla definizione $\vec{m}_O = \vec{OP} \times \vec{N}$ per evitare errori di segno o direzione.

7.2 Prodotto vettoriale in componenti

Dato un sistema di riferimento con base ortonormale $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$, un vettore generico \vec{v} si scrive come:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{u}_k \quad \text{con} \quad v_k = \vec{v} \cdot \hat{u}_k \quad (21)$$

Il prodotto vettoriale tra due vettori \vec{v} e \vec{u} si calcola sviluppando:

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_1 \hat{u}_1 + v_2 \hat{u}_2 + v_3 \hat{u}_3) \times (u_1 \hat{u}_1 + u_2 \hat{u}_2 + u_3 \hat{u}_3) \quad (22)$$

Utilizzando la relazione ciclica $\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3$, $\hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1$, $\hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2$, e osservando che $\hat{u}_i \times \hat{u}_i = \vec{0}$, il prodotto vettoriale si esprime mediante il determinante formale:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (23)$$

Sviluppando secondo Laplace lungo la prima riga, si ottengono le componenti del vettore risultante $\vec{W} = \vec{v} \times \vec{u}$:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Interpretazione fisica. Il prodotto vettoriale **non è commutativo**: $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$. Questa proprietà riflette il fatto che invertendo l'ordine dei fattori si inverte il verso del vettore risultante, mantenendone modulo e direzione.

8 Sistemi di vettori applicati

8.1 Risultante e momento risultante

Consideriamo un sistema di N vettori applicati:

$$\mathcal{V} = \{(P_k, \vec{v}_k), \quad k = 1, \dots, N\} \quad (25)$$

dove ciascun vettore \vec{v}_k è applicato in un punto P_k distinto.

Si definisce **vettore risultante** (o semplicemente risultante) la somma vettoriale:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \quad (26)$$

La risultante \vec{R} è un **vettore libero**: non ha un punto di applicazione naturale².

²Tuttavia, nei calcoli pratici, la risultante viene spesso "applicata" in un punto specifico per determinare gli effetti meccanici del sistema.

Scelto un polo O , si definisce **momento risultante** rispetto a O :

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k^O = \sum_{k=1}^N \vec{OP}_k \times \vec{v}_k \quad (27)$$

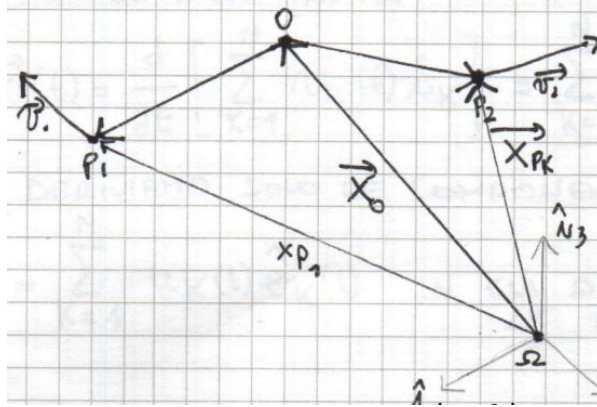


Figura 13: Sistema di vettori applicati in punti P_1, P_2, \dots, P_N . Il momento risultante si calcola rispetto a un polo O scelto arbitrariamente, con un sistema di riferimento $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3\}$.

8.2 Regola del trasporto del momento risultante

Se si cambia polo da O a D , il momento risultante si trasforma secondo la **regola del trasporto**:

$$\vec{M}_D = \sum_{k=1}^N \vec{DP}_k \times \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{DO} + \vec{OP}_k) \times \vec{v}_k \quad (28)$$

Sviluppando e osservando che \vec{DO} non dipende dall'indice k :

$$\vec{M}_D = \vec{M}_O + \vec{DO} \times \vec{R} \quad (29)$$

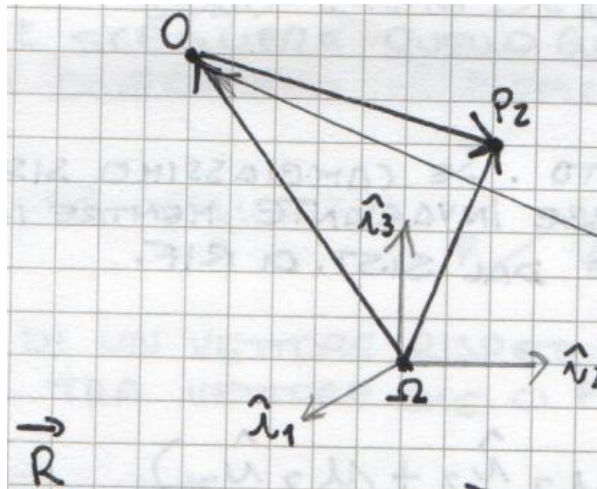


Figura 14: Trasporto del momento risultante dal polo O al polo D . La risultante \vec{R} interviene nella correzione del momento.

Interpretazione fisica. Il momento risultante dipende dalla scelta del polo, ma la sua variazione è completamente determinata dalla risultante \vec{R} e dalla posizione relativa dei due poli. Se $\vec{R} = \vec{0}$ (sistema equilibrato in traslazione), il momento risultante **non dipende dal polo**: questa è la situazione tipica delle coppie di forze.

8.3 Invariante scalare del sistema

Proiettando il momento risultante sulla direzione della risultante, si ottiene una quantità che non dipende dalla scelta del polo. Infatti:

$$\vec{M}_D \cdot \vec{R} = (\vec{M}_O + D\vec{O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (D\vec{O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} \quad (30)$$

Il termine $(D\vec{O} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$ è identicamente nullo³, quindi:

$$\vec{M}_D \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \quad (31)$$

Il prodotto scalare $\vec{M}_O \cdot \vec{R}$ è detto **invariante scalare** (o trinomio invariante) del sistema di vettori applicati. Esso rappresenta la componente del momento risultante lungo la direzione della risultante.

Interpretazione fisica. L'invariante scalare misura la “parte” del momento che non può essere eliminata cambiando polo. In termini meccanici, per un sistema di forze, esso quantifica l'effetto torcente intrinseco del sistema, indipendente dal punto di osservazione.

8.4 Decomposizione del momento risultante

Il momento risultante \vec{M}_O può essere scomposto in due componenti rispetto alla direzione della risultante \vec{R} :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^P + \vec{M}_O^N \quad (32)$$

dove:

- \vec{M}_O^P è la **componente parallela** a \vec{R} , con modulo $|\vec{M}_O^P| = \vec{M}_O \cdot \hat{R}$
- \vec{M}_O^N è la **componente normale** (ortogonale) a \vec{R}

Per la componente normale, esiste un punto Q tale che:

$$\vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} \quad (33)$$

Questo punto Q giace su una retta q perpendicolare al piano individuato da \vec{M}_O^N e \vec{R} .

Interpretazione fisica. La componente parallela \vec{M}_O^P rappresenta l'effetto torcente “puro” del sistema, che non può essere eliminato spostando il polo. La componente normale \vec{M}_O^N invece può essere annullata scegliendo opportunamente il polo.

³Il prodotto misto $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ per qualsiasi coppia di vettori, poiché $\vec{a} \times \vec{b}$ è ortogonale a \vec{b} .

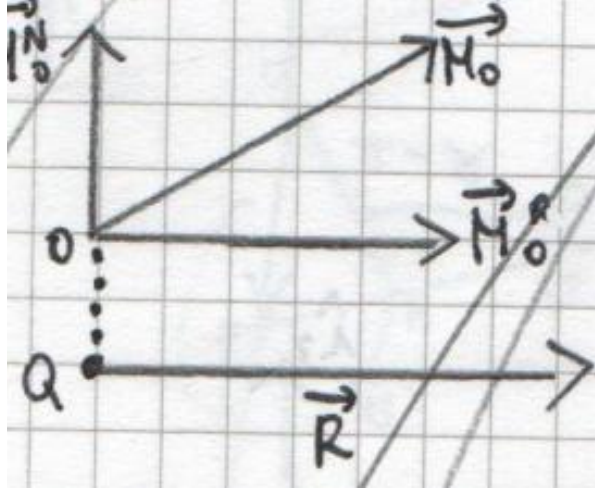


Figura 15: Decomposizione del momento \vec{M}_O nelle componenti \vec{M}_O^P (parallela a \vec{R}) e \vec{M}_O^N (normale a \vec{R}).

9 Asse centrale di un sistema di vettori applicati

9.1 Definizione e significato

L'**asse centrale** di un sistema di vettori applicati è il luogo dei punti che, scelti come polo, forniscono il momento risultante di **minima intensità** e **parallelo alla risultante** \vec{R} .

Per la dimostrazione, consideriamo:

- Un sistema $\mathcal{V} = \{(P_i, \vec{W}_i), 1 \leq i \leq N\}$ di vettori applicati
- La risultante $\vec{R} \neq \vec{0}$
- Il momento risultante \vec{M}_O rispetto a un polo O , con \vec{M}_O non parallelo a \vec{R}

9.2 Dimostrazione dell'esistenza dell'asse centrale

Scomponiamo \vec{M}_O in componente parallela e normale alla risultante:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^P + \vec{M}_O^N \quad (34)$$

Definiamo una retta q perpendicolare al piano individuato da \vec{M}_O^N e \vec{R} (e quindi $q \perp \vec{R}$). Su questa retta scegliamo un punto Q tale che:

$$\vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} \quad (35)$$

Ripetiamo il ragionamento per un secondo polo O' . La risultante \vec{R} rimane invariata, e scomponiamo:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}^P + \vec{M}_{O'}^N \quad (36)$$

Definiamo analogamente un punto Q' tale che:

$$\vec{M}_{O'}^N = \vec{O'Q'} \times \vec{R} \quad (37)$$

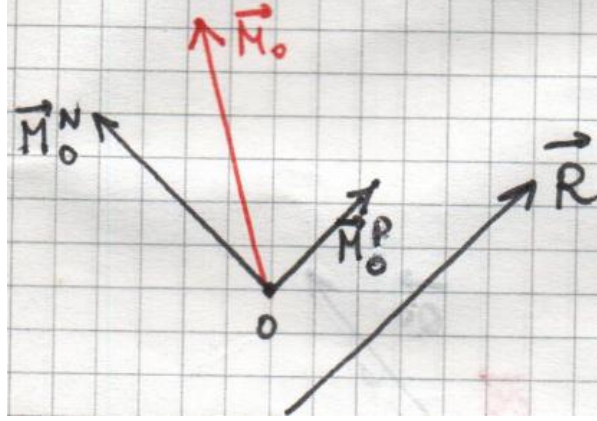


Figura 16: Decomposizione del momento \vec{M}_O rispetto alla risultante \vec{R} : \vec{M}_O^P è parallela e \vec{M}_O^N è normale a \vec{R} .

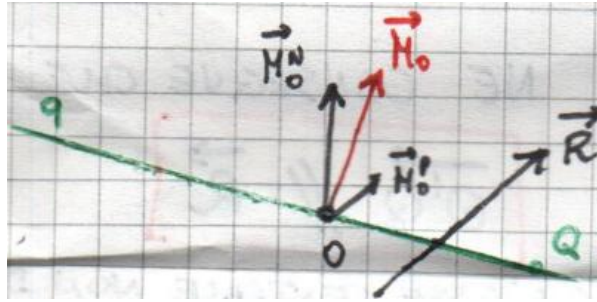


Figura 17: La retta q passa per il punto Q ed è perpendicolare al piano contenente \vec{M}_O^N e \vec{R} .

Dalla regola del trasporto e dall'invariante scalare:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (38)$$

$$\vec{M}_O^P = \vec{M}_{O'}^P \quad (39)$$

La seconda relazione segue dal fatto che $\vec{M}_O \cdot \hat{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \hat{R}$ (invariante scalare).

Sostituendo le decomposizioni:

$$\vec{O'Q'} \times \vec{R} + \vec{M}_{O'}^P = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (40)$$

Poiché $\vec{M}_O^P = \vec{M}_{O'}^P$, questi termini si elidono:

$$\vec{O'Q'} \times \vec{R} = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (41)$$

Riorganizzando e raggruppando:

$$(\vec{O'Q'} - \vec{OQ} - \vec{O'O}) \times \vec{R} = \vec{0} \quad (42)$$

Riscrivendo i vettori posizione:

$$\vec{O'Q'} - \vec{OQ} - \vec{O'O} = \vec{Q'Q} \quad (43)$$

Quindi:

$$\vec{Q'Q} \times \vec{R} = \vec{0} \quad (44)$$

Il risultato fondamentale è che:

$$\boxed{\vec{Q'Q} \parallel \vec{R}} \quad (45)$$

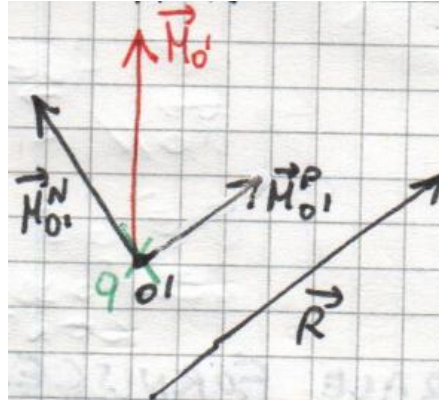


Figura 18: Per il polo O' , la decomposizione del momento definisce analogamente un punto Q' sulla retta q' .

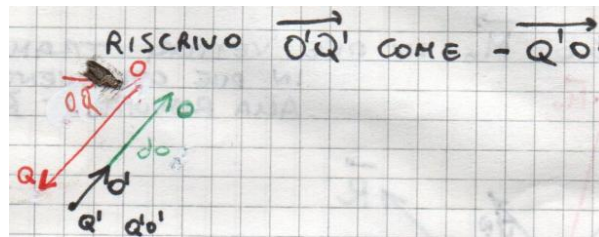


Figura 19: Costruzione geometrica che mostra come i punti Q e Q' giacciono sulla stessa retta parallela a \vec{R} : l'asse centrale.

