

CINEMATICA

DINAMICA

MOTO DEI CORPI → IPOTIZZIAMO CORPI
RIGIDI TRASCURANDO
LE DEFORMAZIONI

COSE IN PIÙ

MECCANICA RAZIONALE È SCIENZA CHE DESCRIVE I FENOMENI NATURALI SENZA FIGURE NÉ IMMAGINI OSSIA ANALITICAMENTE. CIÒ È STATO POSSIBILE GRAZIE A LEIBNITZ E NEWTON (CALCOLO DIFFERENZIALE)

VEETTORE È ENTE GEOMETRICO CHE PUÒ ESSERE:

- LIBERO: NON DIPENDE DAL PUNTO DI APPLICAZIONE
- APPLICATO: DIPENDE DAL PUNTO DI APPLICAZIONE
- DI POSIZIONE: PUNTO DI APPLICAZIONE NELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO È VETTORE VARIANTE POICHÉ DIPENDE DAL SPR.

SE SI PARLA DI VETTORI LIBERI $\vec{a}$ E $\vec{b}$:

→ →
 $\vec{a} \equiv \vec{b}$ SE SONO UGUALI IN MODULO, VERSO E DIREZIONE

GRANDEZZE VARIABILI NEL TEMPO

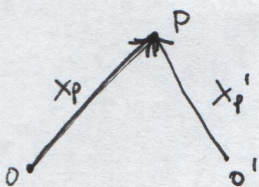
$$\vec{v}(t) = \sum_{k=1}^3 (\vec{v}(t) \cdot \hat{u}_k) \hat{u}_k = \sum_{k=1}^3 v_k(t) \hat{u}_k$$

IN CASO IN CUI ANCHE I VERSORI SIANO VARIABILI:

$$\vec{v}(t) = \sum_{k=1}^3 ((\vec{v}(t) \cdot \hat{u}_k(t)) \hat{u}_k(t))$$

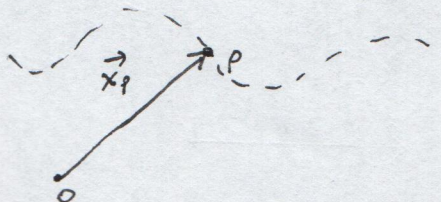
DUE VETTORI APPLICATI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ SI DICONO EQUIPOTENTI SE HANNO:
• STESSA INTENSITÀ, STESSO VERSO, STESSA DIREZIONE MA NON SI DICE CHE SONO UGUALI ($\vec{a} \neq \vec{b}$)

VEETTORI DI POSIZIONE SONO VEETTORI APPLICATI MA NELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO



$\vec{x}_P$ E $\vec{x}'_P$ SONO VETTORI DI POSIZIONE DI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI. IL VETTORE POSIZIONE È VARIANTE IN BASE AL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO MENTRE LA POSIZIONE CHE IDENTIFICA NO.

IL MOTO È L'EQUAZIONE DEL VETTORE POSIZIONE NEL TEMPO



$\vec{x}_P(t)$ IN QUANTO TEMPO DIPENDENTE IN QUESTO CASO.

È FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE INDIPENDENTE SCALARE.

$\vec{x}_P$ È DEFINITA DA { INTENSITÀ
VERSO
DIREZIONE
PUNTO DI APPLICAZIONE

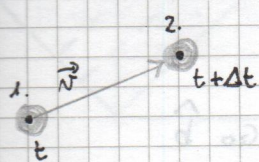
→ DOVREI PORTARE DIETRO MOLTE INFORMAZIONI NEL CALCOLO → USO I GRADI DI LIBERTÀ

GRADO DI LIBERTÀ DI UN PUNTO LIBERO IN UNO SPAZIO TRIDIMENSIONALE È IL NUMERO DI PARAMETRI SCALARI DEI QUALI SI HA BISOGNO PER INDIVIDUARE UNIVOCAMENTE LA SUA POSIZIONE.

PAZIO TRIDIMENSIONALE → 3 GRADI DI LIBERTÀ → QUALSIASI PUNTO DELLO SPAZIO PUÒ ESSERE RAGGIUNTO A QUALSIASI ALTRO PUNTO DELLO SPAZIO MUOVENDOSI DI UNA CERTA QUANTITÀ, SPOSTANDOSI LUNGO 3 DIREZIONI ORTOGONALI → 3 PARAMETRI CHE INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DEL PUNTO DELLO SPAZIO

MECCANICA (STUDIO DEL MOTO) RAZIONALE (STUDIO EFFETTUATO IN VIA ANALITICA)

1. ALGEBRA VETTORIALE: VETTORE È ENTE GEOMETRICO DEFINITO DA MODULO, DIREZIONE, VERSO.



LA CORONA INTORNO AL PUNTO 1 E 2 INDICA IL LUOGO, IL PUNTO DI APPLICAZIONE, ALTRIMENTI I PUNTI 1 E 2 POTREBBERO ESSERE OVUNQUE NELLO SPAZIO.

QUINDI SI PARLA DI VETTORE APPLICATO $(P, \vec{v})$ CHE È COPPIA DI ENTITÀ GEOMETRICHE, IL VETTORE E LA ZONA DI CORONA IN CUI È APPLICATO. IN SEGUITO SI PARLERÀ DI VETTORI APPLICATI MA SENZA LA DOPPIA NOTAZIONE.

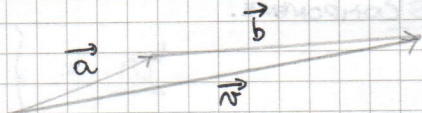
LE SEGUENTI DEFINIZIONI NON RIGUARDANO I VETTORI APPLICATI:



• VETTORE È SPECIFICATO CON LETTERA E FRECCIA $\rightarrow$

• PRODOTTO VETTORE-SCALARE: $\alpha \vec{v} = \vec{u}$; PRODUCE STESSA GIACITURA, STESSA DIREZIONE, MODULO SCALATO DI $\vec{v}$, VERSO CONCORDE O DISCORDE A SECONDA DI α

• SOMMA TRA VETTORI: $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$; SI UNISCE IL PUNTO DI APPLICAZIONE DEL PRIMO ADDENDO CON PUNTO FINALE DEL SECONDO.



• VETTORE NULO È ASSOCIATO A SEGMENTO ORIENTATO CON LUNGHEZZA NULLA, COLLASSANDO IN UN PUNTO.

QUINDI IL VETTORE OPPOSTO: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ CHE NON È LO ZERO SCALARE.

$\vec{a}$ E $\vec{b}$ HANNO STESSA GIACITURA, STESSA INTENSITÀ MA VERSO OPPOSTO, NON SONO PERÒ PARALLELI, POICHÉ PUNTO DI APPLICAZIONE NON È STABILITO; SONO PARALLELI SE APPARTENGONO A STESSO FASCIO IMPROPRIO DI RETTE: $\vec{a} = \vec{b} \rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. IL VETTORE È SEGMENTO ORIENTATO INDIPENDENTE DAL PUNTO IN CUI È APPLICATO.

ESISTONO QUINDI GRANDEZZE FISICHE SCALARI E VETTORIALI

L'OMOGENETÀ DIMENSIONALE È TALE PER CUI: $A = B$

L'ANALISI DIMENSIONALE È STABILIRE DIMENSIONI FISICHE, UNIVERSALI E INVARIANTI, DIVERSE DALLE UNITÀ DI MISURA, VARIANTI E NON UNIVERSALI, POICHÉ SONO RAPPORTI TRA QUELLO CHE STO MISURANDO E L'UNITÀ DEFINITA TALE

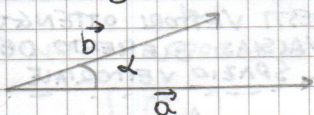
LE GRANDEZZE FONDAMENTALI SONO:

$[M]$ = MASSA $[L]$ = LUNGHEZZA $[T]$ = TEMPO $[Q]$ = CARICA $[\theta]$ = TEMPERATURA ASSOLUTA

• PRODOTTO SCALARE: DÀ UN VALORE SCALARE

È PROIEZIONE DEL SECONDO VETTORE SUL PRIMO.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$



$$a = |\vec{a}| \text{ E } b = |\vec{b}| \rightarrow \text{NORME O MODULI DEI VETTORI}$$

NOTAZIONE CLASSICA ITALIANA

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

• PRODOTTO VETTORIALE: GENERA ALTRO VETTORE DELLO STESSO PIANO.

NOTAZIONE CLASSICA ITALIANA

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

INTENSITÀ: È DATA DA:

$$u \cdot v \cdot \sin \alpha$$

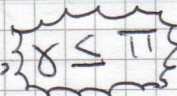
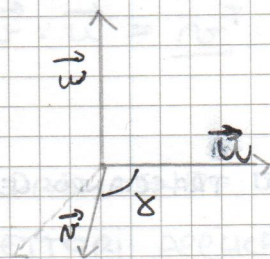
α ANGOLO MINORE

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

DIREZIONE: È DIREZIONE O GIACITURA ORTOGONALE AL PIANO SU CUI GIACCONO I VETTORI.

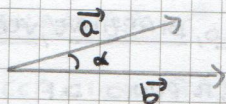
VERSO: È VERSO CHE PERMETTE DI COSTRUIRE UNA TERNA DESTRA.

BASTA RUOTARE $\vec{u}$ (PRIMO FATTORE) SU $\vec{v}$ (SECONDO FATTORE) GUARDANDO DA $\vec{w}$.

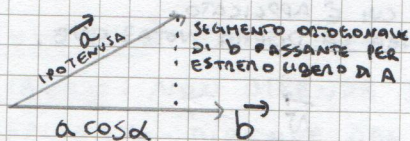


RIPRENDEMO IL PRODOTTO SCALARE, IMMAGINANDO CHE b HA MODULO UNITARIO

$|\vec{b}| = 1$ MODULO $\neq |b|$ o b POICHÉ NON CONSIDEREREMO LA NATURA VETTORE DI $\vec{b}$.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha = a \cos \alpha$$



DEFINISCO LA COMPONENTE DI $\vec{a}$ LUNGO $\hat{b}$

$\hat{b}$ È VETTORE DI INTENSITÀ UNITARIA DIRETTO E ORIENTATO COME b , DEFINITO VERSORE.

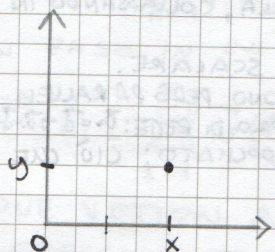
QUINDI IN QUESTO CASO $\vec{b} = \hat{b}$ ALORA $\vec{a} \cdot \vec{b} \cos \alpha = a \cos \alpha$

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

IL VETTORE COMPONENTE DI $\vec{a}$ LUNGO $\hat{b}$ È: $(\vec{a} \cdot \hat{b}) \cdot \hat{b} = a \hat{b}$ CHE HA DIREZIONE DI b E INTENSITÀ E VERSO DATI DALLA COMPONENTE.

DEFINIZIONE PIANO

• VA DEFINITA LA DIREZIONE, IN QUESTO CASO DIREZIONI CARTESIANE, CHE HANNO ANGOLO DI $\pi/2$



ATTRAVERSO COPPIA DI VALORI POSSO UNIVOCAMENTE STABILIRE UN PUNTO. LO STESSO AVVIENE PER 3 DIMENSIONI.

POSSIAMO INDICARE GLI ASSI TRAMITE I VERSORI

$\hat{u}_k, \hat{u}_j$.