Interpretazione fisica. I punti Q e Q' , costruiti a partire da poli diversi, giacciono sempre su una stessa retta α parallela alla risultante \vec{R} . Questa retta è l'**asse centrale** del sistema.

9.3 Proprietà dell'asse centrale

L'asse centrale α gode delle seguenti proprietà fondamentali:

- 1. Indipendenza dal polo.** L'asse centrale non dipende dalla scelta del polo iniziale: qualunque polo si scelga, la costruzione geometrica conduce alla stessa retta.
- 2. Momento minimo.** Se si sceglie come polo un punto O appartenente all'asse centrale α , allora:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^P \quad \text{e} \quad \vec{M}_O^N = \vec{0} \quad (46)$$

Infatti, per $O \in \alpha$ e $Q \in \alpha$, si ha $\vec{OQ} \parallel \vec{R}$, quindi:

$$\vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} = \vec{0} \quad (47)$$

Interpretazione fisica. L'asse centrale rappresenta la posizione “ottimale” per analizzare il sistema: scegliendo un polo su di esso, il momento risultante assume la sua intensità minima e coincide con la componente parallela alla risultante. Questo semplifica notevolmente l'analisi di sistemi di forze in meccanica.

10 Momento assiale di un vettore applicato

Consideriamo un vettore \vec{R} applicato in un punto P giacente su una retta r (retta d'azione), e una seconda retta q passante per un polo O .

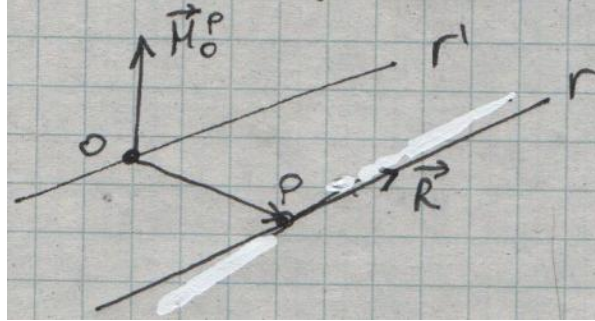


Figura 20: Vettore \vec{R} applicato in P sulla retta d'azione r . Il momento rispetto al polo O è \vec{M}_O .

Se si fa scorrere il vettore \vec{R} lungo la sua retta d'azione r , il momento rispetto a O rimane invariato. Se invece si sposta il polo lungo una retta q non parallela a r , il momento cambia secondo la regola del trasporto:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (48)$$

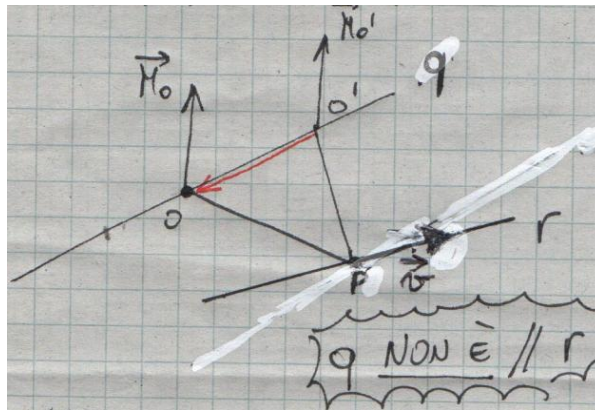


Figura 21: Spostamento del polo da O a O' lungo la retta q : il momento si modifica secondo la regola del trasporto.

Sia $\hat{\xi}$ il versore che definisce la direzione della retta q . Proiettando l'equazione del trasporto lungo $\hat{\xi}$:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \hat{\xi} = \vec{M}_O \cdot \hat{\xi} + (\vec{O'O} \times \vec{R}) \cdot \hat{\xi} \quad (49)$$

Poiché $\vec{O'O}$ è parallelo a $\hat{\xi}$, il prodotto misto $(\vec{O'O} \times \vec{R}) \cdot \hat{\xi} = 0^4$. Quindi:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{\xi} = \vec{M}_{O'} \cdot \hat{\xi} \quad (50)$$

Si definisce **momento assiale** di \vec{R} rispetto alla retta q la quantità:

$$M_q = \vec{M}_O \cdot \hat{\xi} \quad (51)$$

dove O è un qualsiasi punto di q .

⁴Il prodotto misto è nullo quando due dei tre vettori sono paralleli.

Interpretazione fisica. Il momento assiale misura la tendenza del vettore applicato a produrre una rotazione attorno all'asse q . Esso non dipende dalla posizione del polo lungo q , ma solo dalla retta q stessa. Affinché il momento assiale sia non nullo, è necessario che la retta d'azione r e l'asse q siano **sghebbi** (non complanari e non paralleli).

Le componenti del momento rispetto a un polo indicano l'attitudine del vettore a indurre rotazioni attorno ai rispettivi assi coordinati.

11 Proprietà dell'algebra vettoriale

Per completezza, riassumiamo le principali proprietà delle operazioni tra vettori.

11.1 Proprietà della somma

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{commutatività}) \quad (52)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{associatività}) \quad (53)$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad (\text{distributività}) \quad (54)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad (\text{distributività}) \quad (55)$$

11.2 Proprietà del prodotto scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{commutatività}) \quad (56)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{distributività}) \quad (57)$$

11.3 Proprietà del prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{anticommutatività}) \quad (58)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{distributività}) \quad (59)$$

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \quad (60)$$

11.4 Prodotto misto e identità notevoli

Il **prodotto misto** di tre vettori è definito come:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (61)$$

e può essere calcolato come determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (62)$$

Interpretazione fisica. Il valore assoluto del prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. Il segno indica l'orientazione della terna.

Altre identità utili sono:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (63)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (64)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (65)$$

12 Derivate e integrali di vettori

12.1 Derivata di un vettore rispetto a una variabile scalare

Se il sistema di riferimento è fisso, ovvero i versori \hat{L}_k non dipendono dalla variabile indipendente x :

$$\frac{d\vec{a}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i(x)}{dx} \hat{L}_i \quad (66)$$

Se invece anche i versori dipendono da x , si applica la regola del prodotto:

$$\frac{d\vec{a}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i(x)}{dx} \hat{L}_i(x) + \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{d\hat{L}_i(x)}{dx} \quad (67)$$

Interpretazione fisica. Nel primo caso (riferimento fisso), la derivata del vettore dipende solo dalla variazione delle componenti. Nel secondo caso (riferimento mobile), compare un termine aggiuntivo dovuto alla rotazione del sistema di riferimento stesso.

12.2 Integrale di un vettore

Per un sistema di riferimento fisso:

$$\int \vec{a}(x) dx = \sum_{i=1}^3 \left[\int a_i(x) dx \right] \hat{L}_i \quad (68)$$

13 Analisi spettrale delle matrici

Lo studio delle proprietà spettrali delle matrici costituisce uno strumento fondamentale in meccanica razionale, dove molti problemi si riducono alla risoluzione di sistemi lineari o alla diagonalizzazione di operatori. In particolare, la teoria degli autovalori e autovettori permette di semplificare notevolmente l'analisi di sistemi meccanici complessi.

13.1 Autovalori e autovettori

Per **spettro** di una matrice si intende l'insieme dei suoi autovalori λ . Data una matrice quadrata \underline{A} di dimensione $N \times N$, si considera la relazione:

$$\underline{A} \underline{z} = \underline{c} \quad (69)$$

dove \underline{z} è un vettore colonna $N \times 1$ e \underline{c} è il vettore trasformato, anch'esso $N \times 1$. La matrice \underline{A} agisce quindi come un operatore che trasforma il vettore \underline{z} nel vettore \underline{c} .

Un vettore $\underline{z} \neq \underline{0}$ si dice **autovettore** della matrice \underline{A} se esiste uno scalare λ , detto **autovalore** associato, tale che:

$$\underline{A}\underline{z} = \lambda \underline{z} \quad (70)$$

Interpretazione fisica. L'equazione (70) afferma che l'autovettore \underline{z} , quando trasformato dalla matrice \underline{A} , produce un vettore parallelo a sé stesso, semplicemente scalato del fattore λ . In termini componenti, se $\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$, allora $\lambda \underline{z} = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)^T$: la direzione è preservata, solo il modulo cambia.

13.2 Teoremi sulla diagonalizzazione

Per matrici simmetriche ($\underline{A} = \underline{A}^T$) valgono risultati fondamentali che ne garantiscono la diagonalizzabilità.

Teorema 1. Se \underline{A} è una matrice simmetrica di ordine N , allora possiede N autovettori linearmente indipendenti e mutuamente ortogonali, corrispondenti a N autovalori (non necessariamente distinti):

$$\underline{A}\underline{z}^{(k)} = \lambda_k \underline{z}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N \quad (71)$$

La condizione di ortogonalità tra autovettori si esprime tramite il prodotto scalare. Dati due vettori \vec{v} e \vec{u} , essi sono ortogonali se:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v}^T \underline{u} = 0 \quad (72)$$

dove la seconda scrittura è la forma algebrica equivalente. In componenti:

$$\underline{v}^T \underline{u} = \sum_{k=1}^N v_k u_k = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_N u_N \quad (73)$$

Teorema 2. Per autovettori normalizzati vale la relazione di ortonormalità:

$$\underline{z}^{(k)T} \underline{z}^{(j)} = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases} \quad (74)$$

dove δ_{kj} è il delta di Kronecker.

Teorema 3. Se $\underline{z}^{(k)}$ è autovettore associato a λ_k , allora anche $\alpha \underline{z}^{(k)}$ (con α scalare non nullo) è autovettore associato allo stesso autovalore:

$$\underline{A}(\alpha \underline{z}^{(k)}) = \lambda_k (\alpha \underline{z}^{(k)}) \quad (75)$$

Teorema spettrale. Se \underline{A} è una matrice simmetrica di ordine $N \times N$, allora è diagonalizzabile. Inoltre, esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^N formata dagli autovettori di \underline{A} .

13.3 Calcolo degli autovalori: equazione caratteristica

La relazione $\underline{A}\underline{z} = \lambda\underline{z}$ può essere riscritta come:

$$(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{z} = \underline{0} \quad (76)$$

dove \underline{I} è la matrice identità. Definendo $\hat{\underline{A}} = \underline{A} - \lambda\underline{I}$, si ottiene un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}z_1 + \hat{a}_{12}z_2 + \cdots + \hat{a}_{1N}z_N = 0 \\ \hat{a}_{21}z_1 + \hat{a}_{22}z_2 + \cdots + \hat{a}_{2N}z_N = 0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{N1}z_1 + \hat{a}_{N2}z_2 + \cdots + \hat{a}_{NN}z_N = 0 \end{cases} \quad (77)$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, affinché il sistema ammetta soluzioni non banali, deve essere:

$$\det(\underline{A} - \lambda\underline{I}) = 0 \quad (78)$$

Questa è l'**equazione caratteristica** del problema agli autovalori: un'equazione polinomiale di grado N nella variabile λ , le cui radici sono gli autovalori della matrice.

Interpretazione fisica. L'equazione caratteristica fornisce i “modi naturali” del sistema descritto dalla matrice \underline{A} . In meccanica, questi corrispondono spesso alle frequenze naturali di vibrazione o alle direzioni principali di deformazione.

13.4 Esempio di calcolo: matrice 2×2

Consideriamo la matrice simmetrica:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Si verifica immediatamente che $\underline{A}^T = \underline{A}$, quindi la matrice è diagonalizzabile.

L'equazione caratteristica è:

$$\det(\underline{A} - \lambda\underline{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad (80)$$

Sviluppando:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 \quad (81)$$

Caso $\lambda_1 = 1$. Il sistema $(\underline{A} - \lambda_1\underline{I})\underline{z}' = \underline{0}$ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad z'_1 = z'_2 \quad (82)$$

L'autovettore (non normalizzato) è quindi:

$$\underline{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Caso $\lambda_2 = 3$. Il sistema $(\underline{A} - \lambda_2 \underline{I})\underline{z}'' = \underline{0}$ diventa:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1'' \\ z_2'' \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow z_1'' = -z_2'' \quad (84)$$

L'autovettore è:

$$\underline{z}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Verifica dell'ortogonalità. Come previsto dal teorema, gli autovettori sono ortogonali:

$$\underline{z}^{(1)T} \underline{z}^{(2)} = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (86)$$

13.5 Normalizzazione degli autovettori

Per ottenere una base ortonormale, gli autovettori devono essere normalizzati. Dato un vettore \vec{v} , il corrispondente versore è:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad (87)$$

dove la norma (o modulo) è definita come:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (88)$$

Per l'esempio precedente:

$$\|\underline{z}^{(1)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \hat{\underline{z}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (89)$$

$$\|\underline{z}^{(2)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \hat{\underline{z}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

Si verifica facilmente che $\hat{\underline{z}}^{(1)T} \hat{\underline{z}}^{(1)} = 1$, $\hat{\underline{z}}^{(2)T} \hat{\underline{z}}^{(2)} = 1$ e $\hat{\underline{z}}^{(1)T} \hat{\underline{z}}^{(2)} = 0$: gli autovettori normalizzati formano una base ortonormale di \mathbb{R}^2 .