LA FUNZIONE δ_{kj} CI DICE CHE:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

DELTA DI KRONECKER

ESSENDO UNA TERNA DESTRA POSSIAMO DIRE CHE:

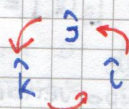
$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3$$

OPPURE

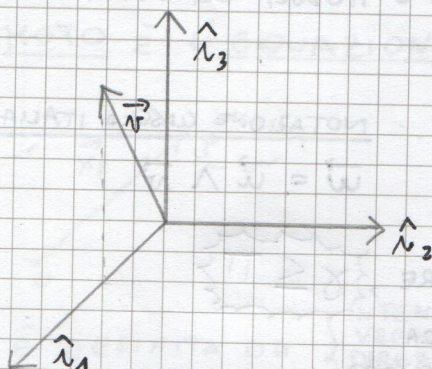
$$\hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1$$

$$\hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

RELAZIONE CICLICA



DEFINENDO UN VETTORE GENERICO:



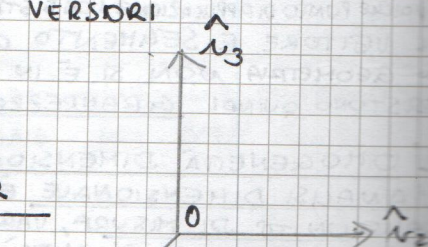
SE EFFETTUO $\vec{N} \cdot \hat{u}_1 = N_1$

CHE È LA COMPONENTE DI $\vec{N}$ LUNGO $\hat{u}_1$; LO STESSO VALE PER:

$$\vec{N} \cdot \hat{u}_2 = N_2$$

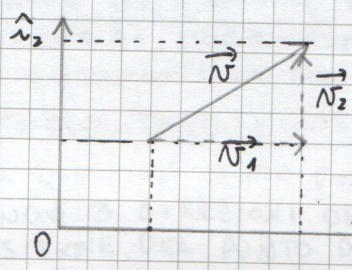
$$\vec{N} \cdot \hat{u}_3 = N_3$$

LE COMPONENTI



$\hat{u}_k$ CON $k=1,2,3$ È UNA BASE ORTONORMALE DI V^3 COMBINANDO LINEARMENTE QUESTI VETTORI OTTENGO QUALSIASI ELEMENTO DEL SPAZIO VETTORIALE

DATO UN CERTO $\vec{N}$, AUREMO QUINDI LE CORRISPONDENTI COMPONENTI TRACCIANDO LE RELATIVE PROIEZIONI:



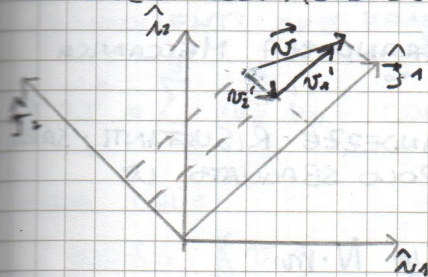
$$\vec{N}_1 = N_1 \hat{u}_1 = (\vec{N} \cdot \hat{u}_1) \hat{u}_1$$

$$\vec{N}_2 = N_2 \hat{u}_2 = (\vec{N} \cdot \hat{u}_2) \hat{u}_2$$

QUINDI:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \sum_{k=1}^2 \vec{N}_k = \sum_{k=1}^2 (\vec{N} \cdot \hat{u}_k) \hat{u}_k$$

SE SCEGLIEMMO ALTRI DUE ASSI CARTESIANI:



$$N_1' = \vec{N} \cdot \hat{j}_1 \Rightarrow \text{IN GENERALE } N_k' = \vec{N} \cdot \hat{j}_k \quad k=1,2,\dots,3$$

QUINDI

$$\vec{N} = \sum_{k=1}^3 (\vec{N} \cdot \hat{j}_k) \hat{j}_k = \sum_{k=1}^3 (\vec{N} \cdot \hat{n}_k) \cdot \hat{n}_k$$

IL VETTORE È SEMPRE QUELLO!

QUINDI DEFINISCO IL RIFERIMENTO $\mathcal{R}(0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3)$ E $\mathcal{R}'(0, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3)$

POSSO QUINDI ASSOCIARE AL VETTORE $\vec{N}$:

LE COMPONENTI

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \text{ MATRICE DI UNA SOLA COLONNA } \rightarrow \text{RAPPRESENTAZIONE VARIANTE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO} = \underline{N} \quad \underline{\text{VETTORE ALGEBRICO}}$$

DIFFERENTE DA:

$$\begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{Bmatrix} = \underline{N}'$$

$$\begin{array}{ccc} \text{VETTORE ALGEBRICO} & \neq & \text{VETTORE FISICO ORIENTATO} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{VARIANTE} & & \text{INVARIANTE} \end{array}$$

LA SCELTA DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO È ARBITRARIA POICHÉ LA COMPOSIZIONE DEI VETTORI COMPONENTI NON CAMBIA IL RISULTATO FINALE.

QUINDI $\vec{N}$ È INVARIANTE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO

DEFINIAMO ORA IL PRODOTTO SCALARE IN ALTRI TERMINI:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \left(\sum_{k=1}^3 N_k \hat{n}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 u_j \hat{n}_j' \right) = (N_1 \hat{n}_1) \cdot (u_1 \hat{n}_1') + (N_1 \hat{n}_1) \cdot (u_2 \hat{n}_2') + \dots =$$

MA DOBBIAMO CONSIDERARE CHE I TERMINI CON INDICI DIVERSI SONO ORTOGONALI PER LA FUNZIONE δ_{jk}

$$= \sum_k N_k u_k \quad \text{DEFINIZIONE IN TERMINI DI COMPONENTI} = \vec{N} \cdot \vec{u}$$

FISSATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PER $\vec{N}$ E $\vec{u}$:

$$\mathcal{R}(0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3)$$

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \sum_n N_n \cdot u_n = \text{SOMMA DI COMPONENTI OMOLOGHE}$$

QUINDI RAPPRESENTANDO $\vec{N}$ IN TERMINI DELLE COMPONENTI

$$\underline{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \quad \text{E} \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

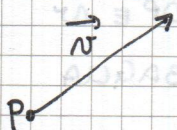
ALLORA: IL P.SCALARE TRA DUE VETTORI:

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \underline{N}^T \underline{u} = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \text{NUMERO SCALARE}$$

[1 x 3] [3 x 1] [1 x 1]

RIPRENDENDO ORA I:

VETTORI APPLICATI



$$(P, \vec{N})$$

DEFINIAMO IL PUNTO O NELLO SPAZIO.
IL PRODOTTO VETTORIALE:

$$\vec{OP} \times \vec{N} = \vec{m}_O$$

DEFINITO MOMENTO DI $\vec{N}$ RISPETTO O

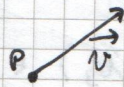
O SI CHIAMA POLO DEL MOMENTO

SE INVERTIAMO L'ORDINE, IL RISULTATO NON È UGUALE.

IL MOMENTO $\vec{OP} \times \vec{v}$ CI PERMETTE DI CAPIRE COME VARIA LA GRANDEZZA MECCANICA RISPETTO AI PUNTI DI APPLICAZIONE DIVERSI.

È VETTORE LIBERO MENTRE IL $\vec{v}$ (UNA FORZA È V. APPLICATO) LE EQUAZIONI SONO UGUALI SE CAMBIO POLO MA NON LE GRANDEZZE RISULTANTI; SARÀ IMPORTANTE SCEGLIERE QUELLO GIUSTO, ALTRIMENTI SCEGUENDO POLO SBAGLIATO LE EQUAZIONI DIVERRANNO DIFFICILI.

$(P, \vec{v})$ VETTORE APPLICATO

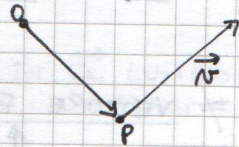


DI UNA FORZA
IL MOMENTO SI MISURA IN $N \cdot m$ 3 CEZIOLE
[FORZA PER SPOSTAMENTO]

MOMENTO DI UN VETTORE RISPETTO A POLO O È VETTORE DEFINITO COME PRODOTTO VETTORIALE TRA VETTORE CHE CI PORTA A P E IL VETTORE $\vec{v}$ STESSO.

$$\vec{m}_o = \vec{OP} \times \vec{v}$$

↑
RAGGIO
VETTORE

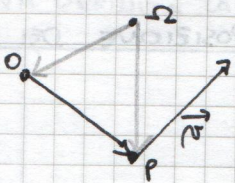


CAMBIANDO POLO CAMBIA IL MOMENTO (SE $\vec{v} \neq \vec{0}$)

IL MOMENTO NON È UN VETTORE APPLICATO

MENTRE IL VETTORE $\vec{v}$ SÌ!

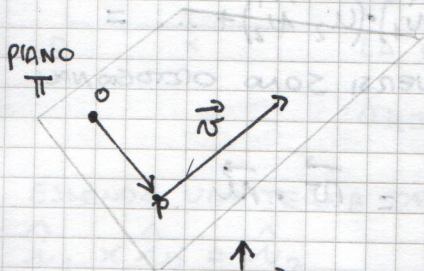
SE CAMBIO POLO DA O A Ω :



$$\vec{m}_\Omega = \vec{\Omega P} \times \vec{v} = (\vec{\Omega O} + \vec{OP}) \times \vec{v} = \vec{\Omega O} \times \vec{v} + \vec{OP} \times \vec{v}$$

IN CUI IL SECONDO ADDENDO È IL MOMENTO DI $\vec{OP}$ RISPETTO $\vec{v}$, QUINDI:

$$\vec{m}_\Omega = \vec{m}_o + \vec{\Omega O} \times \vec{v} \rightarrow \text{REGOLA DEL TRASPORTO TRA DUE POLI}$$



CONSIDERIAMO IL PIANO IN CUI GIACCONO I VETTORI $\vec{OP}$ E $\vec{v}$.

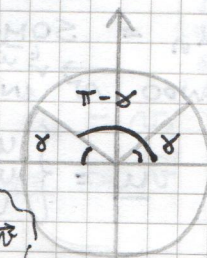
IL MOMENTO È VETTORE ORTOGONALE AL PIANO, DEFINIAMO $\hat{n}$ VETTORE.

$$\vec{m}_o = (OP \cdot v \cdot \sin \gamma) \hat{n}$$

MA POICHÉ $\sin \gamma = \sin(\pi - \gamma)$

SE FACCIO VARIARE IL POLO O SU UNA RETTA D'AZIONE PARALLELA A $\vec{v}$ IL MOMENTO NON CAMBIA

ANGOLO MINORE DI π (L'ANGOLO)



SE SI SCOMPONE IL MOMENTO GENERATO DA UNA FORZA F RISPETTO AD UN POLO TRAMITE LE SUE COMPONENTI INDICANO LE ATTITUDINE DI RUOTAZIONE INTORNO AD UN ASSE

SI FORMA UN CATETO DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO CON IPOTENUSA OP MENTRE IL SECONDO CATETO CHE SI FORMA È:

BRACCIO $b = OP \sin \gamma$ È QUINDI UN SEGMENTO NON UN VETTORE.

IN GENERALE È DISTANZA TRA POLO O E PUNTO H (DISTANZA PUNTO-RETTA)

QUINDI:

$$\vec{m}_o = v \cdot b \cdot \hat{n} \quad (* *)$$

b PROVIENE DA SOTTOSPAZIO DI $\vec{OP}$ E $\vec{v}$

SI DEVE COMUNQUE SEMPRE PARTIRE DA $\vec{m}_o = \vec{OP} \times \vec{v}$ ALTRIMENTI SI SBAGLIA

ABBIAMO DEFINITO IL VETTORE GEOMETRICO COME COMPOSTO DA 1 VETTORI COMPONENTI CHE HANNO INTENSITA' DEFINITA DALLE COMPONENTI:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{n}_k \quad \text{CON } v_k = \vec{v} \cdot \hat{n}_k$$

DA CUI:

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{CON DATO SISTEMA DI RIFERIMENTO. SE CAMBIASSIMO SISTEMA DI RIFERIMENTO, IL VETTORE GEOMETRICO (NON GEOMETRICO) DIPENDE DAL SIST. DI RIF.}$$

QUINDI IL PRODOTTO VETTORIALE È:

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_1 \hat{n}_1 + v_2 \hat{n}_2 + v_3 \hat{n}_3) \times (u_1 \hat{n}_1 + u_2 \hat{n}_2 + u_3 \hat{n}_3)$$

IN CUI ABBIAMO SEMPLIFICATO $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \hat{n}_3$, $\hat{n}_3 \times \hat{n}_1 = \hat{n}_2$ E $\hat{n}_2 \times \hat{n}_3 = \hat{n}_1$

DEFINITA RELAZIONE CICLICA.