13.6 Trasformazione di coordinate e diagonalizzazione

La diagonalizzazione di una matrice \underline{A} si effettua tramite un cambio di coordinate. Definita la **matrice di trasformazione** (o di passaggio) \underline{T} avente come colonne gli autovettori di \underline{A} :

$$\underline{T} = [\underline{z}^{(1)} \quad \underline{z}^{(2)} \quad \dots \quad \underline{z}^{(N)}] \quad (91)$$

la matrice diagonalizzata è:

$$\underline{C} = \underline{T}^T \underline{A} \underline{T} \quad (92)$$

Quando gli autovettori sono ortonormali, la matrice \underline{T} è **ortogonale**, ovvero soddisfa:

$$\underline{T}^T \underline{T} = \underline{I} \Leftrightarrow \underline{T}^{-1} = \underline{T}^T \quad (93)$$

Interpretazione fisica. Una matrice ortogonale rappresenta una rotazione (o una riflessione) nello spazio: il passaggio da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali a un altro avviene senza deformazioni, preservando angoli e distanze.

Per l'esempio precedente, con autovettori non normalizzati:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Il calcolo esplicito fornisce:

$$\underline{T}^T \underline{A} \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (95)$$

La matrice \underline{C} è diagonale e i suoi elementi sulla diagonale principale sono proporzionali agli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3^5$.

Risultato fondamentale. Se \underline{A} è simmetrica, essa possiede N autovettori mutuamente ortogonali e linearmente indipendenti che costituiscono una base dello spazio N -dimensionale. In questa base, la matrice \underline{A} assume forma diagonale con gli autovalori sulla diagonale principale.

13.7 Applicazione: risoluzione di sistemi lineari

La diagonalizzazione semplifica la risoluzione di sistemi lineari non omogenei. Dato il sistema:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (96)$$

si introduce il cambio di variabile $\underline{y} = \underline{T}^T \underline{x}$, che trasforma il sistema in:

$$\underline{\Lambda} \underline{y} = \underline{c} \quad (97)$$

dove $\underline{\Lambda}$ è la matrice diagonale degli autovalori e $\underline{c} = \underline{T}^T \underline{b}$. Essendo $\underline{\Lambda}$ diagonale, il sistema si disaccoppia in N equazioni scalari indipendenti:

$$\lambda_k y_k = c_k \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{c_k}{\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (98)$$

14 Cinematica del punto materiale

Il moto è l'analisi dell'evoluzione temporale delle posizioni occupate dagli elementi meccanici: punti materiali, sistemi di punti, corpi rigidi. Si tratta quindi di studiare il vettore posizione nella sua variazione nel tempo.

14.1 Vettore posizione, traiettoria e spostamento

Il **vettore posizione** $\vec{x}(t)$ descrive la posizione di un punto rispetto a un'origine fissata, in funzione del tempo t . La **traiettoria** è il luogo geometrico dei punti occupati dall'elemento durante il moto, al variare di t .

⁵Il fattore 2 che compare è dovuto al fatto che gli autovettori non sono normalizzati. Utilizzando gli autovettori normalizzati si otterrebbe direttamente la matrice diagonale degli autovalori.

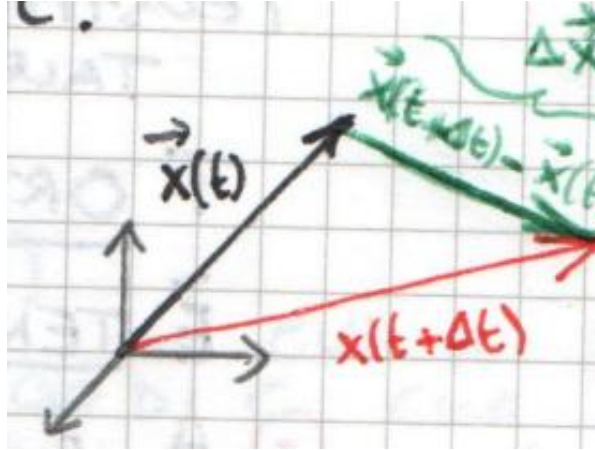


Figura 22: Definizione del vettore spostamento $\Delta \vec{x}$ come differenza tra i vettori posizione $\vec{x}(t + \Delta t)$ e $\vec{x}(t)$ in istanti successivi.

Il **vettore spostamento** è definito come la differenza tra due vettori posizione in istanti successivi:

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t) \quad (99)$$

Si tratta di un vettore invariante rispetto al sistema di riferimento⁶.

14.2 Velocità e accelerazione

La **velocità istantanea** è definita come il limite del rapporto incrementale dello spostamento:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (100)$$

L'**accelerazione** è la derivata temporale della velocità:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (101)$$

Interpretazione fisica. La velocità rappresenta il tasso di variazione della posizione: indica quanto rapidamente e in quale direzione il punto si muove. L'accelerazione misura il tasso di variazione della velocità: indica come cambia il moto nel tempo, sia in intensità che in direzione.

15 Equazioni differenziali in meccanica

Le relazioni che governano i fenomeni meccanici sono tipicamente di natura differenziale: esse collegano cause (forze) ed effetti (moto) attraverso equazioni che coinvolgono una funzione incognita e le sue derivate.

15.1 Classificazione delle equazioni differenziali

Nel contesto della meccanica dei corpi rigidi, si considerano equazioni differenziali con le seguenti caratteristiche:

⁶Lo spostamento, essendo differenza di vettori posizione, non dipende dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento.

- **Ordine:** al massimo 2 per corpi rigidi (ordini superiori per corpi deformabili)
- **Lineari:** la funzione incognita e le sue derivate compaiono con esponente unitario
- **Ordinarie:** la funzione incognita dipende da una sola variabile (il tempo)
- **A coefficienti costanti:** i coefficienti non dipendono dalla variabile indipendente
- **Omogenee o non omogenee:** a seconda che il termine noto sia nullo o meno

Un'equazione differenziale lineare di ordine N non omogenea si scrive nella forma generale:

$$\mathcal{L}[u(t)] = f(t) \quad (102)$$

dove l'**operatore differenziale lineare** \mathcal{L} è definito come:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} \quad (103)$$

e $f(t)$ è la **forzante**, una funzione nota che rende l'equazione non omogenea.

15.2 Struttura della soluzione generale

La linearità dell'operatore \mathcal{L} implica che la soluzione generale dell'equazione non omogenea si costruisce come:

$$u(t) = u_{GO}(t) + u_{PN}(t) \quad (104)$$

dove:

- $u_{GO}(t)$ è la **soluzione generale dell'equazione omogenea associata**, ovvero l'insieme di tutte le funzioni che soddisfano $\mathcal{L}[u] = 0$
- $u_{PN}(t)$ è una **soluzione particolare dell'equazione non omogenea**, ovvero una qualsiasi funzione che soddisfa $\mathcal{L}[u] = f(t)$

Interpretazione fisica. La soluzione dell'omogenea rappresenta la risposta “libera” del sistema, dipendente dalle condizioni iniziali. La soluzione particolare rappresenta la risposta “forzata”, determinata dalla forzante esterna. Il moto complessivo è la sovrapposizione di questi due contributi.

15.3 Soluzione dell'equazione omogenea

Per l'equazione omogenea:

$$a_N \frac{d^N u}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0 \quad (105)$$

si cerca una soluzione nella forma esponenziale:

$$u(t) = C e^{\delta t} \quad (106)$$

Sostituendo nell'equazione e osservando che $\frac{d^k}{dt^k}(C e^{\delta t}) = \delta^k C e^{\delta t}$, si ottiene:

$$C e^{\delta t} (a_N \delta^N + a_{N-1} \delta^{N-1} + \cdots + a_1 \delta + a_0) = 0 \quad (107)$$

Escludendo la soluzione banale $C = 0$, si ricava l'**equazione caratteristica**:

$$a_N \delta^N + a_{N-1} \delta^{N-1} + \dots + a_1 \delta + a_0 = 0 \quad (108)$$

Le N radici $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ di questa equazione polinomiale determinano la soluzione generale:

$$u_{GO}(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\delta_j t} \quad (109)$$

Le N costanti C_j vengono determinate imponendo N **condizioni iniziali** sulla funzione e le sue derivate in un istante t^* :

$$u(t^*) = u^*, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t^*} = u'^*, \quad \dots, \quad \left. \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}} \right|_{t^*} = u^{(N-1)*} \quad (110)$$

15.4 Equazione del secondo ordine: caso fondamentale

Consideriamo l'equazione omogenea del secondo ordine con coefficiente intermedio nullo:

$$a \frac{d^2 u}{dt^2} + b u = 0 \quad (111)$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{b}{a} u \quad (112)$$

La soluzione è una funzione che, derivata due volte, restituisce sé stessa moltiplicata per una costante negativa.

Ponendo $u(t) = C e^{\gamma t}$ e sostituendo, si ottiene l'equazione caratteristica:

$$\gamma^2 + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{b}{a}} \quad (113)$$

Caso A: radici reali distinte. Se $-\frac{b}{a} > 0$, le radici sono reali e opposte. La soluzione è:

$$u(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad (114)$$

Date le condizioni iniziali $u(0) = u_0$ e $u'(0) = u'_0$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = u_0 \\ \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = u'_0 \end{cases} \quad (115)$$

Caso B: radici immaginarie coniugate. Se $-\frac{b}{a} < 0$, le radici sono immaginarie pure:

$$\gamma_{1,2} = \pm j\omega, \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (116)$$

dove ω è la **pulsazione** del moto oscillatorio, legata al periodo T e alla frequenza f dalla relazione $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Utilizzando le formule di Eulero ($e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$), la soluzione reale si scrive:

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (117)$$

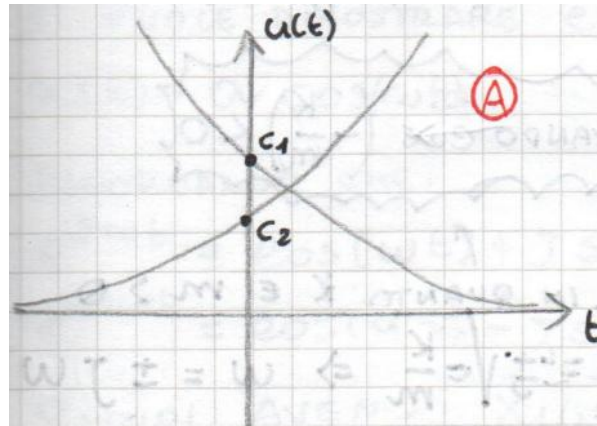


Figura 23: Andamento tipico della soluzione nel caso di radici reali: il comportamento dipende dalle costanti C_1 e C_2 determinate dalle condizioni iniziali.

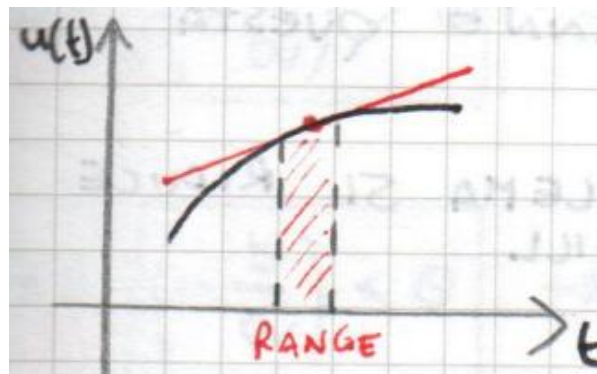


Figura 24: Linearizzazione di una funzione non lineare: all'interno di un opportuno intervallo, la funzione può essere approssimata dalla retta tangente.

Interpretazione fisica. Il caso di radici immaginarie corrisponde a un **moto oscillatorio** o **vibatorio**. Questo tipo di equazione governa qualsiasi fenomeno naturale caratterizzato da oscillazioni periodiche: sistemi massa-molla, pendoli, circuiti elettrici LC, e molti altri.

15.5 Applicazione: sistema massa-molla

Un esempio fondamentale di sistema governato dall'equazione (111) è il sistema massa-molla ideale, costituito da una massa M collegata a una molla lineare di rigidezza k .

16 Applicazione: il sistema massa-molla

Il sistema massa-molla rappresenta uno dei modelli fondamentali della meccanica, in quanto descrive il comportamento oscillatorio che si riscontra in numerosi fenomeni fisici. La sua analisi permette di comprendere i concetti essenziali delle vibrazioni meccaniche.

16.1 Formulazione del problema

Consideriamo una massa M vincolata a muoversi lungo una retta orizzontale, collegata a una molla di rigidezza K . Il sistema possiede un unico **grado di libertà**, rappresentato dalla

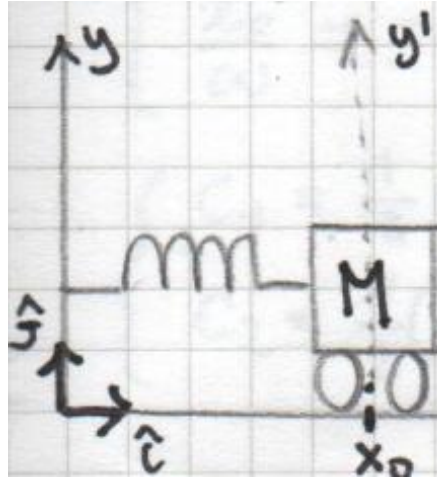


Figura 25: Sistema massa-molla: una massa M è collegata a una molla di rigidezza k . La posizione x_0 indica la configurazione di equilibrio.

posizione x della massa lungo l'asse del moto. Tutte le relazioni vettoriali devono quindi essere proiettate lungo questa direzione.

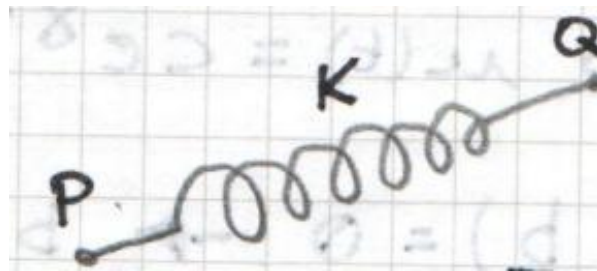


Figura 26: Sistema massa-molla: la molla ha lunghezza a riposo l_0 e lunghezza istantanea l . Il vettore \hat{PQ} indica la direzione dell'asse della molla.

La relazione fondamentale della dinamica è $\vec{F} = m\vec{a}$. L'accelerazione, essendo il moto unidimensionale lungo l'asse x , si riduce a:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \ddot{x} \hat{i} \quad (118)$$

dove \hat{i} è il versore dell'asse x , costante nel tempo.

La forza elastica esercitata dalla molla è data dalla **legge di Hooke**:

$$\vec{F}_e = -K(l - l_0) \hat{PQ} \quad (119)$$

dove K è la costante elastica (o rigidezza) della molla, l è la lunghezza istantanea, l_0 è la lunghezza a riposo, e \hat{PQ} è il versore diretto lungo l'asse della molla. Il segno negativo indica che la forza si oppone all'allungamento.

Poiché \hat{PQ} coincide con \hat{i} , proiettando lungo l'asse del moto si ottiene:

$$\vec{F}_e = -K(x - x_0) \hat{i} \quad (120)$$

dove x_0 rappresenta la posizione di equilibrio (lunghezza a riposo).

16.2 Equazione del moto

Applicando il bilancio delle forze $m\ddot{x} \hat{i} = -K(x - x_0) \hat{i}$, si ottiene l'equazione scalare:

$$m\ddot{x} + K(x - x_0) = 0 \quad (121)$$

Introducendo la variabile $u = x - x_0$ (spostamento dalla posizione di equilibrio), per cui $\ddot{u} = \ddot{x}$, l'equazione diventa:

$$m\ddot{u} + Ku = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{K}{m}u = 0 \quad (122)$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}} = \pm j\omega \quad (123)$$

dove si è definita la **pulsazione naturale**:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (124)$$

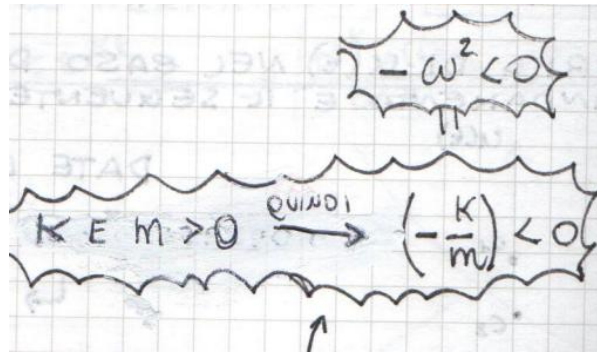


Figura 27: Derivazione delle radici dell'equazione caratteristica: poiché $K > 0$ e $m > 0$, il radicando è negativo e le radici sono immaginarie pure $\pm j\omega$.

Interpretazione fisica. Le radici immaginarie pure indicano che il sistema oscilla indefinitamente senza smorzamento. La pulsazione ω determina la rapidità delle oscillazioni: maggiore è la rigidezza K o minore è la massa m , più elevata è la frequenza di oscillazione.

16.3 Soluzione generale e condizioni iniziali

La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$u(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t} \quad (125)$$

Utilizzando le formule di Eulero $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$, si ottiene la forma reale:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] + C_2 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + j(C_2 - C_1) \sin(\omega t) \\ &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (126)$$

Per determinare le costanti a e b , si impongono le **condizioni iniziali** all'istante $t = 0$:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 & (\text{posizione iniziale}) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 & (\text{velocità iniziale}) \end{cases} \quad (127)$$

Sostituendo in $u(t)$ e nella sua derivata $\dot{u}(t) = -a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)$:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \dot{u}_0 = b\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = u_0 \\ b = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \end{cases} \quad (128)$$

Il risultato fondamentale è la soluzione completa:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (129)$$

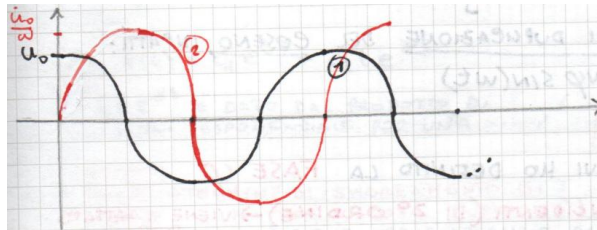


Figura 28: La soluzione è somma di due funzioni sinusoidali: $u_0 \cos(\omega t)$ (nero) e $\frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t)$ (rosso), sfasate di $\pi/2$ tra loro.

Interpretazione fisica. La soluzione è la sovrapposizione di due oscillazioni:

- Il termine in coseno dipende dalla **posizione iniziale** u_0 : se il sistema parte da una posizione spostata con velocità nulla ($\dot{u}_0 = 0$), si ha $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.
- Il termine in seno dipende dalla **velocità iniziale** \dot{u}_0 : se il sistema parte dalla posizione di equilibrio con una velocità iniziale ($u_0 = 0$), si ha $u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t)$.

Le due componenti sono sfasate di $\pi/2$ e hanno lo stesso periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

16.4 Forma in ampiezza e fase

La soluzione (129) può essere riscritta in forma compatta introducendo l'**ampiezza** A e la **fase** φ . Ponendo:

$$\begin{cases} u_0 = A \cos \varphi \\ \frac{\dot{u}_0}{\omega} = -A \sin \varphi \end{cases} \quad (130)$$

si ottiene:

$$u(t) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t) = A[\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)] \quad (131)$$

Applicando la formula di addizione del coseno $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (132)$$

Interpretazione fisica. L'oscillazione armonica è completamente caratterizzata da tre parametri: l'ampiezza A (massimo spostamento), la pulsazione ω (legata al periodo) e la fase φ (che determina l'istante iniziale del ciclo).

17 Classificazione delle soluzioni per equazioni del secondo ordine

Consideriamo l'equazione differenziale omogenea generale del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$\alpha_2 \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0 \quad (133)$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\alpha_2 \delta^2 + \alpha_1 \delta + \alpha_0 = 0 \quad (134)$$

le cui radici sono:

$$\delta_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2} \quad (135)$$

La natura delle soluzioni dipende dal segno del discriminante $\Delta = \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2$.

17.1 Caso 1: Radici reali e distinte ($\Delta > 0$)

Quando $\alpha_1^2 > 4\alpha_0\alpha_2$, le radici sono reali e distinte. La soluzione generale è:

$$x(t) = C_1 e^{\delta_1 t} + C_2 e^{\delta_2 t} \quad (136)$$

Il comportamento asintotico dipende dal segno delle radici:

Sottocaso $\alpha_1 > 0$: radici negative ($\delta_1 < 0, \delta_2 < 0$). La soluzione decade esponenzialmente verso zero per $t \rightarrow \infty$. Questo corrisponde a un sistema **smorzato** che tende asintoticamente all'equilibrio.

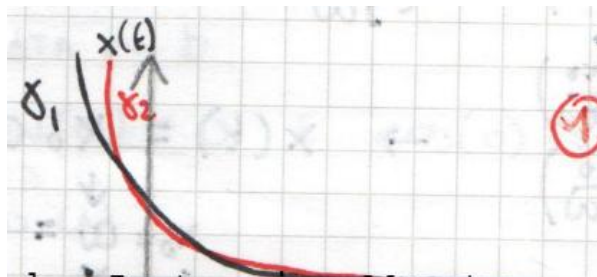


Figura 29: Andamento della soluzione con radici reali negative: il sistema decade esponenzialmente verso l'equilibrio.

Sottocaso $\alpha_1 < 0$: radici positive ($\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$). La soluzione cresce esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$. Il sistema è **instabile**.

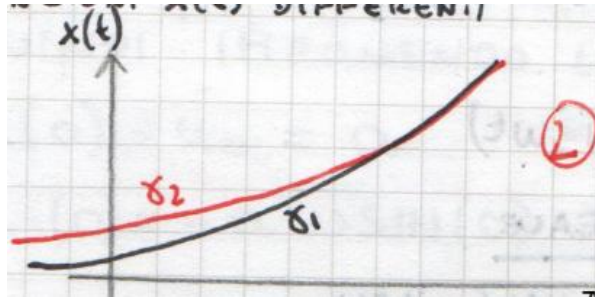


Figura 30: Andamento della soluzione con radici reali positive: il sistema diverge esponenzialmente.

Interpretazione fisica. Il coefficiente α_1 , associato alla derivata prima (velocità), rappresenta lo **smorzamento viscoso**: se $\alpha_1 > 0$, il sistema dissipa energia e tende all'equilibrio; se $\alpha_1 < 0$, il sistema accumula energia e diverge.

17.2 Caso 2: Radici coincidenti ($\Delta = 0$)

Quando $\alpha_1^2 = 4\alpha_0\alpha_2$, si ha un'unica radice con molteplicità algebrica 2:

$$\delta = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \quad (137)$$

La soluzione generale assume la forma⁷:

$$x(t) = C_1 e^{\delta t} + C_2 t e^{\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{\delta t} \quad (138)$$

Anche in questo caso:

- Se $\alpha_1 > 0 \Rightarrow \delta < 0$: la soluzione decade verso zero (smorzamento critico).
- Se $\alpha_1 < 0 \Rightarrow \delta > 0$: la soluzione diverge.

17.3 Caso 3: Radici complesse coniugate ($\Delta < 0$)

Quando $\alpha_1^2 < 4\alpha_0\alpha_2$, le radici sono complesse coniugate:

$$\delta_{1,2} = \beta \pm j\omega \quad (139)$$

dove $\beta = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ è la parte reale e $\omega = \frac{\sqrt{4\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2}}{2\alpha_2}$ è la parte immaginaria⁸.

La soluzione generale è:

$$x(t) = e^{\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \quad (140)$$

Il comportamento dipende dal segno di β :

Sottocaso $\alpha_1 > 0 \Rightarrow \beta < 0$: oscillazioni smorzate. L'ampiezza delle oscillazioni decresce esponenzialmente. Il sistema tende asintoticamente all'equilibrio oscillando.

Sottocaso $\alpha_1 < 0 \Rightarrow \beta > 0$: oscillazioni amplificate. L'ampiezza delle oscillazioni cresce esponenzialmente. Il sistema è instabile.

⁷Per radici con molteplicità n , la soluzione include termini del tipo $t^k e^{\delta t}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$.

⁸Affinché $\Delta < 0$ con $\alpha_2 > 0$, è necessario che $\alpha_0 > 0$.

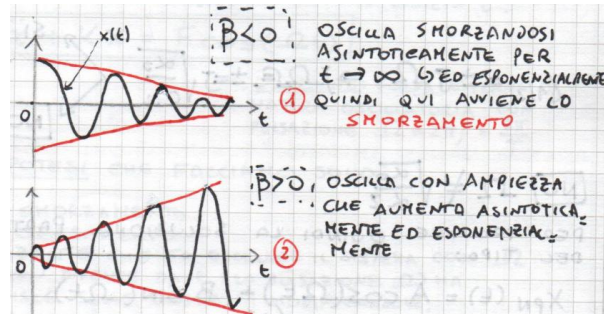


Figura 31: Oscillazioni smorzate ($\beta < 0$, sinistra) e amplificate ($\beta > 0$, destra). L'involuppo esponenziale $e^{\beta t}$ modula l'ampiezza dell'oscillazione.

Interpretazione fisica. Il fattore $e^{\beta t}$ rappresenta l'**involuppo** delle oscillazioni: determina se l'ampiezza cresce o decresce nel tempo, mentre i termini trigonometrici descrivono l'oscillazione periodica alla pulsazione ω .

18 Equazioni differenziali non omogenee

18.1 Struttura della soluzione

Una generica equazione differenziale lineare non omogenea di ordine N si scrive:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k x}{dt^k} = f(t) \quad (141)$$

dove $f(t)$ è il **termine forzante**.

La soluzione generale è la somma:

$$x(t) = x_{GO}(t) + x_{PN}(t) \quad (142)$$

dove $x_{GO}(t)$ è la soluzione generale dell'omogenea associata e $x_{PN}(t)$ è una soluzione particolare della non omogenea.

18.2 Forma generale della forzante e della soluzione particolare

Per forzanti della forma:

$$f(t) = e^{\eta t} [P_M(t) \cos(\delta t) + P_N(t) \sin(\delta t)] \quad (143)$$

dove $P_M(t)$ e $P_N(t)$ sono polinomi di grado M e N rispettivamente, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$x_{PN}(t) = t^s \cdot e^{\eta t} [A(t) \cos(\delta t) + B(t) \sin(\delta t)] \quad (144)$$

dove:

- $A(t)$ e $B(t)$ sono polinomi di grado $r = \max(M, N)$
- s è la molteplicità algebrica di $\eta \pm j\delta$ come radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata

Le costanti dei polinomi $A(t)$ e $B(t)$ si determinano sostituendo $x_{PN}(t)$ nell'equazione differenziale e imponendo l'uguaglianza con $f(t)$.

18.3 Applicazione: oscillatore forzato senza smorzamento

Consideriamo l'equazione:

$$\alpha_2 \ddot{x} + \alpha_0 x = F \cos(\Omega t) \quad (145)$$

dove $f(t) = F \cos(\Omega t)$ è una forzante armonica di ampiezza F e pulsazione Ω .

Soluzione dell'omogenea. L'equazione caratteristica $\alpha_2 \gamma^2 + \alpha_0 = 0$ fornisce:

$$\gamma_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}} = \pm j \omega_0 \quad (146)$$

dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}}$ è la pulsazione naturale del sistema.

Soluzione particolare. Consideriamo il caso **non risonante**: $\Omega \neq \omega_0$, cioè la pulsazione della forzante è diversa dalla pulsazione naturale⁹.