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{VERSORI} \\ \text{LE COMPONENTI DEL 1° FATTORE} \\ \text{LE COMPONENTI DEL 2° FATTORE} \end{matrix}$$

UTILIZZANDO LAPLACE:

$$= \hat{n}_1^{(1+1)} [v_2 u_3 - v_3 u_2] + \hat{n}_2^{(1+2)} [v_3 u_1 - v_1 u_3] + \hat{n}_3^{(1+3)} [v_1 u_2 - v_2 u_1]$$

DA CUI:

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} v_2 u_3 - v_3 u_2 \\ v_3 u_1 - v_1 u_3 \\ v_1 u_2 - v_2 u_1 \end{bmatrix} \quad \text{IL PRODOTTO VETTORIALE NON È COMMUTATIVO}$$

ORA IMMAGINIAMO DI AVERE N VETTORI APPLICATI: SISTEMA DI VETTORI APPLICATI

$(P_k, \vec{v}_k)$ CON $k=1, \dots, N$ APPLICATI IN N PUNTI DIVERSI

DEFINIAMO IL VETTORE RISULTANTE (O LA RISULTANTE):

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^N \vec{v}_k$$

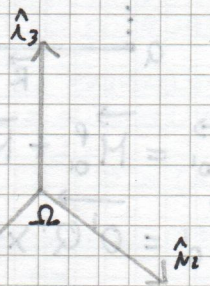
↳ VETTORE NON APPLICATO

QUINDI MENTRE PRIMA SI È CONSIDERATO APPLICATO, ORA LA RIS. NON È APPL.

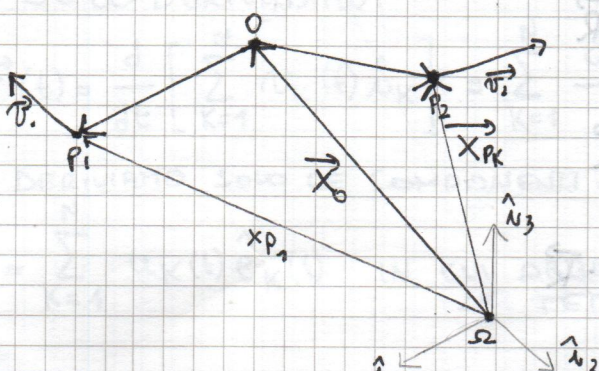
SE SCEGLIAMO UN POLO, AUREMO: MOMENTO RISULTANTE

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^N \vec{m}_k = \sum_{k=1}^N \vec{OP}_k \times \vec{v}_k$$

E STABILIAMO SISTEMA DI RIFERIMENTO:



ANCHE SE $\vec{R}$ NON È APPLICATO, QUANDO SI FA IL CALCOLO VA APPLICATO AD UN PUNTO P!!!



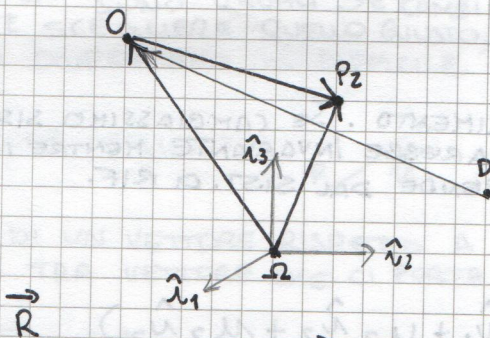
POSSO UTILIZZARE IL NUOVO POLO Ω PER DEFINIRE IL VETTORE ORIGINE-POLO E FARE LA STESSA COSA CON TUTTI GLI ALTRI PUNTI.

POSSO UTILIZZARE L'ORIGINE PER DEFINIRE I VETTORI COME DIFFERENZA

$$\vec{OP}_K = \vec{x}_{P_K} - \vec{x}_O \text{ DA CUI } \sum_{K=1}^N (\vec{x}_{P_K} - \vec{x}_O) \times \vec{v}_K = \vec{M}_O$$

SE SCEGLIESSI ALTRO POLO, PER ESEMPIO D:

REGOLA TRASPORTO DI DUE POLI



$$\begin{aligned} \vec{M}_D &= \sum_{K=1}^N \vec{m}_K^D = \sum_{K=1}^N (\vec{m}_K^O + \vec{DO} \times \vec{v}_K) = \\ &= \vec{M}_O + \vec{DO} \times \vec{R} \end{aligned}$$

CI DA LA RISULTANTE

NON DIPENDE DALLA SOMMATORIA E LO PORTO FUORI

IL VEETTORE RISULTANTE NON È APPLICATO COME DEL RESTO IL MOMENTO RISULTANTE.

SE PROIETTIAMO IL VETTORE LUNGO IL VETTORE RISULTANTE $\vec{R}$, CIOÈ PRODOTTO SCALARE = MOMENTO E RISULTANTE:

PROIEZIONE VETTORE MOMENTO RISULTANTE SULLA DIREZIONE DEL VETTORE RISULTANTE

$$\vec{M}_D \cdot \vec{R} = (\vec{M}_O + \vec{DO} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

TRINOMIO INVARIANTE

È UN'OPERAZIONE NULLA INDIPENDENTEMENTE DAI POLI O DAI VETTORI

$$= \vec{M}_O \cdot \vec{R}$$

DA CUI

$$\vec{M}_D \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$$

VALIDA SEMPRE

MA ANCHE

$$\vec{M}_D \cdot \hat{R} = \vec{M}_O \cdot \hat{R}$$

TRINOMIO INVARIANTE

$$\text{CON } \hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

LA COMPONENTE OSSIÀ PROIEZIONE DI $\vec{M}$ SU $\vec{R}$ NON DIPENDE DAL POLO SCELTO

LA PROIEZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO

OSSIÀ LA COMPONENTE DEL MOMENTO RIS. NON DIPENDE DAL POLO

È UN PRODOTTO SCALARE DI TRE TERMINI DEGLI ASSI. OGNI TERMINE DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO MA LA LORO SOMMA È SEMPRE UGUALE.

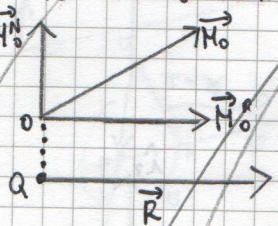
POSSIAMO DECOMporre IL VETTORE $\vec{M}_O$ IN:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^N + \vec{M}_O^P$$

IN CUI $|\vec{M}_O^P| = \vec{M}_O \cdot \hat{R}$

PARTE DA NON VEDERE. LA DIMOSTRAZIONE STA DOPO

← VETTORE DELLA GIACITURA



TRACCIANDO QO POSSIAMO DEFINIRE CHE:

$$\vec{M}_O^N = \vec{QO} \times \vec{R} \text{ SE } \vec{R} \text{ FOSSE APPLICATO IN Q}$$

LO STESSO POSSO FARE PER UN NUOVO POLO O'!

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}^P + \vec{M}_{O'}^N$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{O'Q'} \times \vec{R} + \vec{M}_{O'}^P = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

REGOLA DEL TRASPORTO

E RIPRENDENDO $\vec{M}_{O'}^N = \vec{Q'O'} \times \vec{R}$

QUINDI:

$$\vec{Q'O'} \times \vec{R} + \vec{M}_{O'}^P = \vec{QO} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

QUINDI:

$$\vec{Q'O'} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P = \vec{QO} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P + \vec{O'O} \times \vec{R}$$

MA SE LA APPLICASSI: $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R}$

$$\text{QUINDI } \vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{M}_O^P + \vec{M}_O^N) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O^P \cdot \vec{R}$$

SI ANNULLA

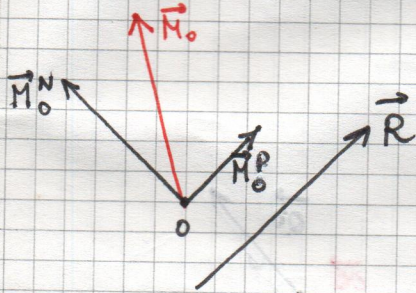
ASSE CENTRALE · DIMOSTRAZIONE

MOMENTO E RISULTANTE NON SONO APPLICATI

L'ASSE CENTRALE È IL LUOGO DEI PUNTI CHE, SCELTI COME POLO, FORNISCONO IL MOMENTO RISULTANTE DI MINOR INTENSITÀ E PARALLELO ALLA RISULTANTE $\vec{R}$.

- DEFINISCO QUINDI $V := \{(P_i, \vec{v}_i), 1 \leq i \leq N\}$ VETTORI APPLICATI (SISTEMA DI VETTORI) IDENTIFICABILI PER ES. COME FORZE
- DEFINISCO $\vec{R}$ RISULTANTE $\neq \vec{0}$ DATA DAI VETTORI APPLICATI
- DEFINISCO IL MOMENTO $\vec{M}_O$ (NON PARALLELO A $\vec{R}$ ALTRIMENTI SI CADE IN SOTTOCASO) CHE È IL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AL POLO O

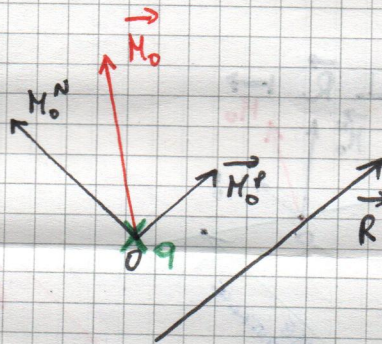
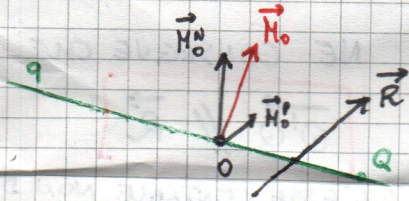
SCOMPONGO $\vec{M}_O$ IN DUE VETTORI TRAMITE REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA IN DUE COMPONENTI, UNA PARALLELA E UNA ORTOGONALE ALLA RISULTANTE $\vec{R}$.



- DEFINISCO LA RETTA $q \perp$ AL PIANO INDIVIDUATO DA $\vec{M}_O^N$ E $\vec{M}_O^P$ SU QUESTA RETTA DEFINISCO Q (PUNTO) TALE CHE:

$$\vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} \quad (1)$$

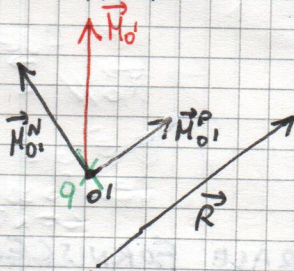
$$q \perp \vec{R}$$



FACCIO LO STESSO RAGIONAMENTO CON UN NUOVO POLO O' :

$\vec{R}$ RIMANE COME PRIMA (NON PARALLELO A $\vec{M}_{O'}$ E $\vec{R} \neq \vec{0}$)

SCOMPONGO $\vec{M}_{O'}$ TRAMITE DUE VETTORI COMPONENTI, ORTOGONALE E PARALLELO A $\vec{R}$:



STABILISCO POI $q' \perp$ AL PIANO DEFINITO DA $\vec{M}_{O'}^N$ E $\vec{M}_{O'}^P$ (O ANCHE $\perp$ A $\vec{R}$) E DICO CHE IL PUNTO Q' È TALE CHE (STABILISCO Q' TALE CHE):

$$\vec{M}_{O'}^N = \vec{O'Q'} \times \vec{R} \quad (2)$$

QUINDI AVRO' CHE:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^N + \vec{M}_O^P \quad \text{E} \quad (1) \quad \vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} \rightarrow \vec{M}_O = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P \quad (A)$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}^N + \vec{M}_{O'}^P \quad \text{E} \quad (2) \quad \vec{M}_{O'}^N = \vec{O'Q'} \times \vec{R} \rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{O'Q'} \times \vec{R} + \vec{M}_{O'}^P \quad (B)$$

RICORDANDO LA REGOLA DI TRASPORTO TRA DUE POLI O E O' POSSO DIRE CHE:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} \quad (\Rightarrow (\vec{O'O} + \vec{O'P}) \times \vec{R})$$

E IL TRINOMIO INVARIANTE IN CUI:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \hat{R} \quad \vec{M}_O^P = \vec{M}_{O'}^P$$

CHE RISPETTIVAMENTE SONO:

IL PRODOTTO SCALARE AVIENE CON IL VERSORE E NON CON IL VETTORE RISULTANTE $\vec{R}$

QUINDI $\vec{M}_O$ SARÀ:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^N + \vec{M}_O^P = \vec{O'Q'} \times \vec{R} + \vec{M}_{O'}^P = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P + \vec{OO'} \times \vec{R}$$

QUINDI: ESSENDO $\vec{M}_O^P = \vec{M}_{O'}^P$ SI ECLIMINANO E AVRO':

$$\vec{M}_O \Rightarrow \vec{O'Q'} \times \vec{R} = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{OO'} \times \vec{R}$$

PORTO TUTTO AL PRIMO MEMBRO:

$$\vec{O'Q'} \times \vec{R} - \vec{OQ} \times \vec{R} - \vec{OO'} \times \vec{R} = 0$$

RAGGRUPPO:

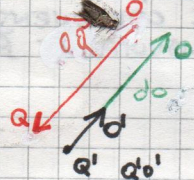
$$(\vec{O'Q'} - \vec{OQ} - \vec{OO'}) \times \vec{R} = 0$$

$$(-\vec{Q'O'} - \vec{OQ} - \vec{OO'}) \times \vec{R} = 0$$

$$(\vec{Q'O'} + \vec{OQ} + \vec{OO'}) \times \vec{R} = 0$$

$$\vec{Q'O'} + \vec{OO'} = \vec{QO}$$

RISCRIVO $\vec{O'Q'}$ COME $-\vec{Q'O'}$

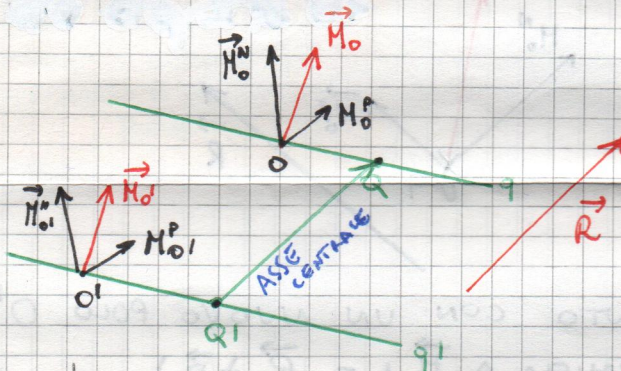
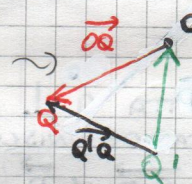
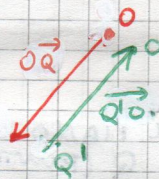


QUINDI RISCRIVO LA RELAZIONE COME:

$$(\vec{OQ} + \vec{QO}) \times \vec{R} = 0$$

LA CUI SOMMA È: $\vec{Q'Q}$

$$\vec{Q'Q} \times \vec{R} = 0$$



NE CONSEGUO CHE

$$\vec{Q'Q} \parallel \vec{R}$$

L'ASSE CENTRALE NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO

IMMAGINA O' SU STESSA RETTA Q

DE FINISCO LA RETTA α (ASSE CENTRALE) CHE PASSA TRA Q' E Q COME ASSE CENTRALE DELLA SOLLECITAZIONE.

SE O È α ALLORA:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^N + \vec{M}_O^P \quad \text{DA CUI}$$

$$\vec{M}_O = \vec{OQ} \times \vec{R} + \vec{M}_O^P \quad \text{MA } \vec{OQ} \parallel \vec{R} \quad \text{QUINDI}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^P$$

$$\text{MENTRE } \vec{M}_O^N = \vec{0}$$

OSSIA L'ASSE CENTRALE È IL LUOGO DEI PUNTI CHE SCELTI COME POLO FORNISCE IL MOMENTO RISULTANTE DI MINORE INTENSITÀ (E PARALLELO A $\vec{R}$).

MOMENTO RISULTANTE MINIMO

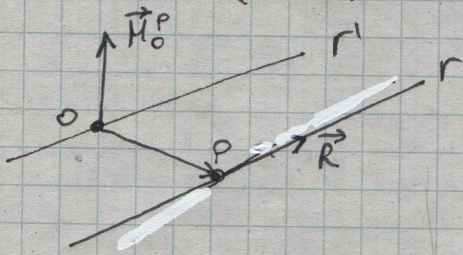
IL CONTRIBUTO NORMALE SARÀ NULLO, INFATTI PRESO $Q \in \alpha$:

$$\vec{M}_O^N = \vec{OQ} \times \vec{R} \quad \text{MA SIA } O \text{ CHE } Q \text{ SONO SU } \alpha \rightarrow \vec{OQ} \times \vec{R} = \vec{0} \rightarrow \vec{0}$$

MOMENTO ASSIALE DI UN VETTORE APPLICATO

DIMOSTRAZIONE
IN PIÙ, NON
FATTA A
LEZIONE

IPOTIZZO QUESTA SITUAZIONE:

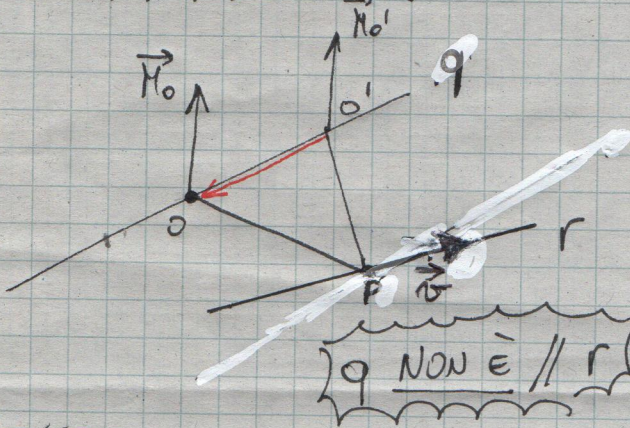


$$\vec{M}_O^R = \vec{OP} \times \vec{R} \quad (\text{CON } r \parallel r')$$

IN CUI SO CHE SE FACCIO SCORRERE $\vec{R}$ LUNGO r O r' LUNGO r' AURÒ UN MOMENTO DI R RISPETTO AL POLO O INVARIANTE.

SE PERO' FACCIO SCORRERE IL POLO LUNGO UNA RETTA QUALUNQUE, NON PARALLELA CON LA RETTA DI AZIONE DI $\vec{R}$ OSSIA r , IL MOMENTO RISPETTO AL POLO O SARÀ:

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_O^R \quad (1)$$



SE PERO' DEFINIAMO IL VERSORE $\hat{q}$ CHE DEFINISCE LA DIREZIONE DELLA RETTA q CI PUÒ EFFETTUARE IL P. SCALARE DI (1):

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_O^R$$

$$\vec{OP} \times \vec{R} = \vec{OO} \times \vec{R} + \vec{OP} \times \vec{R}$$

q NON È $\parallel r$

FACCIO IL P. SCALARE PER $\hat{q}$:

OTTENGO:

$$(\vec{O'P} \times \vec{R}) \cdot \hat{q} = (\vec{O'O} \times \vec{R}) \cdot \hat{q} + (\vec{OP} \times \vec{R}) \cdot \hat{q}$$

SI NOTA A QUESTO PUNTO CHE $O'O$ GIACE SULLA STESSA DIREZIONE DI $\hat{q}$ QUINDI:

$$(\vec{O'O} \times \vec{R}) \cdot \hat{q} = 0 \quad \text{QUINDI DEFINISCO:}$$

$$\vec{M}_O^R \cdot \hat{q} = \vec{M}_{O'}^R \cdot \hat{q}$$

SI DEFINISCE MOMENTO ASSIALE DI $\vec{N}$ RISPETTO LA RETTA q

IL MOMENTO ASSIALE NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO MA DA q QUINDI $\hat{q}$. q NON È RETTA QUALUNQUE MA RETTA PASSANTE PER IL POLO O .

AFFINCHÈ MOMENTO ASSIALE SIA NON NULLO È CHE q E r' SIANO SGHERTE.

ALTRO SU ALGEBRA VETTORIALE

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{P. COMMUTATIVA}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} \quad \text{P. ASSOCIATIVA}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad \text{P. DISTRIBUTIVA}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad \text{P. DISTRIBUTIVA}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{P. COMMUTATIVA}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{P. DISTRIBUTIVA}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{P. DISTRIBUTIVA}$$

$$k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

VOLUME PARALLELEPIPEDO
CON SEGNO (MA VALORE
ASSOLUTO RIMANE UGUALE)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) =$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

DERIVATE ED INTEGRALI DI VETTORI

$$\vec{a}(x) \rightarrow \frac{d\vec{a}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i(x)}{dx} \hat{e}_i$$

SDR NON DIP. DALLA
VAR. INDP

$$\vec{a}(x) \rightarrow \frac{d\vec{a}(x)}{dx} = \sum_{i=1}^3 \frac{da_i(x)}{dx} \hat{e}_i(x) + \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{d\hat{e}_i(x)}{dx}$$

SDR
DIPEND.
DALLA
VAR.
INDIPX

$$\int \vec{a}(x) dx \rightarrow \sum_{i=1}^3 \left[\int a_i(x) dx \right] \hat{e}_i$$

DA QUI IN POI GLI APPUNTI SONO ANCHE DI EMANUELE ED UMBERTO
VIENE SALTATA LA PARTE SUI VETTORI E SI RINIZIA DALL'ANALISI SPETTRALE DELLE MATRICI

ANALISI SPETTRALE DELLE MATRICI

PER SPETTRO DELLA MATRICE SI INTENDE L'INSIEME DEGLI AUTOVALORI λ
AUREMO QUINDI UNA RELAZIONE DEL TIPO:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{MATRICE} \\ N \times M}}{A} \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{VETTORE} \\ N \times 1}}{z} = \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{VETTORE} \\ N \times 1}}{c} \quad \text{OSSIA } A \text{ TRASFORMA } z \text{ IN UN VETTORE } c$$

È MATRICE QUADRATA
T.C. $A = A^T$

$| z \text{ È AUTOVETTORE}$
 $| \text{ DELLA MATRICE } A$
 $| \lambda \text{ È AUTOVALORE DI}$
 $| A \text{ ASSOCIATO ALLO}$
 $| \text{ AUTOVETTORE } z$

AUREMO CHE SE A È SIMMETRICA $\rightarrow \exists z$ TALE CHE $A z^k = \lambda z^k$ ↓ IMPORTANTI
 $K=1, \dots, N$
(RELATIVI ALL'AUTOVALORE λ_K)
OPPURE POSSAMO SCRIVERE:

$$\sum_{k=1}^N a_{jk} z_k = c_j \rightarrow \sum_{k=1}^N a_{jk} z_k = \lambda z_k \quad \text{OSSIA } z \text{ SCALATO DI } \lambda$$

IN CUI $z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}$ E $\lambda z = \lambda \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \rightarrow z \parallel \lambda z$ NE CONSEGUE
CHE $z \parallel \lambda z$

TEOREMI SULLA DIAGONALIZZAZIONE

① SE A È SIMMETRICA HA SICURAMENTE N AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI E MUTUAMENTE ORTOGONALI. TALI AUTOVETTORI CORRISPONDONO A N AUTOVALORI DISTINTI.

$$A z^k = \lambda_k z^k \quad k=1, \dots, N$$

IN CUI PER DEFINIRE L'ORTOGONALITÀ TRA GLI AUTOVETTORI, ALLORA:

DATO GENERICO $\vec{v}$ E $\vec{u} \rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{i}_i$ O $\vec{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$
E LO STESSO PER $\vec{u}$, ALLORA:

$\vec{v}$ E $\vec{u}$ SONO ORTOGONALI SE: $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{v}^T \vec{u} = 0$
GEOMETRICI ALGEBRICI

NEL CASO ALGEBRICO:

$$\vec{v}^T \vec{u} = \sum_{k=1}^N v_k u_k = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

$\downarrow$
 $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} (u_1; u_2; u_3)$ O IL CONTRARIO

② QUINDI NEL CASO DEGLI AUTOVETTORI NORMALIZZATI (SE NON LO SONO LI NORMALIZZIAMO):

$$z^{(k)} \cdot z^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{SE } k \neq j \\ 1 & \text{SE } k = j \quad (\Rightarrow \text{MODULO UNITARIO}) \end{cases}$$

③ SE HO α SCALARE ALLORA:

$$A z^{(k)} = \lambda_k z^{(k)} \rightarrow A(\alpha z^{(k)}) = \lambda_k(\alpha z^{(k)})$$

TEOREMA SPETTRALE

SE A È UNA MATRICE SIMMETRICA DI ORDINE $N \times N$, ALLORA È DIAGONALIZZABILE. INOLTRE ESISTE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^N$ FORMATA DAGLI AUTOVETTORI DI A .