Poiché $\eta = 0$ e $j\Omega$ non è radice dell'equazione caratteristica (essendo le radici $\pm j\omega_0$ con $\omega_0 \neq \Omega$), si cerca:

$$x_{PN}(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (147)$$

Calcolando le derivate:

$$\dot{x}_{PN}(t) = \Omega [-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)] \quad (148)$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = -\Omega^2 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \quad (149)$$

Sostituendo nell'equazione (145):

$$-\alpha_2 \Omega^2 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \alpha_0 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = F \cos(\Omega t) \quad (150)$$

Raccogliendo:

$$(\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = F \cos(\Omega t) \quad (151)$$

Confrontando i coefficienti delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{cases} A(\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2) = F \\ B(\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2) = 0 \end{cases} \quad (152)$$

Da cui:

$$B = 0, \quad A = \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \quad (153)$$

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea, ottenuta determinando i coefficienti A e B , risulta quindi:

$$x_{PN}(t) = \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (154)$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1/\alpha_2$ e ricordando che $\omega^2 = \alpha_0/\alpha_2$, si ottiene la forma equivalente:

$$x_{PN}(t) = \frac{F/\alpha_2}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (155)$$

⁹Il caso risonante $\Omega = \omega_0$ richiede un trattamento separato e porta a soluzioni con ampiezza che cresce linearmente nel tempo.

La soluzione generale completa è quindi:

$$x(t) = x_{GO}(t) + x_{PN}(t) = C_1 e^{\delta_1 t} + C_2 e^{\delta_2 t} + \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (156)$$

Per determinare le costanti C_1 e C_2 è necessario imporre le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. A tal fine si deriva l'espressione di $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = \delta_1 C_1 e^{\delta_1 t} + \delta_2 C_2 e^{\delta_2 t} - \frac{\Omega F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \sin(\Omega t) \quad (157)$$

Imponendo $t = 0$ in entrambe le espressioni e risolvendo il sistema risultante si ottengono C_1 e C_2 .

19 Oscillatore semplice forzato

Il sistema massa-molla sottoposto a una forzante esterna rappresenta uno dei modelli fondamentali per lo studio delle vibrazioni forzate. L'analisi di questo sistema permette di comprendere fenomeni cruciali come la risonanza.

19.1 Formulazione del problema

Consideriamo una massa m collegata a una molla di rigidezza K , sottoposta a una forza esterna di tipo armonico $F \cos(\Omega t)$, dove F è l'ampiezza della forzante e Ω è la sua pulsazione.

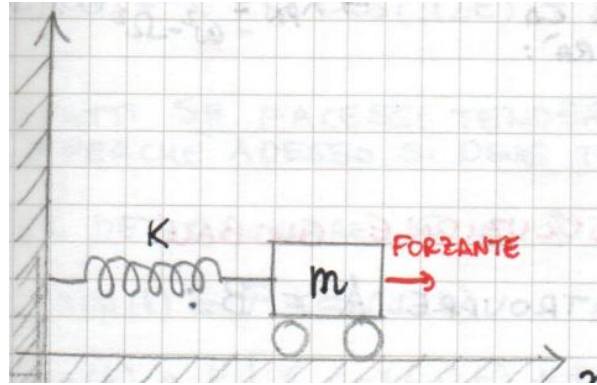


Figura 32: Sistema massa-molla forzato: una massa m collegata a una molla di costante elastica K è soggetta a una forza esterna armonica. Lo spostamento x è misurato lungo l'asse orizzontale.

Le ipotesi del modello sono:

- assenza di smorzamento;
- assenza di sfasamento nella forzante;
- la pulsazione Ω della forzante è costante nel tempo.

L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + Kx = F \cos(\Omega t) \quad (158)$$

Dividendo per m e introducendo la **pulsazione naturale** $\omega = \sqrt{K/m}$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (159)$$

19.2 Caso non risonante: $\Omega \neq \omega$

Soluzione dell'omogenea. L'equazione caratteristica $\gamma^2 + \omega^2 = 0$ fornisce radici complesse coniugate $\gamma_{1,2} = \pm j\omega$. La soluzione generale dell'omogenea è:

$$x_{GO}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (160)$$

Soluzione particolare. Poiché $\pm j\Omega$ non coincide con le radici dell'omogenea (essendo $\Omega \neq \omega$), si cerca una soluzione particolare della forma:

$$x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t) \quad (161)$$

Calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale:

$$\dot{x}_{PN}(t) = -\Omega C \sin(\Omega t) + \Omega D \cos(\Omega t) \quad (162)$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = -\Omega^2 C \cos(\Omega t) - \Omega^2 D \sin(\Omega t) \quad (163)$$

Sostituendo in (159):

$$(\omega^2 - \Omega^2)[C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (164)$$

Confrontando i coefficienti:

$$\begin{cases} D = 0 \\ C = \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \end{cases} \quad (165)$$

La soluzione particolare è quindi:

$$x_{PN}(t) = \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (166)$$

Soluzione globale. Combinando omogenea e particolare:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (167)$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$:

$$\begin{cases} x_0 = A + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \\ \dot{x}_0 = \omega B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 - \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} \quad (168)$$

Il risultato fondamentale per l'oscillatore semplice forzato nel caso non risonante è:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]} \quad (169)$$

Interpretazione fisica. La soluzione (169) è composta da tre contributi:

- I primi due termini oscillano alla pulsazione naturale $\omega = \sqrt{K/m}$, che dipende esclusivamente dalle caratteristiche del sistema (massa e rigidità).
- Il terzo termine contiene sia la pulsazione della forzante Ω sia quella naturale ω : rappresenta la risposta forzata del sistema.

19.3 Caso risonante: $\Omega = \omega$

Quando la pulsazione della forzante coincide con quella naturale del sistema ($\Omega = \omega$), si verifica il fenomeno della **risonanza**. In questo caso, $\pm j\Omega = \pm j\omega$ sono radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea, e la forma della soluzione particolare deve essere modificata.

Soluzione particolare. Si cerca una soluzione del tipo:

$$x_{PN}(t) = t[C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)] \quad (170)$$

Calcolando le derivate:

$$\dot{x}_{PN}(t) = [C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)] + t[-\omega C \sin(\omega t) + \omega D \cos(\omega t)] \quad (171)$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = 2\omega[D \cos(\omega t) - C \sin(\omega t)] - t\omega^2[C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)] \quad (172)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega^2 x = (F/m) \cos(\omega t)$:

$$2\omega[D \cos(\omega t) - C \sin(\omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\omega t) \quad (173)$$

Confrontando i coefficienti:

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = \frac{F}{2m\omega} \end{cases} \quad (174)$$

La soluzione particolare è:

$$x_{PN}(t) = \frac{F}{2m\omega} t \sin(\omega t) \quad (175)$$

Soluzione globale. Combinando con l'omogenea e applicando le condizioni iniziali:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{Ft}{2m\omega} \sin(\omega t)} \quad (176)$$

Verifica tramite il teorema di de l'Hôpital. Il risultato (176) può essere ottenuto anche calcolando il limite della soluzione (169) per $\Omega \rightarrow \omega$. Il termine problematico è:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (177)$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Applicando il teorema di de l'Hôpital, derivando rispetto a Ω :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{-(F/m)t \sin(\Omega t)}{-2\Omega} = \frac{Ft}{2\omega m} \sin(\omega t) \quad (178)$$

che conferma il risultato (175).

Interpretazione fisica. In condizioni di risonanza, il termine legato alla forzante ha ampiezza che cresce **linearmente** con il tempo t . Il coefficiente angolare dell'involuppo dipende da F , m e ω . Indipendentemente dalle condizioni iniziali, per $t \rightarrow +\infty$ questo termine prevale sugli altri, e la risposta del sistema diverge:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{Ft}{2m\omega} \sin(\omega t) \quad (179)$$

Questa è la **risposta a regime** del sistema in risonanza.

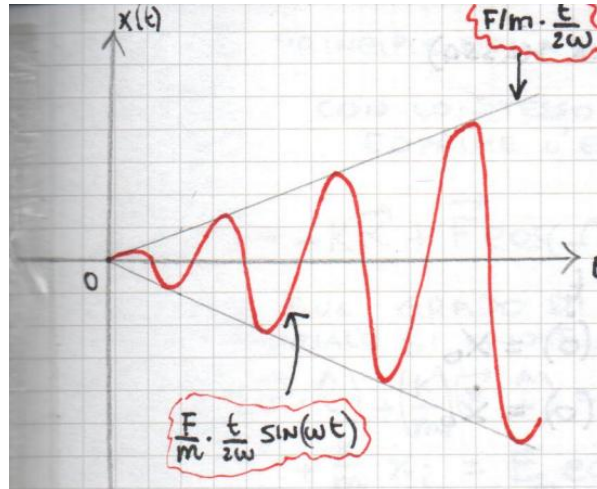


Figura 33: Risposta dell'oscillatore in risonanza: l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente nel tempo. L'involuppo è la retta di coefficiente angolare $F/(2m\omega)$.

Esempi di risonanza. Il fenomeno della risonanza ha conseguenze pratiche rilevanti:

- Vetri che si rompono per effetto di suoni intensi: la frequenza dell'onda sonora raggiunge quella naturale del vetro.
- Strutture che cedono per oscillazioni sincrone: stadi in cui i tifosi producono forzanti alla frequenza naturale della struttura.
- Soldati che rompono il passo sui ponti: per evitare di eccitare la frequenza naturale del ponte.

Limiti del modello lineare. La legge di Hooke $F_e = -Kx$ è valida solo per piccole ampiezze. Quando l'ampiezza supera determinati valori, il comportamento del sistema diventa non lineare e il modello cessa di essere applicabile.

20 Risposta in frequenza dell'oscillatore smorzato

Lo studio della **risposta in frequenza** consiste nell'analizzare come varia la soluzione dell'equazione differenziale al variare della frequenza della forzante. La risposta $x(t)$ rappresenta l'output del sistema per un dato input $F \cos(\Omega t)$.

20.1 Riepilogo: oscillatore libero non smorzato

Per il sistema massa-molla senza smorzamento né forzante, l'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (180)$$

con $\omega = \sqrt{K/m}$. Il bilancio della quantità di moto fornisce¹⁰:

$$\vec{F}^{(e)} = m\vec{a} \quad (181)$$

¹⁰Per massa costante, $\vec{F}^{(e)} = d\vec{p}/dt = m d\vec{v}/dt = m\vec{a}$.

Proiettando lungo l'asse del moto e imponendo $\vec{F}^{(e)} = -K\vec{x}$:

$$-Kx = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + Kx = 0 \quad (182)$$

L'equazione caratteristica $\gamma^2 + K/m = 0$ ammette due casi:

- $-K/m > 0$: radici reali (caso non fisico per $K, m > 0$);
- $-K/m < 0$: radici complesse coniugate $\gamma_{1,2} = \pm j\omega \Rightarrow$ oscillazioni.

La soluzione, nel caso oscillatorio, è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (183)$$

20.2 Oscillatore smorzato e forzato

Consideriamo ora il sistema con uno **smorzatore viscoso**, caratterizzato da un coefficiente $g > 0$ proporzionale alla velocità \dot{x} .

L'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + Kx = F \cos(\Omega t) \quad (184)$$

Dividendo per m :

$$\ddot{x} + \frac{g}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (185)$$

Si introducono i parametri caratteristici:

- **Pulsazione naturale:** $\omega = \sqrt{K/m}$
- **Rapporto di smorzamento:** $\xi = \frac{g}{2\omega m}$

Con queste definizioni, il termine g/m si riscrive come:

$$\frac{g}{m} = 2\xi\omega \quad (186)$$

e l'equazione differenziale assume la forma canonica:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (187)$$

Interpretazione fisica. Il rapporto di smorzamento ξ è un parametro adimensionale che caratterizza il comportamento del sistema:

- $\xi = 0$: nessuno smorzamento (oscillatore ideale);
- $0 < \xi < 1$: sistema **sottosmorzato** (oscillazioni che decadono);
- $\xi = 1$: smorzamento **critico**;
- $\xi > 1$: sistema **sovrasmorzato** (nessuna oscillazione).

20.3 Struttura della soluzione

La soluzione generale è:

$$x(t) = x_{GO}(t) + x_{PN}(t) \quad (188)$$

Per un sistema smorzato ($g > 0$), la parte omogenea $x_{GO}(t)$ decade nel tempo. Dopo un transitorio iniziale, per $t \rightarrow +\infty$ prevale la soluzione particolare $x_{PN}(t)$, che rappresenta la **risposta a regime** del sistema.

In un sistema non smorzato con radici complesse coniugate, la parte omogenea:

$$x_{GO}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (189)$$

persiste indefinitamente. L'introduzione dello smorzamento fa sì che l'energia non si conservi e l'ampiezza di $x_{GO}(t)$ tenda a zero.

Risposta in frequenza. Lo studio della risposta in frequenza analizza come varia la soluzione al variare di Ω (pulsazione della forzante), per diversi valori del rapporto di smorzamento ξ .

20.4 Classificazione in base al rapporto di smorzamento

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata a (187) è:

$$\delta^2 + 2\xi\omega\delta + \omega^2 = 0 \quad (190)$$

Le radici sono:

$$\delta_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (191)$$

La natura delle radici dipende dal valore di ξ :

Caso 1: $0 < \xi < 1$ (sottosmorzamento). Il discriminante è negativo e le radici sono complesse coniugate:

$$\delta_{1,2} = -\xi\omega \pm j\omega\sqrt{1 - \xi^2} = \beta \pm j\omega_d \quad (192)$$

dove $\beta = -\xi\omega < 0$ e $\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ è la **pulsazione smorzata**. Il sistema presenta un comportamento oscillatorio con ampiezza che decade esponenzialmente.

20.5 Classificazione dei regimi di smorzamento

Il comportamento dell'oscillatore smorzato dipende criticamente dal valore del rapporto di smorzamento ξ . Si distinguono tre regimi fondamentali:

Caso 1: Sottosmorzamento ($0 < \xi < 1$). Le radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate, e il sistema presenta un comportamento oscillatorio con ampiezza che decade esponenzialmente.