LA RELAZIONE $A z = \lambda z$ POSSO RISCRIVERLA COME:

$$(A - \lambda I) z = 0 \quad \text{OSSIA } A z - \lambda z = 0 \quad \text{IN CUI SI RAGGRUPPA } z$$

DEFINISCO $\hat{A} = A - \lambda I$

QUINDI RISCRIVENDO LA RELAZIONE COME SISTEMA:

$$\begin{cases} \hat{a}_{11} z_1 + \hat{a}_{12} z_2 + \dots + \hat{a}_{1n} z_n = 0 \\ \hat{a}_{21} z_1 + \hat{a}_{22} z_2 + \dots + \hat{a}_{2n} z_n = 0 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n1} z_1 + \hat{a}_{n2} z_2 + \dots + \hat{a}_{nn} z_n = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{È UN SISTEMA} \\ \text{LINEARE} \\ \text{OMOGENEO} \end{matrix}$$

$$\underline{\hat{A}} \underline{X} = \underline{0}$$

IN CUI PER SEMPLICITÀ SI PONE $\underline{z} = \underline{x}$ QUINDI $\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$

PER IL TEOREMA DI ROUCHE-CAPELLI:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det \hat{A} = 0$$

CHE AFFERMA CHE UN SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI (DI PRIMO GRADO) AMMETTE SOLUZIONI (UNA O INFINITE) SE E SOLO SE IL RANGO DELLA MATRICE COMPLETA È UGUALE AL RANGO DELLA MATRICE INCOMPLETA (OPPURE SE NUMERO INCOGNITE $n=r$ IN CUI r È IL RANGO DI $A=A$ COMPLETA)

$$AX = B$$

SI DICE CHE QUINDI IL SISTEMA HA $n-r$ SOLUZIONI

QUESTO TEOREMA CI FORNISCE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI (DI GRADO n , INCOGNITE λ).

ESEMPIO

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{SI NOTA CHE È MATRICE} \\ \text{SIMMETRICA} \\ \text{(OLTRE CHE QUADRATA)} \end{matrix} \rightarrow \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{A}$$

QUINDI È DIAGONALIZZABILE

$$\det(\underline{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

CASO $\lambda_1 = 1$

$$(\underline{A} - \lambda I) \underline{z}' = \underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow \begin{cases} z'_1 - z'_2 = 0 \\ -z'_1 + z'_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z'_1 = z'_2 \\ z'_1 = z'_2 \end{cases}$$

$$\text{OSSIA } \underline{z}' = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \underline{z}^{(1)}$$

OSSERVAZIONE: COME SOLUZIONE SI HA ∞ IN CUI n DEFINISCE IL SOTTOSPAZIO $\mathbb{R}^n$ (IN QUESTO CASO 2) MENO IL RANGO DI C CHE È 1 ESSENDO I VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI. QUINDI IN QUESTO CASO ∞^1

CASO $\lambda_2 = 3$

$$(\underline{A} - \lambda I) \underline{z}'' = \underline{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z''_1 \\ z''_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \rightarrow \begin{cases} -z''_1 - z''_2 = 0 \\ -z''_1 - z''_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z''_1 = -z''_2 \\ z''_1 = -z''_2 \end{cases}$$

$$\text{QUINDI } \underline{z}'' = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \underline{z}^{(2)}$$

COME DA TEOREMA ESSENDO A SIMMETRICA $\rightarrow$ HO N AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI MA CHE DEVONO ESSERE ANCHE ORTOGONALI TRA LORO, OSSIA:

$$\underline{z}^{(1)} \underline{z}^{(2)} = (1; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = +1 - 1 = 0 \rightarrow \text{QUINDI SONO ORTOGONALI}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{z}^{(1)} \underline{z}^{(1)} &= (1; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 \neq 0 = 2 \\ \underline{z}^{(2)} \underline{z}^{(2)} &= (1; -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 \neq 0 = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{I VETTORI (GLI AUTOVETTORI)} \\ \text{DEVONO ESSERE NORMALIZZATI} \\ \text{POICHÉ NON LO SONO (VIENE 1} \\ \text{ALTRIMENTI)} \end{array}$$

NORMALIZZAZIONE DI UN VETTORE

DATO VETTORE $\vec{v} \rightarrow \hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ IN CUI $\|\vec{v}\|$ È NORMA O MODULO (IN CASO 2D)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{DA SVALIERE LORE} \\ \text{ES} \end{array} \right) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

QUINDI:

$$\underline{z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \|\underline{z}^{(1)}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow \underline{\hat{z}}^{(1)} = \frac{\underline{z}^{(1)}}{\sqrt{2}} \text{ OSSIA } \underline{\hat{z}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

STESSO DISCORSO PER $\underline{z}^{(2)} \rightarrow \underline{\hat{z}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$

QUINDI:

$$\underline{\hat{z}}^{(1)} \underline{\hat{z}}^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ORTOGONALI,} \\ \downarrow \end{array}$$

STESSO RISULTATO FACENDO $\underline{\hat{z}}^{(2)} \underline{\hat{z}}^{(1)}$

AUTOVETTORI NORMALIZZATI

$$\underline{\hat{z}}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad \underline{\hat{z}}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

NORMALIZZANDO HO UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI DI A CHE CI PERMETTE DI RAPPRESENTARE QUALSIASI VETTORE DI $\mathbb{R}^2$.

TRASFORMAZIONE (CAMBIAMENTO) DI COORDINATE

EFFETTUAMO UNA TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE A (CHE DESCRIVE UN'ENTITÀ, DATO UN CERTO SISTEMA DI RIFERIMENTO) CON IL CAMBIO DI COORDINATE.

ES. ESERCIZIO DI PRIMA

$$\underline{C} = \underline{T}^T \underline{A} \underline{T}$$

① $\underline{T}$ È LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE O LA MATRICE DI PASSAGGIO DEFINITA DAGLI AUTOVETTORI (COSTITUITA DA AUTOVETTORI RIGA) TALE CHE È DEFINITA

$$\rightarrow \underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{T}$ ORTOGONALE $\rightarrow \underline{T}^T = \underline{T}^{-1}$

È TENSORE DEL 2° ORDINE $\leftrightarrow$ MATRICE

② $\underline{A}$ È MATRICE SIMMETRICA

③ $\underline{C}$ È LA MATRICE TRASFORMATA

POICHÉ LE DUE BASI SONO ORTONORMALI
POICHÉ PASSIAMO DA UN SISTEMA DI COORD. CARTESIANE ORTOGONALI AD UN ALTRO ORTOG.

PER VERIFICARE SE È ORTOGONALE:

$$\underline{T}^T \underline{T} = \underline{I}$$

SE $\underline{A}$ È UNA MATRICE SIMMETRICA $\rightarrow$ È DIAGONALIZZABILE $\rightarrow \underline{C} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$
IN QUESTO CASO $\underline{T}$ È ORTOGONALE $\rightarrow \underline{T}^{-1} = \underline{T}^T$ POICHÉ STIAMO PASSANDO DA UN SISTEMA DI COORDINATE ORTOGONALI AD UN ALTRO SISTEMA DI COORDINATE ORTOGONALI, TUTTO CIÒ RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE DI PASSAGGIO ORTOGONALE $\underline{T}$.

ESEMPIO:

$$\underline{C} = \underline{z}^T \underline{A} \underline{z} \rightarrow \text{IN CUI } \underline{z} \text{ È MATRICE DI TRASFORMAZIONE COMPOSTA DAGLI AUTOVETTORI DELL'ESEMPIO PRECEDENTE}$$

$\underline{A}$ È LA MATRICE SIMMETRICA DELLO STESSO ESEMPIO

$$\underline{z}^T \underline{A} \underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-1 & 2+1 \\ -1+2 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 3-3 \\ 1-1 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRICE DIAGONALE CON AUTOVALORI COME ELEMENTI DELLA DIAGONALE}$$

SE INVECE UTILIZZIAMO GLI AUTOVETTORI NORMALIZZATI:

$$\underline{z}^T \underline{A} \underline{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \odot \\ \times \end{matrix}$$

A SIMMETRICA $\rightarrow$ HO N AUTOVETTORI MUTUAMENTE ORTOGONALI E LINEARMENTE INDIPENDENTI CHE RAPPRESENTANO LA BASE OSSIA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO NELLO SPAZIO N-DIMENSIONALE NEL QUALE CI TROVIAMO CHE DIAGONALIZZA LA MATRICE A.

LA MATRICE $\underline{C}$ DIAGONALE PRESENTA GLI AUTOVALORI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

UTILIZZO DELLA DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI PER SISTEMI NON OMogenei

DATO QUINDI UN SISTEMA $\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \rightarrow \underline{A} \underline{x} = \underline{1} \underline{y}$

IN CUI $\underline{y} = \underline{z} \underline{x}$

MATRICE DI CAMBIAMENTO DELLA BASE

MATRICE TRASFORMATA (LA $\underline{C}$ DI PRIMA)

O'E QUACCO S'ALTO

SUGLI APP. DI EMANUELE

$$\lambda_k y_k = c_k \leftrightarrow \underline{\Lambda} \underline{y} = \underline{c}$$

con $k=1, \dots, N$

$$y_k = \frac{c_k}{\lambda_k}$$

ANALISI DELLA POSIZIONE DEI CORPI - EQUAZIONI DIFFERENZIALI

IL MOTO E' L'ANALISI DELL'EVOLUZIONE DELLE POSIZIONI OCCUPATE DAGLI ELEMENTI (PUNTI MATERIALI, SISTEMI DI PUNTI MATERIALI, CORPI RIGIDI, ECC.). E' QUINDI L'ANALISI DEL VETTORE POSIZIONE (VETTORE CHE CI PORTA DA UN PUNTO SCELTO COME RIFERIMENTO AL PUNTO-POSIZIONE ATTUALE) NELLA SUA VARIAZIONE NEL TEMPO.

LO SCRIVIAMO QUINDI COME $\vec{x}(t)$

PER TRAIETTORIA SI DEFINISCE IL LUOGO DEI PUNTI OCCUPATI DALL'ELEMENTO, DI CUI STUDIAMO IL MOTO, DURANTE IL MOTO AL VARIARE DI t .

PER VELOCITA' ISTANTANEA SI INTENDE:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

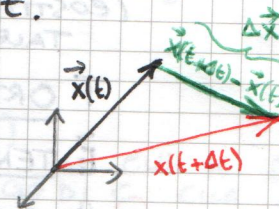
IN CUI:

$$\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t) = \Delta \vec{x}$$

E' IL VETTORE SPOSTAMENTO, CIOE' LA DIFFERENZA TRA DUE VETTORI POSIZIONE IN ISTANTI SUCCESSIVI t E $t+\Delta t$ E' UN VETTORE INVARIANTE RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO

SI DEFINISCE ACCELERAZIONE:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



NELLO STUDIO DELLA MECCANICA, LE RELAZIONI CHE INTERCORRONO TRA LE CARATTERISTICHE CINEMATICHE DEL FENOMENO SONO DI TIPO DIFFERENZIALE.

QUINDI LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI METTONO IN RELAZIONE CAUSE ED EFFETTI DEL MOTO. CI SARANNO QUINDI RELAZIONI TRA UNA DATA FUNZIONE E LE SUE DERIVATE. SI TRATTANO SOLO ED DI ORDINE 1 E 2 (CORPI NON DEFORMABILI).

CORPI RIGIDI $\rightarrow$ FINO A ORDINE 2
 CORPI DEFORMABILI $\rightarrow$ ORDINE N

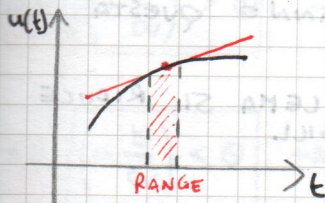
es. $a_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + a_1 \frac{du(t)}{dt} + a_0 u(t) = f(t)$
 ORD. 2

METODO DI ANALISI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

QUINDI LE EQUAZIONI CHE CONSIDERIAMO SONO AL MASSIMO DI ORDINE 2, LINEARI, QUINDI LA FUNZIONE INCOGNITA E LE SUE DERIVATE COMPAGNONO CON ESPONENTI UNITARI, ORDINARIE, POICHÉ LA FUNZIONE INCOGNITA È DIPENDENTE DA UNA SOLA VARIABILE (IL TEMPO), A COEFFICIENTI COSTANTI, CHE QUINDI NON DIPENDONO DALLA VARIABILE DA CUI DIPENDE LA FUNZIONE INCOGNITA ED INFINE OMOGENEE O NON OMOGENEE (QUINDI O NULLO O UGUALE AD UNA FUNZIONE

CI SARANNO CASI DI EQ. DIFF. NON LINEARI MA CHE SI LINEARIZZANO SOTTO DETERMINATE IPOTESI (QUINDI LA F. INCOGNITA O QUALUNA DELLE SUE DERIVATE NON HANNO ESPONENTE UNITARIO).