Caso 2: Smorzamento critico ($\xi = 1$). Le radici sono reali e coincidenti. Il sistema non oscilla, ma rappresenta il caso limite tra comportamento oscillatorio e non oscillatorio.

Caso 3: Sovrasmorzamento ($\xi > 1$). Le radici sono reali e distinte. Il sistema non presenta oscillazioni e ritorna all'equilibrio in modo aperiodico.

Interpretazione fisica. Lo smorzamento critico $\xi = 1$ rappresenta la condizione di confine: per ξ leggermente inferiore a 1, il sistema inizia a oscillare; per ξ superiore a 1, il sistema ritorna all'equilibrio senza oscillare. Un esempio pratico è il sistema di sospensioni di un veicolo: si progetta tipicamente con $\xi > 1$ (sovrasmorzamento) affinché la risposta a una perturbazione non sia oscillatoria.

20.6 Lo smorzamento critico

La condizione $\xi = 1$ equivale a:

$$\xi = \xi_{\text{crit}} = 2m\omega \quad (193)$$

Infatti, dalla definizione del rapporto di smorzamento:

$$\xi = \frac{g}{2m\omega} = \frac{g}{\xi_{\text{crit}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad g = \xi_{\text{crit}} \quad (194)$$

Lo smorzamento critico ξ_{crit} dipende quindi dalla massa m e dalla pulsazione naturale $\omega = \sqrt{K/m}$ del sistema.

21 Analisi dell'oscillatore smorzato forzato

Consideriamo l'equazione del moto completa:

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + Kx = F \cos(\Omega t) \quad (195)$$

Dividendo per m e cercando una soluzione del tipo $x(t) = Ce^{\alpha t}$, l'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$\alpha^2 + \frac{g}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0 \quad (196)$$

Le radici sono:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{g}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} \quad (197)$$

Introducendo i parametri $\omega = \sqrt{K/m}$ e $\xi = g/(2m\omega)$, le radici si riscrivono come:

$$\alpha_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (198)$$

L'equazione differenziale assume la forma canonica con un solo parametro adimensionale ξ :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (199)$$

21.1 Caso sottosmorzato: radici complesse coniugate

Per $0 < \xi < 1$, il discriminante è negativo ($\xi^2 - 1 < 0$) e le radici sono complesse coniugate:

$$\alpha_{1,2} = \beta \pm j\omega_D \quad (200)$$

dove:

- $\beta = -\xi\omega < 0$ è la parte reale (negativa per $\xi > 0$)
- $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ è la **pulsazione naturale smorzata**

Si noti che $\omega_D \neq \omega$: la presenza dello smorzamento riduce la pulsazione delle oscillazioni libere. Per $\xi \rightarrow 0$, si ha $\omega_D \rightarrow \omega$; per $\xi \rightarrow 1$, si ha $\omega_D \rightarrow 0$.

Soluzione dell'omogenea. La soluzione generale dell'omogenea, applicando le formule di Eulero, è:

$$x_{GO}(t) = e^{\beta t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] \quad (201)$$

Poiché $\beta < 0$ (essendo $\xi > 0$), per $t \rightarrow \infty$ il fattore esponenziale tende a zero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{GO}(t) = 0 \quad (202)$$

Interpretazione fisica. La parte omogenea rappresenta il **transitorio**: oscillazioni che decadono esponenzialmente a causa dello smorzamento. Dopo un tempo sufficientemente lungo, questa componente diventa trascurabile.

21.2 Soluzione particolare

Per la forzante $F \cos(\Omega t)$, si cerca una soluzione particolare della forma:

$$x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t) \quad (203)$$

Calcolando le derivate:

$$\dot{x}_{PN}(t) = \Omega [-C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t)] \quad (204)$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = -\Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] \quad (205)$$

Sostituendo nell'equazione (199) e raccogliendo i termini in $\cos(\Omega t)$ e $\sin(\Omega t)$:

$$\cos(\Omega t) [-\Omega^2 C + 2\xi\omega\Omega D + \omega^2 C] + \sin(\Omega t) [-\Omega^2 D - 2\xi\omega\Omega C + \omega^2 D] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (206)$$

Per l'uguaglianza dei coefficienti:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2)C + 2\xi\omega\Omega D = \frac{F}{m} \\ -2\xi\omega\Omega C + (\omega^2 - \Omega^2)D = 0 \end{cases} \quad (207)$$

Risolvendo il sistema:

$$C = \frac{(F/m)(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2\xi^2\Omega^2} \quad (208)$$

$$D = \frac{2(F/m)\xi\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2\xi^2\Omega^2} \quad (209)$$

21.3 Forma in ampiezza e fase

I coefficienti C e D possono essere espressi in termini di ampiezza Δ e fase φ :

$$\begin{cases} C = \Delta \cos \varphi \\ D = -\Delta \sin \varphi \end{cases} \quad (210)$$

La soluzione particolare si riscrive quindi come:

$$x_{PN}(t) = \Delta \cos(\Omega t + \varphi) \quad (211)$$

Le relazioni inverse sono:

$$\Delta = \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{D}{C}\right) \quad (212)$$

Interpretazione fisica. Dopo il transitorio ($t \rightarrow \infty$), la risposta del sistema è:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{PN}(t) = \Delta \cos(\Omega t + \varphi) \quad (213)$$

Il sistema oscilla alla frequenza della forzante Ω (non alla sua frequenza naturale ω), con ampiezza Δ e sfasamento φ rispetto alla forzante. Lo sfasamento è sempre negativo (ritardo): il sistema **risponde in ritardo** rispetto all'eccitazione.

22 Risposta in frequenza

Lo studio della **risposta in frequenza** consiste nell'analizzare come variano l'ampiezza Δ e la fase φ della risposta a regime al variare della frequenza Ω della forzante.

22.1 Espressioni adimensionali

Introducendo il rapporto di frequenze adimensionale $\delta = \Omega/\omega$, dopo opportune manipolazioni algebriche¹¹ si ottengono le espressioni fondamentali:

Ampiezza:

$$\Delta = \frac{F/K}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \quad (214)$$

dove si è usato $K = m\omega^2$.

Fase:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\xi\delta}{1 - \delta^2}\right) \quad (215)$$

La soluzione particolare a regime è quindi:

$$x_{PN}(t) = \frac{F/K}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \cos\left(\Omega t + \arctan\left[-\frac{2\xi\delta}{1 - \delta^2}\right]\right) \quad (216)$$

¹¹Si moltiplica numeratore e denominatore per ω^4 e si raccoglie.

22.2 Ampiezza adimensionalizzata

Per rappresentare graficamente la risposta in frequenza, si introduce l'**ampiezza adimensionalizzata**:

$$\hat{\Delta} = \frac{\Delta}{F/K} = \frac{1}{\sqrt{(1-\delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \quad (217)$$

Il fattore di normalizzazione F/K ha un significato fisico preciso: rappresenta l'**ampiezza della risposta statica**.

Interpretazione fisica. Per $\delta = 0$ (cioè $\Omega = 0$, forzante statica costante), si ha:

$$x(t) = \Delta \cos(0 + \varphi) = \Delta = \frac{F}{K} \quad (218)$$

Questo è lo spostamento che la massa assume sotto l'azione di una forza costante F : raggiunto l'equilibrio, la massa non si muove più. L'ampiezza adimensionalizzata $\hat{\Delta}$ rappresenta quindi il rapporto tra l'ampiezza dinamica e quella statica.

22.3 Diagramma di risposta in frequenza: ampiezza

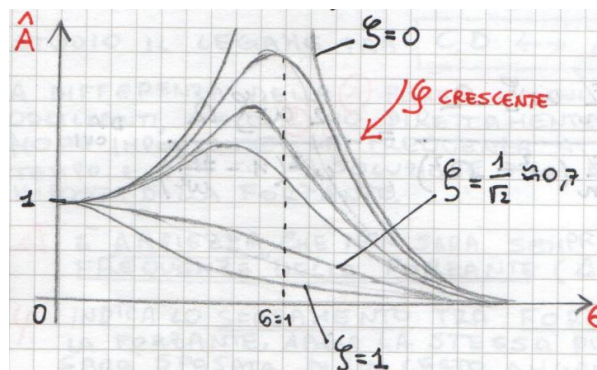


Figura 34: Diagramma di risposta in frequenza: ampiezza adimensionalizzata $\hat{\Delta}$ in funzione del rapporto di frequenze δ , per diversi valori del rapporto di smorzamento ξ . All'aumentare di ξ , il picco si abbassa e si sposta verso sinistra.

Dal diagramma si osservano le seguenti proprietà fondamentali:

- 1. Comportamento per $\delta = 0$.** Per qualsiasi valore di ξ , si ha $\hat{\Delta} = 1$. Le ampiezze statiche variano da sistema a sistema (dipendono da F e K), ma il rapporto adimensionalizzato è sempre unitario.
- 2. Effetto dello smorzamento.** Al diminuire di ξ (verso il sottosmorzamento), il picco di risonanza diventa più pronunciato e si sposta verso $\delta = 1$. Al limite $\xi \rightarrow 0$, si ha un asintoto verticale in $\delta = 1$ (risonanza ideale).
- 3. Comportamento per $\delta \rightarrow \infty$.** Tutte le curve tendono asintoticamente a zero. Per frequenze elevate della forzante, il sistema non riesce a seguire l'eccitazione a causa della sua **inerzia**: la forzante cambia segno prima che la massa possa reagire.

4. Posizione del massimo. Derivando $\hat{\Delta}$ rispetto a δ e ponendo la derivata uguale a zero:

$$\frac{\partial \hat{\Delta}}{\partial \delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_M = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (219)$$

Il massimo esiste solo se l'argomento della radice è positivo:

$$1 - 2\xi^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \quad (220)$$

Per $\xi = 1/\sqrt{2}$, il massimo si ha in $\delta_M = 0$. Per $\xi > 1/\sqrt{2}$, non esiste un massimo locale: la funzione è monotona decrescente.

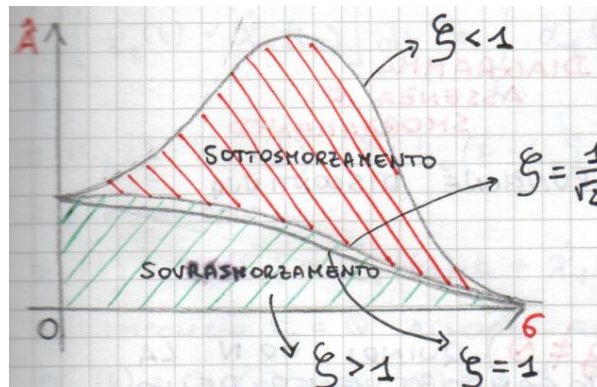


Figura 35: Suddivisione del diagramma di risposta in frequenza: per $\xi < 1/\sqrt{2}$ si ha sottosmorzamento con picco di risonanza; per $\xi > 1/\sqrt{2}$ si ha comportamento sovrasmorzato senza picco. Il valore $\xi = 1$ indica il passaggio da radici complesse a reali nell'omogenea.

Interpretazione fisica. Il valore $\xi = 1/\sqrt{2}$ separa due comportamenti qualitativamente diversi:

- Per $\xi < 1/\sqrt{2}$: il sistema presenta un picco di amplificazione (zona di sottosmorzamento);
- Per $\xi > 1/\sqrt{2}$: il sistema non presenta amplificazione rispetto alla risposta statica (zona di sovrasmorzamento).

Si noti che $\xi = 1$ (smorzamento critico) ricade nella zona di sovrasmorzamento: indica il passaggio da radici complesse a radici reali dell'omogenea, ma non rappresenta un valore critico per l'ampiezza della risposta forzata.

22.4 Il caso limite: risonanza ideale

Per $\xi = 0$ (assenza di smorzamento) e $\delta = 1$ (cioè $\Omega = \omega$), si ha la condizione di **risonanza ideale**. L'ampiezza adimensionalizzata presenta un asintoto verticale: $\hat{\Delta} \rightarrow \infty$.

In questo caso, le radici dell'omogenea sono $\alpha_{1,2} = \pm j\omega$, e la soluzione completa (già trattata nel caso di risonanza senza smorzamento) è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F}{2\omega m} t \sin(\omega t) \quad (221)$$

L'ultimo termine cresce linearmente con t : l'ampiezza diverge nel tempo.

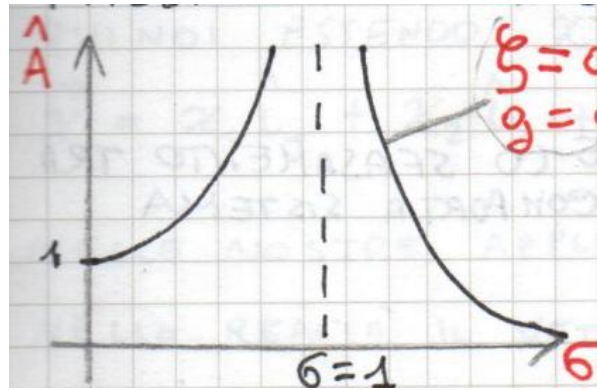


Figura 36: Caso limite $\xi = 0$: in assenza di smorzamento, per $\delta = 1$ si ha un asintoto verticale (risonanza ideale).

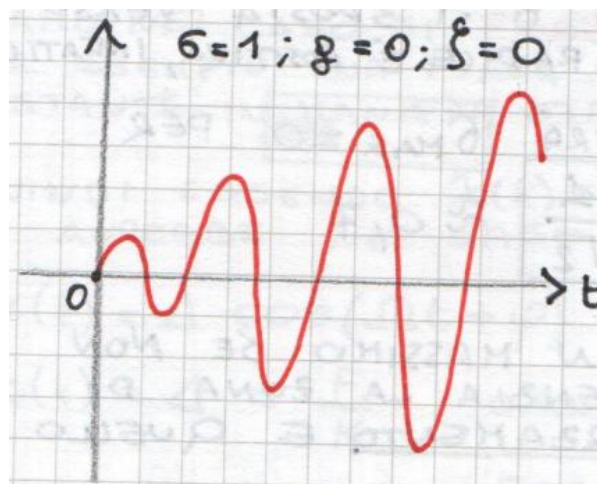


Figura 37: Risposta temporale in condizioni di risonanza ideale ($\xi = 0$, $\Omega = \omega$): l'ampiezza delle oscillazioni cresce linearmente nel tempo.

Interpretazione fisica. In assenza di smorzamento, l'energia fornita dalla forzante si accumula nel sistema senza essere dissipata, causando una crescita illimitata dell'ampiezza. Nella realtà, questo comportamento è limitato da non linearità e fenomeni dissipativi che intervengono per ampiezze elevate.

22.5 Diagramma di risposta in frequenza: fase

Lo sfasamento φ tra risposta e forzante è dato da:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\xi\delta}{1-\delta^2}\right) \quad (222)$$

Per il caso limite $\xi = 0$, si distinguono tre regioni:

1. $\delta < 1$ ($\Omega < \omega$): La risposta è **in fase** con la forzante ($\varphi = 0$).
2. $\delta = 1$ ($\Omega = \omega$): Si verifica un salto discontinuo; la risposta è in **quadratura** ($\varphi = -\pi/2$), cioè in ritardo di 90° .

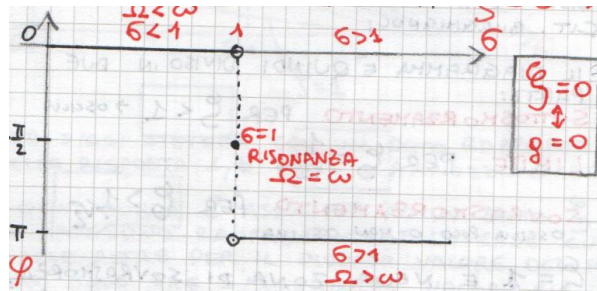


Figura 38: Diagramma delle fasi per il caso $\xi = 0$: la risposta è in fase con la forzante per $\delta < 1$, salta a $-\pi/2$ (quadratura) in $\delta = 1$, e si porta in opposizione di fase ($-\pi$) per $\delta > 1$.

3. $\delta > 1$ ($\Omega > \omega$): La risposta è in **opposizione di fase** ($\varphi = -\pi$), cioè in ritardo di 180° .

Interpretazione fisica. Il sistema risponde sempre **in ritardo** rispetto alla forzante. Per frequenze basse, il ritardo è trascurabile; alla risonanza, il ritardo è di un quarto di periodo; per frequenze alte, il sistema risponde in opposizione di fase, muovendosi in direzione contraria alla forzante.

22.6 Effetto dello smorzamento sul diagramma delle fasi

Nel caso di assenza di smorzamento ($\zeta = 0$), il diagramma delle fasi presenta una discontinuità: la funzione $\varphi(\delta)$ compie un salto da 0 a $-\pi$ in corrispondenza della risonanza ($\delta = 1$).

In presenza di smorzamento ($\zeta \neq 0$), il comportamento cambia qualitativamente: la funzione arctan è continua, e quindi lo sfasamento varia in modo graduale al crescere del rapporto di frequenze δ .

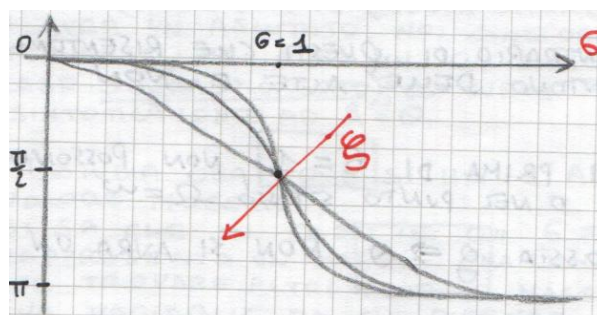


Figura 39: Diagramma delle fasi in presenza di smorzamento ($\zeta > 0$): lo sfasamento φ varia con continuità da 0 a $-\pi$. All'aumentare di ζ , la transizione diventa più graduale.

Interpretazione fisica. Il diagramma delle fasi è fondamentale per comprendere la relazione temporale tra l'ingresso (forzante) e l'uscita (risposta del sistema). Lo sfasamento φ indica di quanto la risposta è in ritardo rispetto alla forzante. La continuità della funzione nel caso smorzato riflette il fatto che il sistema dissipa energia gradualmente, evitando i comportamenti singolari tipici della risonanza ideale.

23 Sintesi sull'analisi spettrale delle matrici

In questa sezione si richiamano i concetti fondamentali dell'algebra lineare necessari per la comprensione della diagonalizzazione delle matrici, strumento essenziale in meccanica razionale per lo studio dei sistemi a più gradi di libertà.

23.1 Spazi vettoriali e basi

Uno **spazio vettoriale** V è un insieme dotato di due operazioni: la somma tra vettori e il prodotto per uno scalare. Formalmente, se $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\vec{u} + \vec{v} \in V$ e $\alpha\vec{u} \in V$.

Un esempio fondamentale è lo spazio \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad (223)$$

Una **combinazione lineare** di vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ è un vettore della forma:

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (224)$$

I vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli:

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}, \quad \text{con almeno un } a_k \neq 0 \quad (225)$$

Si dicono **linearmente indipendenti** se l'unica combinazione lineare nulla è quella con tutti i coefficienti nulli.

Un insieme di vettori $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ costituisce una **base** di V se:

- è un insieme di generatori di V (ogni vettore di V è esprimibile come combinazione lineare);
- i vettori sono linearmente indipendenti.

La **dimensione** di uno spazio vettoriale è il numero di elementi di una sua qualunque base. Per esempio, \mathbb{R}^n ha dimensione n .

23.2 Applicazioni lineari

Un'**applicazione** da un insieme A a un insieme B è una legge $f : A \rightarrow B$ che associa a ciascun elemento di A un elemento di B .

Un'applicazione si dice:

- **iniettiva** se $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$;
- **suriettiva** se $\text{Im } f = B$;
- **biiettiva** (o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

Un'**applicazione lineare** soddisfa la proprietà:

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v}), \quad a, b \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in V \quad (226)$$

Rappresentazione matriciale. Ogni applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ può essere rappresentata mediante una matrice A di dimensione $m \times n$:

$$F(\vec{u}) = A\vec{u} = \vec{v} \quad (227)$$

23.3 Endomorfismi e cambio di base

Un **endomorfismo** è un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$, ovvero un'applicazione dallo spazio vettoriale in sé stesso.

Fissata una base B di V , si definisce **matrice associata** a f rispetto a B la matrice che rappresenta l'applicazione lineare. Tale matrice dipende dalla scelta della base.

Se B e B' sono due basi di V , ogni vettore di B' può essere espresso come combinazione lineare dei vettori di B :

$$B' = BM \quad (228)$$

dove M è la **matrice di passaggio** (o di cambiamento di base), invertibile.

Due matrici quadrate A e A' si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile M tale che:

$$A' = M^{-1}AM \quad (229)$$

Se A e A' sono matrici associate allo stesso endomorfismo f rispetto a basi diverse, allora sono simili.

23.4 Autovalori e autovettori

Un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ si dice **autovettore** di un endomorfismo f associato all'**autovalore** $\lambda \in \mathbb{R}$ se:

$$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \quad (230)$$

In termini matriciali, dato un endomorfismo con matrice associata A :

$$A\vec{z} = \lambda\vec{z} \quad (231)$$

Interpretazione fisica. L'autovettore \vec{z} rappresenta una direzione privilegiata: quando l'operatore A agisce su di esso, il risultato è semplicemente un riscaldamento del vettore stesso, senza cambiamento di direzione.

Calcolo degli autovalori. Gli autovalori si determinano risolvendo l'**equazione caratteristica**:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (232)$$

Questa è un'equazione polinomiale di grado n (per una matrice $n \times n$) nell'incognita λ .

Calcolo degli autovettori. Per ciascun autovalore λ_k , gli autovettori associati si trovano risolvendo il sistema:

$$(A - \lambda_k I)\vec{z}^{(k)} = \vec{0} \quad (233)$$

Molteplicità. Per ogni autovalore λ si definiscono:

- **Molteplicità algebrica:** il numero di volte che λ annulla il polinomio caratteristico;
- **Molteplicità geometrica:** la dimensione dell'autospazio associato, pari a $n - \text{rg}(A - \lambda I)$.

23.5 Diagonalizzazione

Un endomorfismo f si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di V formata da autovettori di f . In tal caso, la matrice associata rispetto a questa base è diagonale:

$$A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (234)$$

Procedimento di diagonalizzazione.

1. Calcolare gli autovalori risolvendo $\det(A - \lambda I) = 0$;
2. Per ogni autovalore λ_k , determinare gli autovettori risolvendo $(A - \lambda_k I)\vec{z}^{(k)} = \vec{0}$;
3. Costruire la matrice di passaggio T disponendo gli autovettori come colonne;
4. La matrice diagonalizzata è $B = T^{-1}AT$.

23.6 Ortogonalità e matrici simmetriche

Due vettori \vec{v} e \vec{u} si dicono **ortogonali** se:

$$\vec{v} \perp \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \quad (235)$$

La **norma** di un vettore in \mathbb{R}^n è:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \quad (236)$$

Una base si dice **ortonormale** se i vettori sono a due a due ortogonali e hanno norma unitaria.

Un endomorfismo si dice **simmetrico** se la sua matrice associata è simmetrica: $A^T = A$.

Teorema spettrale. Se f è un endomorfismo simmetrico (quindi A è simmetrica), allora:

- f è diagonalizzabile;
- esiste una base ortonormale costituita da autovettori di f ;
- gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Se la matrice di passaggio T è formata da autovettori ortonormali, allora T è **ortogonale**:

$$T^{-1} = T^T \quad \Rightarrow \quad TT^T = I \quad (237)$$

In questo caso, la diagonalizzazione si scrive:

$$B = T^T A T \quad (238)$$

23.7 Esempio di diagonalizzazione

Consideriamo la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (239)$$

Passo 1: Autovalori. L'equazione caratteristica è:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad (240)$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

Passo 2: Autovettori. Per $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow \vec{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (241)$$

Per $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = -z_2 \Rightarrow \vec{z}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (242)$$

Passo 3: Matrice di passaggio e diagonalizzazione.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (243)$$

La matrice diagonalizzata è¹²:

$$A' = T^T A T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (244)$$

23.8 Matrice di trasformazione tra sistemi di riferimento

Consideriamo un vettore \vec{v} espresso in due sistemi di riferimento con basi $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ e $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 v'_k \hat{e}'_k \quad (245)$$

Le componenti nel nuovo sistema si ottengono proiettando il vettore sui nuovi versori:

$$v'_k = \vec{v} \cdot \hat{e}'_k = \sum_{j=1}^3 v_j (\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_k) \quad (246)$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (247)$$

¹²Il risultato $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ differisce dalla matrice diagonale degli autovalori per un fattore 2, poiché gli autovettori non sono normalizzati. Normalizzando, si otterrebbe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

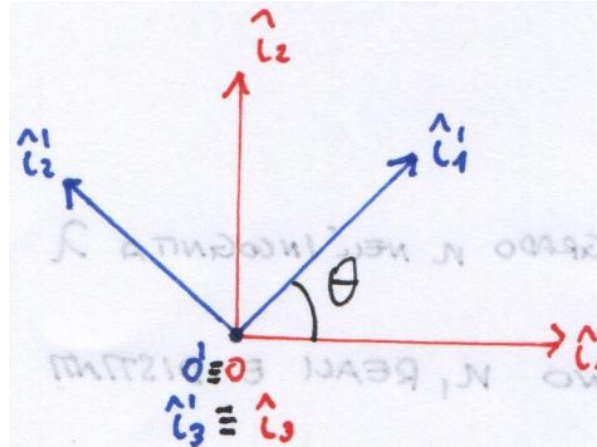


Figura 40: Due sistemi di riferimento con origine comune: le basi $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ e $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ sono ruotate di un angolo θ .

La **matrice di trasformazione** ha elementi:

$$T_{kj} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_k \quad (248)$$

Per una rotazione di angolo θ attorno all'asse \hat{e}_3 :

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (249)$$

24 Richiami su operatori lineari e momenti

24.1 Operatore differenziale lineare

Un operatore \mathcal{L} applicato a una funzione $u(t)$ soddisfa le proprietà di linearità:

$$\mathcal{L}[\alpha u(t)] = \alpha \mathcal{L}[u(t)] \quad (250)$$

$$\mathcal{L}[u(t) + w(t)] = \mathcal{L}[u(t)] + \mathcal{L}[w(t)] \quad (251)$$

$$\mathcal{L}[\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[u_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[u_2(t)] \quad (252)$$

Un'equazione differenziale si classifica come:

- **ordinaria**: dipende da una sola variabile indipendente;
- **lineare**: funzione e derivate compaiono con esponente unitario;
- **a coefficienti costanti**: i coefficienti non dipendono dalla variabile;
- **omogenea o non omogenea**: a seconda che $f(t) = 0$ o $f(t) \neq 0$.

24.2 Condizioni di annullamento del momento

Il momento di un vettore \vec{N} applicato in P rispetto al polo O :

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{N} \quad (253)$$

è nullo se e solo se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

1. $O \equiv P$ (il polo coincide con il punto di applicazione): $\vec{OP} = \vec{0}$;
2. $\vec{N} = \vec{0}$ (il vettore è nullo);
3. $\vec{OP} \parallel \vec{N}$ (il vettore posizione è parallelo al vettore applicato).