LINEARIZZARE SIGNIFICA INDIVIDUARE, SOTTO QUALCHE IPOTESI, E ALL'INTERNO DI UN DATO RANGE O INTERVALLO, UN'APPROSSIMAZIONE TRAMITE UNA RETTA.



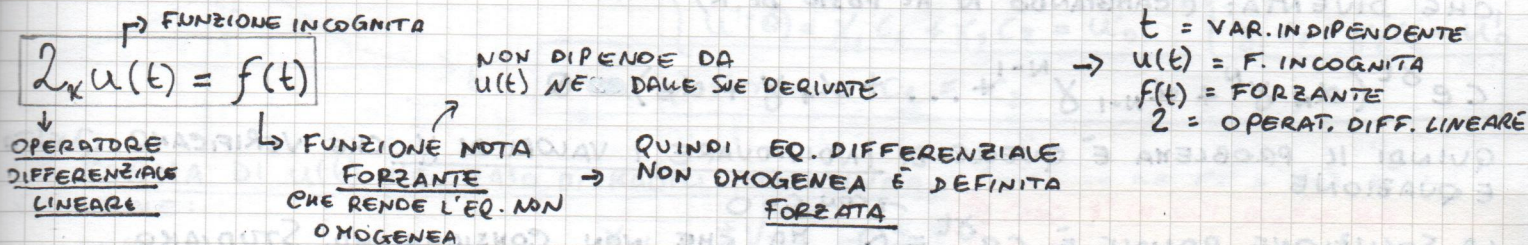
PER RANGE/INTERVALLO SI INTENDE UN SOTTOINSIEME DEL DOMINIO DI DEFINIZIONE DI $u(t)$, ENTRO CUI LA FUNZIONE NON LINEARE NON È MOTO DIVERSA DALLA RETTA AD ESSA TANGENTE.

ED LINEARI (ORDINE N) NON OMOGENEE, ORDINARIE E A COEFF. COSTANTI

DEFINIAMO L'OPERATORE LINEARE: L'APPLICAZIONE DI QUESTO OPERATORE

$$\mathcal{L}_K = \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k}$$

LINEARE AD UNA CERTA FUNZIONE DIPENDENTE DA t , $u(t)$, È UGUAGLIATA AD UNA CERTA FUNZIONE NOTA, NELLA STESSA VARIABILE INDIPENDENTE t .



LINEARITÀ $\mathcal{L}$ $\rightarrow$ COMPORTA CHE SE RIESCO A TROVARE LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA ALLA EQ. NON OMOGENEA, CHE CHIAMO

① $u_{Go}(t)$ TROVATA DA $\mathcal{L} u(t) = 0$
 SOL. PARTE OMOGENEA

E SE TROVO LA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA.

② $u_{PN}(t)$

PER LA LINEARITÀ ALLORA:

$$u(t) = u_{Go}(t) + u_{PN}(t)$$

$\uparrow$ SOLUZIONE GENERALE DELLA EQ. NON OMOGENEA
 $\uparrow$ SOL. GEN. DELLA OMOGENEA
 $\uparrow$ SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA

LA SOLUZIONE PARTICOLARE $u_{PN}(t)$ È FUNZIONE TALE CHE, COMBINANDOLA LINEARMENTE CON LE DERIVATE, TROVIAMO $f(t)$ COME SOLUZIONE:

$$\mathcal{L} u_{PN}(t) = f(t)$$

LA SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA COMPRENDE TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI QUINDI FUNZIONI, CHE, COMBINATA LINEARMENTE CON LE SUE DERIVATE, SI OTTIENE 0:

$$\mathcal{L} u_{Go}(t) = 0$$

SE f_1 È SOLUZIONE POICHÉ $\mathcal{L}[f_1(t)] = 0$ E f_2 ANCHE LO È, ALLORA LA P. DI LINEARITÀ DI $\mathcal{L}$ È TALE CHE

$$\mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)]$$

PER VERIFICARE CIO':

$$u(t) = u_{GO}(t) + u_{PN}(t)$$

COMBINO LINEARMENTE TRAMITE 2:

$$2u(t) = 2u_{GO}(t) + 2u_{PN}(t)$$

$$\underset{f(t)}{=} \underset{0}{=} + f(t) \quad \text{VERIFICATA } \checkmark$$

1) EQUAZIONI OMOGENEE

AVREMO QUINDI UNA ED DEL TIPO:

$$\sum_N u(t) = \alpha_N \frac{d^N u(t)}{dt^N} + \alpha_{N-1} \frac{d^{N-1} u(t)}{dt^{N-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{du(t)}{dt} + \alpha_0 u(t) = 0$$

SI DEVE DETERMINARE LA SOLUZIONE GENERALE ASSOCIATA OSSIA LA QUALSIASI FUNZIONE LA CUI COMBINAZIONE LINEARE DELLE DERIVATE FINO ALL'ORDINE N A COEFFICIENTI COSTANTI α_k SI EGUALA A 0. SIGNIFICA QUINDI INDIVIDUARE LA $u(t)$ TRA FUNZIONI CHE HANNO QUESTA STRUTTURA:

$$u(t) = c e^{\gamma t}$$

DOVE VARIANO c E γ , QUINDI IL PROBLEMA SI RIDUCE NELLO STUDIARE QUESTE DUE VARIABILI.

QUINDI COMBINANDO LINEARMENTE TRAMITE LE DERIVATE:

$$u(t) = c e^{\gamma t} \rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \gamma c e^{\gamma t} \rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \gamma^2 c e^{\gamma t} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{d^k u(t)}{dt^k} = \gamma^k c e^{\gamma t}$$

QUINDI COMBINANDOLI:

$$c e^{\gamma t} + \gamma c e^{\gamma t} + \gamma^2 c e^{\gamma t} + \dots + \gamma^k c e^{\gamma t}$$

CHE DIVENTA: (CAMBIANDO N AL POSTO DI K)

$$c e^{\gamma t} (\alpha_N \gamma^N + \alpha_{N-1} \gamma^{N-1} + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0) = 0$$

QUINDI IL PROBLEMA E' QUELLO DI INDIVIDUARE I VALORI DI γ CHE VERIFICANO QUESTA EQUAZIONE

LA SOLUZIONE BANALE E' $c e^{\gamma t} = 0$ $\rightarrow$ CON $c=0$ MA CHE NON CONSIDERIAMO. STUDIAMO INVECE:

$$\alpha_N \gamma^N + \alpha_{N-1} \gamma^{N-1} + \dots + \alpha_1 \gamma + \alpha_0 = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA $u_{GO}(t)$

CON $\gamma = 1, \dots, N$

OPPURE RISCRIITA' COME:

$$u_{GO}(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\gamma_j t}$$

PER DETERMINARE LE COSTANTI C_j HO BISOGNO DELLE CONDIZIONI INIZIALI; NECESSITO DI N-1 CONDIZIONI INIZIALI SU $u(t)$ E LE SUE DERIVATE IN UN PARTICOLARE VALORE DI t^* .

1) $u(t^*) = u^*$

2) $\frac{du(t^*)}{dt} = \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t^*}$

$\vdots$

N) $\frac{d^{N-1} u(t^*)}{dt^{N-1}} = \left. \frac{d^{N-1} u(t)}{dt^{N-1}} \right|_{t^*}$

$$\omega \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b u(t) = 0 \quad \text{CHE POSSO RISCRIVERE COME} \rightarrow \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -\frac{b}{\omega} u(t)$$

$$\text{CUI } u(t) = C e^{\gamma t} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \ddot{u} + b u = 0 \end{array} \right.$$

LA SOLUZIONE È QUINDI FUNZIONE CHE DERIVATA 2 VOLTE È UGUALE A SE STESSA MA MOLTIPLICATA PER UNA COSTANTE CON UN SEGNO MENO.

QUINDI PONENDO $u(t) = C e^{\gamma t}$ E DERIVANDO:

$$C e^{\gamma t} (\omega \gamma^2 + b) = 0 \rightarrow b + \omega \gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 + \frac{b}{\omega} = 0$$

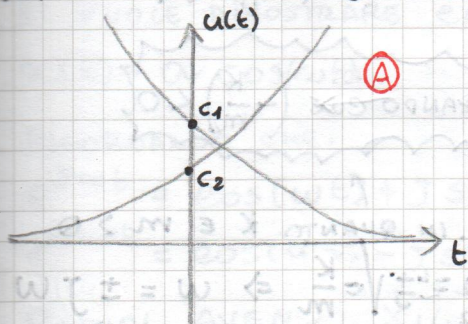
$$\gamma_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{b}{\omega}} \quad \text{QUINDI HO DUE RADICI PERTANTO}$$

$$A) u(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad B) u(t) = C_1 e^{-j\omega_1 t} + C_2 e^{-j\omega_2 t} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

• SE $\left(-\frac{b}{\omega}\right) > 0 \rightarrow$ HO 2 RADICI REALI, (OPPOSITE E) DISTINTE

• SE $\left(-\frac{b}{\omega}\right) < 0 \rightarrow$ HO 2 SOLUZIONI IMMAGINARIE E CONIUGATE (IN QUESTO CASO CON PARTE REALE $Re = 0$)

LA FORMA DI $u(t)$ NEL CASO DI RADICI REALI (DIPENDE SEMPRE DA C_1 E C_2) MA L'ANDAMENTO È IL SEGUENTE:

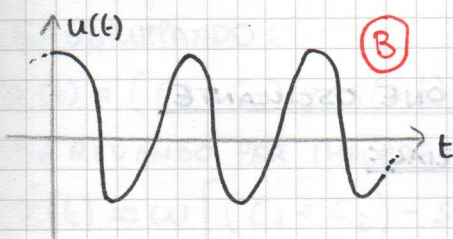


DATE LE CONDIZIONI C.I.:

$$t^* = 0 \rightarrow \begin{cases} u(0) = C_1 + C_2 = u_0 \\ u'(0) = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = u'_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = u_0 \\ \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 = u'_0 \end{cases}$$

DA QUI TROVO C_1 E C_2

LA FORMA DI $u(t)$ NEL CASO DI RADICI IMMAGINARIE (DIPENDE DA C_1 E C_2) È IN GENERALE:



$$\gamma_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{b}{\omega}} \rightarrow \pm j \sqrt{\frac{b}{\omega}} = \pm j\omega = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

$$\omega = \text{PULSAZIONE} \quad (\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f)$$

QUINDI

$$u(t) = C_1 e^{-j\omega_1 t} + C_2 e^{+j\omega_2 t}$$

FORMULE DI EULER

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$e^{-j\alpha} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

LA FUNZIONE È PERIODICA QUINDI CON ANDAMENTO OSCILLATORIO

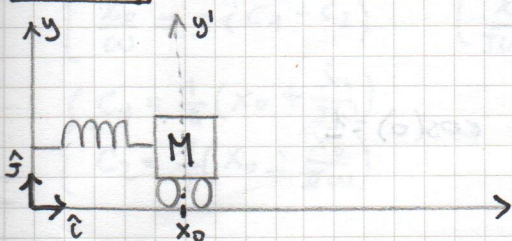
— APPLICAZIONE EQ. DIFF. 2° ORDINE CON $\alpha_1 = 0$

IN QUESTA TIPOLOGIA DI ED SI PUÒ PARLARE DI VIBRAZIONI.

QUALUNQUE COSA CHE IN NATURA VIBRA (EVOLUZIONE DI TIPO PERIODICO) È GOVERNATA DA UN'EQUAZIONE CHE HA QUESTA STRUTTURA.

$$\omega \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b u(t) = 0$$

ESEMPIO: SISTEMA MASSA-MOLLA (MOLLA IDEALE, PERFETTAMENTE LINEARE)



HO MASSA M VINCOLATA A MUOVERSI SU UNA RETTA CHE È L'UNICO GRADO DI LIBERTÀ.

CIÒ SIGNIFICA CHE LE RELAZIONI VANNO PROIETTATE LUNGO AL GRADO DI LIBERTÀ (LE RELAZIONI VETTORIALI), CHE È L'UNICA DIREZIONE LUNGO CUI PUÒ MUOVERSI.