24.3 Coseni direttori

I **coseni direttori** di un vettore \vec{n} sono i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi coordinati.

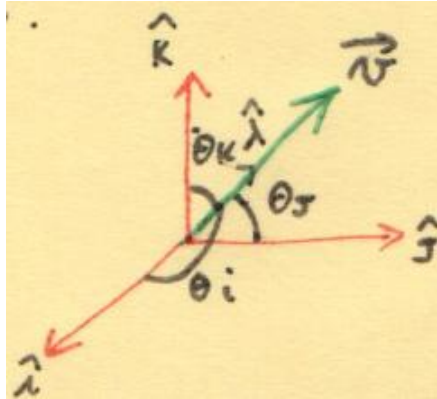


Figura 41: Coseni direttori: il vettore \vec{n} forma angoli $\theta_i, \theta_j, \theta_k$ con i rispettivi assi coordinati.

Se $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono i versori degli assi, i coseni direttori sono:

$$\cos \theta_i = \frac{\vec{n} \cdot \hat{i}}{|\vec{n}|}, \quad \cos \theta_j = \frac{\vec{n} \cdot \hat{j}}{|\vec{n}|}, \quad \cos \theta_k = \frac{\vec{n} \cdot \hat{k}}{|\vec{n}|} \quad (254)$$

24.4 Diagramma delle fasi in presenza di smorzamento

In tutti i casi con $\zeta \neq 0$ (presenza di smorzamento), il comportamento dello sfasamento è **continuo** e non presenta discontinuità. Questo perché la funzione arctan è continua su tutto il suo dominio.

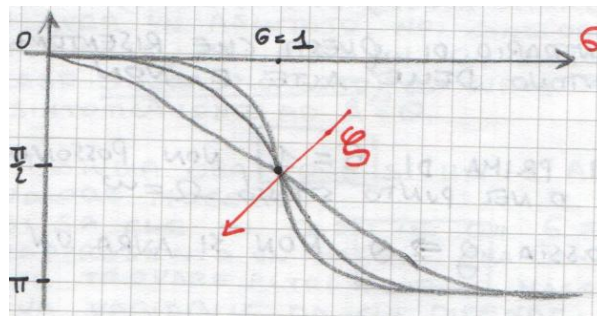


Figura 42: Diagramma delle fasi in presenza di smorzamento ($\zeta > 0$): lo sfasamento φ varia con continuità da 0 a $-\pi$. All'aumentare di ζ , la transizione diventa più graduale.

Interpretazione fisica. Il diagramma delle fasi è fondamentale per comprendere lo sfasamento tra l'input (forzante) e l'output (risposta del sistema). Al variare del rapporto di smorzamento

ζ , la curva di fase si modifica: per valori elevati di ζ , la transizione da $\varphi = 0$ a $\varphi = -\pi$ avviene in modo molto graduale, mentre per ζ piccoli la transizione è più ripida, avvicinandosi al comportamento discontinuo del caso ideale $\zeta = 0$.

25 Dimostrazione dell'ortogonalità degli autovettori

Per una matrice simmetrica A ($A = A^T$), gli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Questa proprietà fondamentale si dimostra nel modo seguente.

Siano $\underline{z}^{(1)}$ e $\underline{z}^{(2)}$ due autovettori di A associati rispettivamente agli autovalori λ_1 e λ_2 , con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Per definizione:

$$A\underline{z}^{(1)} = \lambda_1 \underline{z}^{(1)} \quad (255)$$

$$A\underline{z}^{(2)} = \lambda_2 \underline{z}^{(2)} \quad (256)$$

Trasponiamo l'equazione (256):

$$\underline{z}^{(2)T} A^T = \lambda_2 \underline{z}^{(2)T} \quad (257)$$

Poiché A è simmetrica ($A^T = A$):

$$\underline{z}^{(2)T} A = \lambda_2 \underline{z}^{(2)T} \quad (258)$$

Moltiplichiamo l'equazione (255) a sinistra per $\underline{z}^{(2)T}$:

$$\underline{z}^{(2)T} A \underline{z}^{(1)} = \lambda_1 \underline{z}^{(2)T} \underline{z}^{(1)} \quad (259)$$

Moltiplichiamo l'equazione (258) a destra per $\underline{z}^{(1)}$:

$$\underline{z}^{(2)T} A \underline{z}^{(1)} = \lambda_2 \underline{z}^{(2)T} \underline{z}^{(1)} \quad (260)$$

Sottraendo (260) da (259):

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{z}^{(2)T} \underline{z}^{(1)} \quad (261)$$

Poiché per ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deve essere:

$$\underline{z}^{(2)T} \underline{z}^{(1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}^{(1)} \perp \underline{z}^{(2)} \quad (262)$$

26 Risoluzione del sistema per i coefficienti C e D

Riprendiamo il sistema ottenuto dalla sostituzione della soluzione particolare nell'equazione dell'oscillatore smorzato forzato:

$$\begin{cases} C(\omega^2 - \Omega^2) + 2\omega\xi\Omega D = F/m \\ D(\omega^2 - \Omega^2) - 2\omega\xi\Omega C = 0 \end{cases} \quad (263)$$

Dalla seconda equazione ricaviamo C :

$$C = \frac{D(\omega^2 - \Omega^2)}{2\omega\xi\Omega} \quad (264)$$

Sostituendo nella prima equazione:

$$D \frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2}{2\omega\xi\Omega} + 2\omega\xi\Omega D = \frac{F}{m} \quad (265)$$

Raccogliendo D :

$$D \left[\frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2 \Omega^2}{2\omega \xi \Omega} \right] = \frac{F}{m} \quad (266)$$

Da cui:

$$D = \frac{2(F/m)\omega \xi \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2 \Omega^2} \quad (267)$$

Sostituendo nell'espressione di C :

$$C = \frac{(F/m)(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \xi^2 \Omega^2} \quad (268)$$

27 Dimostrazione del prodotto scalare in componenti

Dimostriamo che il prodotto scalare tra due vettori può essere espresso come somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^3 N_k u_k \quad (269)$$

Sviluppando i vettori in termini dei versori della base:

$$\left(\sum_{k=1}^3 N_k \hat{u}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 u_j \hat{u}_j \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 N_k u_j (\hat{u}_k \cdot \hat{u}_j) \quad (270)$$

Poiché i versori sono ortonormali, $\hat{u}_k \cdot \hat{u}_j = \delta_{kj}$ (delta di Kronecker), tutti i termini con $k \neq j$ si annullano¹³:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^3 N_k u_k = \vec{u} \cdot \vec{N} \quad (271)$$

L'ultima uguaglianza esprime la **commutatività** del prodotto scalare.

28 Teorema di Varignon

Il **teorema di Varignon** stabilisce una proprietà fondamentale dei momenti di vettori applicati in uno stesso punto.

Enunciato. Dati N vettori applicati in uno stesso punto P , il momento risultante rispetto a un polo O è uguale al momento della risultante applicata in P :

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^N \vec{OP} \times \vec{N}_k = \vec{OP} \times \sum_{k=1}^N \vec{N}_k = \vec{OP} \times \vec{R} \quad (272)$$

¹³Il prodotto scalare $\hat{u}_k \cdot \hat{u}_j = \cos 90^\circ = 0$ quando $k \neq j$, essendo i versori mutuamente ortogonali.

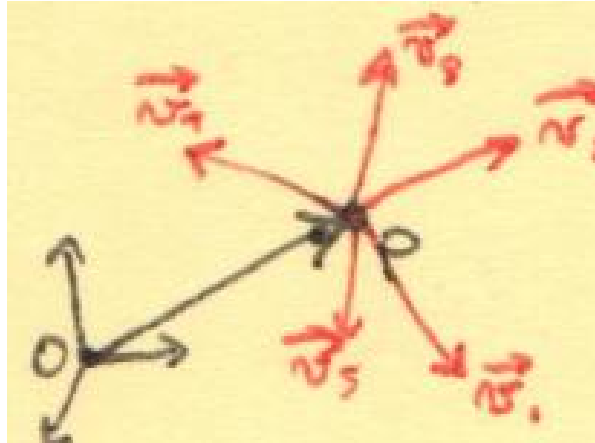


Figura 43: Illustrazione del teorema di Varignon: più vettori $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots$ applicati nello stesso punto P possono essere sostituiti dalla loro risultante \vec{R} per il calcolo del momento rispetto a O .

Dimostrazione. Poiché tutti i vettori sono applicati nello stesso punto P , il raggio vettore \vec{OP} non dipende dall'indice k della sommatoria. Per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^N \vec{OP} \times \vec{N}_k = \vec{OP} \times \left(\sum_{k=1}^N \vec{N}_k \right) = \vec{OP} \times \vec{R} \quad (273)$$

Interpretazione fisica. Il teorema afferma che, ai fini del calcolo del momento, un sistema di vettori concorrenti può essere sostituito dalla loro risultante. Questo semplifica notevolmente l'analisi di sistemi di forze applicate in uno stesso punto.

29 Significato fisico dell'asse centrale

In meccanica, i vettori applicati e i vettori risultanti rappresentano tipicamente forze, e i momenti sono momenti di forze. L'interesse pratico per l'asse centrale deriva dalla necessità di minimizzare le sollecitazioni a cui le strutture di sostegno sono sottoposte.

In un sistema di vettori applicati, la risultante \vec{R} è univocamente determinata, mentre il momento risultante \vec{M}_O varia in funzione del polo scelto. Si cercano quindi i punti che, presi come polo, rendono **minimo** il modulo del momento risultante: questi punti costituiscono l'**asse centrale** del sistema.

30 Derivazione della posizione del massimo dell'ampiezza

Per determinare la posizione del massimo dell'ampiezza adimensionalizzata $\hat{\Delta}$, calcoliamo la derivata rispetto a δ e la poniamo uguale a zero:

$$\frac{d\hat{\Delta}}{d\delta} = \frac{d}{d\delta} \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \right] = 0 \quad (274)$$

Applicando la regola di derivazione:

$$\frac{d\hat{\Delta}}{d\delta} = \frac{-\frac{1}{2}[-2(1-\delta^2)(-2\delta) + 8\xi^2\delta]}{[(1-\delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2]^{3/2}} = 0 \quad (275)$$

Affinché la frazione si annulli, basta annullare il numeratore:

$$-[(1-\delta^2)(-2\delta) + 4\xi^2\delta] = 0 \quad (276)$$

Sviluppando:

$$-[-2\delta + 2\delta^3 + 4\xi^2\delta] = 0 \quad (277)$$

$$-2\delta[-1 + \delta^2 + 2\xi^2] = 0 \quad (278)$$

Le soluzioni sono:

- $\delta = 0$ (soluzione banale, corrispondente a $\hat{\Delta} = 1$)
- $\delta^2 = 1 - 2\xi^2$, da cui $\delta_M = \sqrt{1 - 2\xi^2}$

31 Caso particolare: radici nulle coincidenti

Consideriamo il caso in cui $\alpha_1 = 0$ e $-b/a = 0$ nell'equazione caratteristica, ovvero:

$$\delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{1,2} = 0 \quad (\text{molteplicità algebrica } 2) \quad (279)$$

La soluzione generale dell'omogenea è:

$$u(t) = C_1 e^{0 \cdot t} + C_2 t e^{0 \cdot t} = C_1 + C_2 t \quad (280)$$

Applicando le condizioni iniziali $u(0) = u_0$ e $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$:

$$u(0) = C_1 = u_0 \quad (281)$$

$$\dot{u}(0) = C_2 = \dot{u}_0 \quad (282)$$

La soluzione è quindi:

$$u(t) = u_0 + \dot{u}_0 t \quad (283)$$

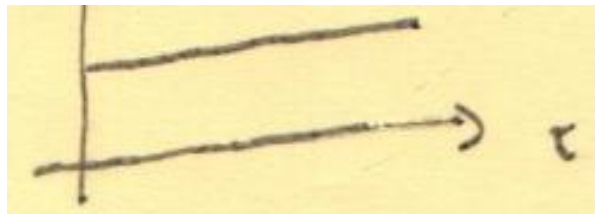


Figura 44: Andamento lineare della soluzione nel caso di radici nulle coincidenti: $u(t) = u_0 + \dot{u}_0 t$.

Interpretazione fisica. Questa soluzione descrive il moto di un corpo su cui non agisce alcuna forza netta: il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante \dot{u}_0 , partendo dalla posizione iniziale u_0 . Se inoltre $\dot{u}_0 = 0$, il corpo permane indefinitamente in quiete nella posizione u_0 .

32 Coseni direttori

I **coseni direttori** di un vettore \vec{n} sono i coseni degli angoli che il vettore forma con gli assi coordinati.

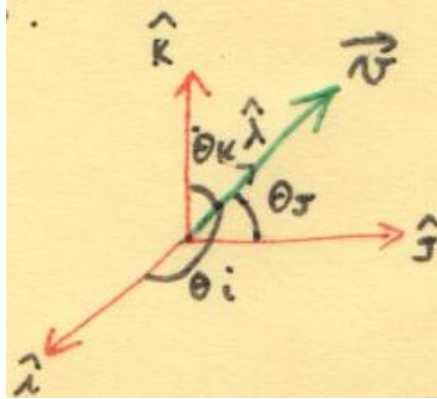


Figura 45: Coseni direttori: il vettore \vec{n} forma angoli θ_i , θ_j , θ_k con i rispettivi assi coordinati \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} .

Il versore associato a \vec{n} si esprime come:

$$\hat{l} = \cos \theta_i \hat{i} + \cos \theta_j \hat{j} + \cos \theta_k \hat{k} \quad (284)$$

I coseni direttori soddisfano la relazione di normalizzazione:

$$\cos^2 \theta_i + \cos^2 \theta_j + \cos^2 \theta_k = 1 \quad (285)$$