LA RELAZIONE VETTORIALE

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

CONSIDERIAMO QUINDI $\vec{a}$ ACCELERAZIONE:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \ddot{x}\hat{i} = \frac{d^2(x\hat{i})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i}$$

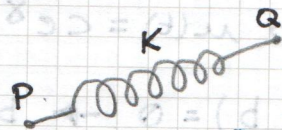
VETTORE
POSIZIONE

NON FUNZIONE
DEL TEMPO

MENTRE $\vec{F}$ È LA FORZA APPLICATA DALLA MOLLA:

$$\vec{F}_e = -K(\ell - \ell_0) \hat{PQ}$$

IN CUI K È LA COSTANTE ELASTICA (RIGIDEZZA)
 $(\ell - \ell_0)$ È L'ALLUNGAMENTO, SPOSTAMENTO RISPETTO
 ALLA POSIZIONE (LUNGHEZZA) A RIPOSO.
 ℓ È LUNGHEZZA DELLA MOLLA AD UN DATO ISTANTE
 ℓ_0 È LA LUNGHEZZA A RIPOSO.



$$F_e = -(\dots) \hat{x}$$

VERSO OPPOSTO RISPETTO
MOTO DELLA MASSA

$\hat{PQ}$ GIACE SULL'ASSE DEFINITO DAL VERSORE $\hat{i}$, PERTANTO PROIETTANDOLO:

$$F_e = -K(x - x_0) \hat{i}$$

ALLORA LA RELAZIONE SARÀ:

BILANCIO DEL SISTEMA IN EQUILIBRIO

$$m \ddot{x} \hat{i} = -K(x - x_0) \hat{i} \quad \text{ED.}$$

NON OMOGENEA

$$m \ddot{x} + K(x - x_0) = 0$$

EFFETTUANDO UNA SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} x - x_0 = u \\ \ddot{x} = \ddot{u} \end{cases}$$

E DIVENTA:

$$m \ddot{u} + K u = 0 \rightarrow \ddot{u} + \frac{K}{m} u = 0$$

LA CUI EQ. CARATTERISTICA È:

$$\gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\frac{K}{m} \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}} \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm j \omega$$

$$\text{IN CUI } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

QUINDI:

$$u(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t}$$

SOLUZIONE → FUNZIONE OSCILLANTE

PER TROVARE C_1 E C_2 DEVO IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$t^* = 0 \quad \begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

POSIZIONE INIZIALE
STATO INIZIALE
DEL SISTEMA
MECCANICO
VELOCITÀ AND
STATO INIZIALE

QUINDI PRIMA DI TUTTO RISCALVO GLI ESPONENZIALI COMPLESSI TRAMITE EULERO E POI SOSTITUISCO C_1 E C_2 TROVATI.

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] + C_2 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + (C_2 - C_1) j \sin(\omega t) \\ &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{aligned}$$

QUINDI IMPONENDO LE C.I. : ω STA IN b

$$u(0) = u_0 = a \rightarrow \text{IN QUANTO } \sin(0) = 0 \text{ E } \cos(0) = 1$$

$$\dot{u}(0) = -a \omega \sin(0) + b \omega \cos(0) = b \omega$$

RISCRIVENDO

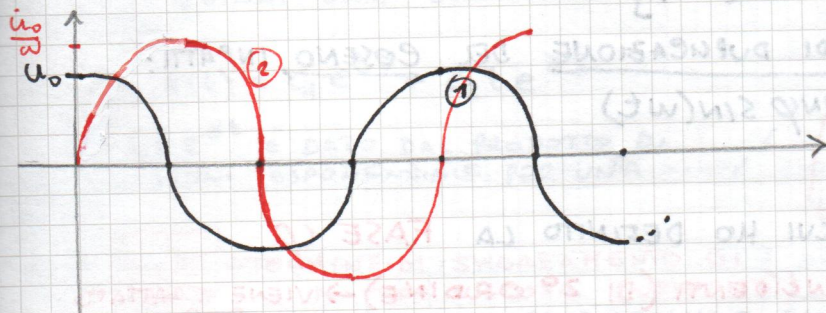
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \dot{u}_0 = b\omega \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = a \\ b = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \end{cases}$$

SOSTITUENDO I VALORI TROVATI DI a E b IN $u(t)$:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

SOLUZIONE $\rightarrow$ FUNZIONE OSCILLANTE

L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE È QUINDI SOMMA TRA DUE FUNZIONI OSCILLANTI.



IN CUI SI IPOTIZZA CHE $\frac{\dot{u}_0}{\omega} > u_0$

$u(t)$ È COMPOSTA DA DUE FUNZIONI SINUSOIDALI.

① NEL CASO IN CUI $\dot{u}_0 = 0$ SEQUE CHE $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$

② INVECE NEL CASO IN CUI $u_0 = 0$ ALLORA $u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t)$

DATO CHE ① È DEFINITO DA UN COS MENTRE ② DA UN SIN, SARANNO:

- SFASATI TRA LORO DI $\frac{\pi}{2}$
- STESSO PERIODO
- $t = 0 \rightarrow$ PARTONO CON SFASAMENTO

DIMOSTRAZIONE

PARTO DA:

$$x(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad \text{con } \gamma_{1/2} = \pm j\omega$$

SI VUOLE DIMOSTRARE CHE LA SOLUZIONE:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad \text{IN CUI } a = x_0 \quad \text{E} \quad b = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

RICORDANDO CHE:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

DA $e^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha$

QUINDI AVENDO $\gamma_{1/2} = \pm j\omega$

$$x(t) = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t} = C_1 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] + C_2 [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)]$$

RAGGRUPPANDO:

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + (C_1 - C_2) j \sin(\omega t) \quad \text{① } x(t)$$

DERIVANDO PER IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$\dot{x}(t) = \omega [(C_1 + C_2) - \sin(\omega t) + j(C_1 - C_2) \cos(\omega t)] \quad \text{② } \dot{x}(t)$$

IMPONGO LE C.I.

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = j\omega (C_1 - C_2) \end{cases}$$

BASTA IMPORRE $t=0$ IN $x(t)$ E $\dot{x}(t)$ E SI TROVANO

DA CUI

$$\begin{cases} C_1 = x_0 - C_2 \\ \frac{\dot{x}_0}{\omega} = j(C_1 - C_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 - C_2 \\ \frac{\dot{x}_0}{j\omega} = (x_0 - 2C_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 - C_2 \\ C_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{j\omega} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{\dot{x}_0}{j\omega} \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{\dot{x}_0}{j\omega} \right) \end{cases} \rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$x_0 = a = C_1 + C_2$ PARTE REALE

DATO $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$

IMPONENDO:

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi (=a) \\ \frac{\dot{x}_0}{\omega} = -A \sin \varphi (=b) \end{cases} \xrightarrow{\text{SEGUE}} x(t) = A \cos \varphi \cos(\omega t) - A \sin \varphi \sin(\omega t)$$

RAGGRUPPANDO A:

$$x(t) = A [\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)]$$

DETTO SVILUPPO DELLA FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL COSENO, INFATTI:

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)$$

QUINDI:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{IN CUI HO DEFINITO LA FASE } \varphi$$

EQUAZIONE DIFF. CON RADICI COINCIDENTI (DI 2° ORDINE) → VIENE TRATTATO DOPO

$$\alpha_2 \ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + \alpha_0 x = 0$$

IL POLINOMIO/EQUAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA È:

$$\alpha_2 \gamma^2 + \alpha_1 \gamma + \alpha_0 = 0$$

DA CUI LE RADICI $\gamma_{1/2}$:

$$\gamma_{1/2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}$$

SIAMO NEL CASO IN CUI $\gamma_{1/2} = 3$ es.

QUINDI γ CON MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 2 ("QUANTE VOLTE LA RADICE ANNUNIA IL POLINOMIO")

$$\gamma \text{ CON MOLTEPLICITÀ } \gamma \rightarrow x_{\text{OH}}(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t} + \dots + C_\gamma t^{\gamma-1} e^{\gamma t}$$

QUINDI IN BASE AL Δ DELL'EQ. CARATTERISTICA ASSOCIATA AURÒ RADICI DIVERSE

ANALISI DELLE RADICI DI EQ. DIFF. DI 2° ORDINE

QUINDI DATO:

$$\gamma_{1/2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}$$

SI HANNO I SEGUENTI CASI:

① $\alpha_1^2 > 4\alpha_0\alpha_2$ OSSIA CHE $|\alpha_1| > \sqrt{4\alpha_0\alpha_2}$

RADICI REALI E DISTINTE
NE CONSEGUENTE CHE

$\gamma_1 < 0$	E	$\gamma_2 < 0$	SE	$\alpha_1 > 0$	①
$\gamma_1 > 0$	E	$\gamma_2 > 0$	SE	$\alpha_1 < 0$	②

LA SOLUZIONE DELLA OMOGENEA È:

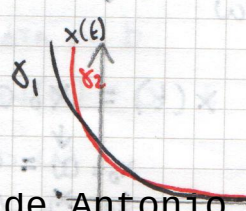
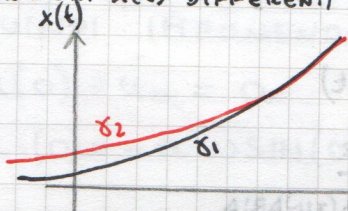
$$x(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad \text{es} \quad x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t}$$

AL VARIARE DI $t \rightarrow \infty$ ABBIAMO DUE FUNZIONI $x(t)$ DIFFERENTI

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t}$$

$$\gamma_{1/2} > 0$$

$$\gamma_{1/2} < 0$$



① $\alpha_1^2 = 4\alpha_0\alpha_2$ OSSIA $|\alpha_1| = \sqrt{4\alpha_0\alpha_2}$
RADICI COINCIDENTI

NE CONSEGUENZA CHE $\gamma_1 = \gamma_2 \rightarrow x(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t}$

IN CUI $\gamma = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ QUINDI SI DEVONO DISTINGUERE 2 CASI

② $\alpha_1 > 0$ ALLORA $\gamma < 0$

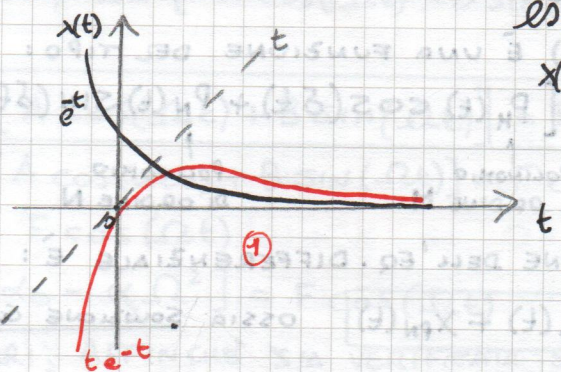
SI AURA' QUINDI UNA SOLUZIONE DEL TIPO

$x_{OM}(t) = x(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t}$

IN CUI $t e^{\gamma t}$ È DATO DAL PRODOTTO DI DUE FUNZIONI (ESPONENZIALE PER UNA RETTA).

SOL SE $\alpha_1 > 0 \rightarrow$ TERMINE DI SMORZAMENTO DI NATURA VISCOSA (VELOCITÀ)

QUINDI È TERMINE POSITIVO PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ (È COSTANTE POSITIVA).



es.

$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$

③ $\alpha_1 < 0$ ALLORA $\gamma > 0$

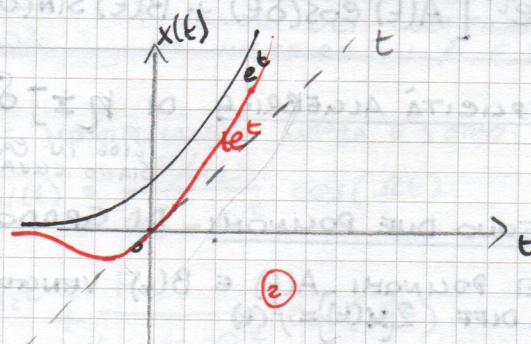
SI AURA' SOLUZIONE DEL TIPO

$x_{OM}(t) = x(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t}$

COME PRIMA PRODOTTO TRA ESP. E RETTA

SE QUINDI $\alpha_1 < 0$ NON È PIÙ TERMINE DI SMORZAMENTO POICHÉ LA SOLUZIONE DIVERGE E AUMENTA DI AMPIEZZA.

LA α_2 È LEGATA ALL'ACCELERAZIONE ED INDICA UNA MASSA.



es.

$x(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 t e^{\gamma t}$

③ $\alpha_1^2 < 4\alpha_0\alpha_2$ OSSIA $|\alpha_1| < \sqrt{4\alpha_0\alpha_2}$
RADICI COMPLESSE E CONIUGATE

NE CONSEGUENZA CHE $\gamma_{1/2} = \beta \pm j\omega$ $\gamma_1 = \beta + j\omega$ $\gamma_2 = \beta - j\omega$ CONIUGATO DI γ_1

LA SOLUZIONE $x(t)$ È:

$x(t) = C_1 e^{(\beta + j\omega)t} + C_2 e^{(\beta - j\omega)t}$

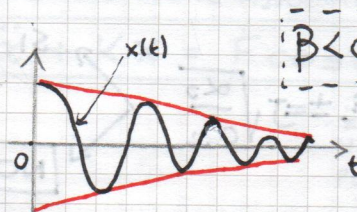
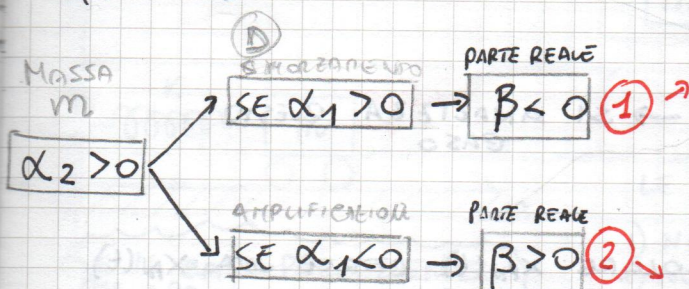
$x(t) = e^{\beta t} [C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}]$ CHE SVILUPPANDO SI PORTA A

$x(t) = e^{\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$

AFFINCHÉ IL DETERMINANTE: $\alpha_0 > 0$

$\alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0 < 0 \rightarrow 1) \alpha_1^2 < 4\alpha_2\alpha_0$
 $\rightarrow 2) \alpha_2 > 0$

QUINDI SE:



$\beta < 0$

OSCUILA SMORZANDOSI ASINTOTICAMENTE PER $t \rightarrow \infty$ ED ESPONENZIALMENTE QUINDI QUI AVVIENE LO SMORZAMENTO



$\beta > 0$

OSCUILA CON AMPIEZZA CHE AUMENTA ASINTOTICAMENTE ED ESPONENZIALMENTE

$x(t) = e^{\beta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \rightarrow e^{\beta t}$ TENDE PIÙ VELOCEMENTE A 0 O ∞ RISPETTO SIN/COS

EQUAZIONI DIFF. DI 2° ORDINE NON OMOGENEA

UNA GENERICA ED. NON OMOGENEA:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} [x(t)] = f(t) \rightarrow 2 x(t) = f(t)$$

IN CUI $f(t)$ È UNA FUNZIONE DEL TIPO:

$$f(t) = e^{\eta t} [P_H(t) \cos(\delta t) + P_N(t) \sin(\delta t)]$$

POLINOMIO
DI ORDINE M

POLINOMIO
DI ORDINE N

FORMA GENERICA FORZANTE

LA SOLUZIONE DELL'EQ. DIFFERENZIALE È:

$$x(t) = x_{GO}(t) + x_{PN}(t)$$

ossia SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA + SOL. PARTICOLARE NON OMOG.

SI CERCA UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA: DEL TIPO

$$x_{PN}(t) = t^{\nu} e^{\eta t} [A(t) \cos(\delta t) + B(t) \sin(\delta t)]$$

SOLUZIONE PARTICOLARE

- CON ν MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA DI $\eta \pm j\delta$ (RADICI DELL'EQ. CARATTERISTICA DELLA OMOGENEA ASSOCIATA)
(cioè IN CASO SIANO UGUALI A $f(t)$)

- A(t) e B(t) SONO DUE POLINOMI DI GRADO $r = \max(M, N)$

LE COSTANTI DEI POLINOMI A(t) e B(t) VENGONO DETERMINATE IMPONENDO CHE LA $x_{PN}(t)$ SODDISFI L'EQ. DIFF. $2x(t) = f(t)$

APPLICAZIONE DI EQ. DIFF. DI 2° ORDINE NON OMOG. CON $\alpha_1 = 0$ NO SMORZAMENTO

$$\alpha_2 \ddot{x} + \alpha_0 x = F \cos(\Omega t)$$

IN CUI $f(t) = F \cos(\Omega t)$ FORZANTE DI AMPIEZZA F E ANDAMENTO $\cos \Omega t$

STUDIO L'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_0 = 0 \rightarrow x_{1/2}^2 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} \rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_2}}$$

SIAMO NEL CASO IN CUI:

$$\left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right) < 0 \rightarrow x_{1/2} = \pm j \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}} \quad \text{IN CUI}$$

RADICI COMPLESSE E CONIUGATE

QUINDI LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$x_{GO}(t) = C_1 e^{x_{1/2} t} + C_2 e^{x_{2/2} t}$$

ADESSO STUDIO L'EQ. PARTICOLARE (NON OMOGENEA):

$F \cos(\Omega t)$ → DEVO IN PRIMIS VERIFICARE SE Ω NON È 0 È SOLUZIONE DELLA OMOGENEA ASSOCIATA:

$$x_{1/2} = \pm j\Omega \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}}$$

SI

NO

→ SI ANALIZZA QUESTO CASO

$$\text{NO } \Omega \neq \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha_2}}$$

PER TROVARE QUINDI LA SOLUZIONE PARTICOLARE $x_{PN}(t)$ CERCO UNA $x_{PN}(t)$ DEL TIPO:

$$x_{PN}(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

IN QUANTO $\eta = 0$; $m = 0$: $P_H(t) = F$ $P_N(t) = 0$ $\delta = \Omega$

ADESSO DERIVO K VOLTE LA $x_{PN}(t)$ E SOSTITUISCO NELL'EQ. DIFF:

$$x_{PN}(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

$$\dot{x}_{PN}(t) = -A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t) = \Omega [-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)]$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = -A \Omega^2 \cos(\Omega t) - B \Omega^2 \sin(\Omega t) = \Omega^2 [-A \cos(\Omega t) - B \sin(\Omega t)]$$

SOSTITUENDO IN $\alpha_2 \ddot{x} + \alpha_0 x = 0$:

$$\alpha_2 \Omega^2 [-A \cos(\Omega t) - B \sin(\Omega t)] + \alpha_0 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = F \cos(\Omega t)$$

$$-\alpha_2 \Omega^2 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \alpha_0 [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = F \cos(\Omega t)$$

$$[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] (\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2) = F \cos(\Omega t)$$

$$A \cos(\Omega t) [\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2] + B \sin(\Omega t) [\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2] = F \cos(\Omega t)$$

DATA L'UGUAGLIANZA TRA I DUE MEMBRI, AFFINCHÉ SIA VERIFICATA SI DEVE AVERE

$$\begin{cases} B = 0 \\ A [\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2] = F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \end{cases}$$

QUINDI HO TROVATO
I VALORI DEI COEFFICIENTI
DA INSERIRE IN A E B IN $x_{PN}(t)$:

$$x_{PN}(t) = \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad \text{oppure moltiplicando sopra e sotto per } \frac{1}{\alpha_2}:$$

$$\hookrightarrow x_{PN}(t) = \frac{F/\alpha_2}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

ALLORA:

$$x(t) = x_{G0}(t) + x_{PN}(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

PER DETERMINARE C_1 E C_2 DEVO IMPORRE LE CONDIZIONI INIZIALI, ES:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow \text{QUINDI DERIVO TUTTA LA } x(t):$$

SOTTO C'È STESSO
RISULTATO MA
APPLICATO A SISTEMA
MASSA-MOLLA
FORZATO

$$x(t) = C_1 e^{\gamma_1(t)} + C_2 e^{\gamma_2(t)} + \frac{F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \gamma_1 C_1 e^{\gamma_1 t} + \gamma_2 C_2 e^{\gamma_2 t} - \frac{\Omega F}{\alpha_0 - \alpha_2 \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

ADESSO IMPONGO $t=0$ ED EQUAGLIO LE DUE FUNZIONI A x_0 E $\dot{x}_0$ RISPETTIVAMENTE
METTENDO A SISTEMA TROVO C_1 E C_2 CHE POI SOSTITUISCO IN $x(t)$.

APPLICAZIONE DI EQ. DIFF. DI 2° ORDINE NON OMOG. CON $\alpha_1 = 0$
SISTEMA MASSA-MOLLA FORZATO o OSCILLATORE SEMPLICE FORZATO

$$\omega \neq \Omega$$

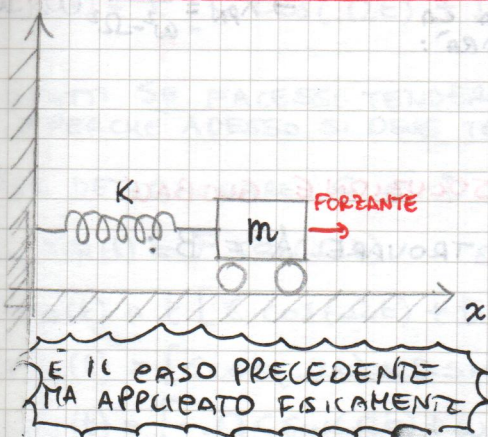
L'EQUAZIONE CHE È ASSOCIATA A TALE SISTEMA È:

$$m \ddot{x} + K x = F \cos(\Omega t)$$

$\hookrightarrow$ FORZANTE: FORZA ESTERNA DI
NATURA OSCILLATORIA CON
PULSAZIONE $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

LE IPOTESI CHE FACCIAMO SONO:

- 1) NO SMORZAMENTO
- 2) NO SFASAMENTO
- 3) FORZANTE CHE FA OSCILLARE IL SISTEMA CON Ω
CHE NON DIPENDE DA t (LA PULSAZIONE Ω) HA
INFLUISCE SULLE COSTANTI MODIFICANDOLE.



DALL'EQUAZIONE:

$$m\ddot{x} + Kx = F \cos(\Omega t)$$

SCRIVIAMO:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad \text{IN CUI IMPONGO } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

QUINDI

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

LE RADICI DELLA SOLUZIONE OMOGENEA $x_{ho}(t)$ SONO:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \rightarrow \gamma^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\omega^2 \rightarrow \gamma^2 = \pm \sqrt{-\omega^2}$$

IPOTIZZANDO IL CASO DI RADICI COMPLESSE E CONIUGATE $\rightarrow -\omega^2 < 0$

$$\gamma_{1/2} = \pm j\omega$$

$$\text{QUINDI } x_{ho}(t) = c_1 e^{-j\omega t} + c_2 e^{+j\omega t} \quad \rightarrow \text{IN CUI } \gamma_{1/2} = \pm j\Omega \text{ NON È SOLUZIONE DELLA OM. ASSOCIATA}$$

$\omega \neq \Omega$

RISCRIVO LA $x_{ho}(t)$ TRAMITE SENI/COSENI CON LA NOTAZIONE DI EULERO:

$$x_{ho}(t) = c_1 [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] + c_2 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

$$x_{ho}(t) = (c_1 + c_2) \cos(\omega t) + (c_2 - c_1) j \sin(\omega t)$$

$$x_{ho}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

LA MIA SOL. OMOG. ASSOCIATA È: $x_{ho}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

ADDESSO STUDIO LA PARTICOLARE $x_{pn}(t)$ CHE SARÀ DEL TIPO:

$$x_{pn}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t) \quad \text{POICHÉ } \delta = \Omega; \ddot{m} = 0; P_m(t) = F; P_n(t) = 0; \eta = 0$$

DERIVANO K VOLTE E SOSTITUENDO NELLA EQ. DIFF. INIZIALE:

$$\dot{x}_{pn}(t) = -\Omega C \sin(\Omega t) + \Omega D \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x}_{pn}(t) = -\Omega^2 C \cos(\Omega t) - \Omega^2 D \sin(\Omega t)$$

$$-\Omega^2 C \cos(\Omega t) - \Omega^2 D \sin(\Omega t) + \omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

$$-\Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] + \omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

$$(\omega^2 - \Omega^2) [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

$$(\omega^2 - \Omega^2) [C \cos(\Omega t)] + (\omega^2 - \Omega^2) [D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

QUINDI PER L'UGUAGLIANZA DEI DUE MEMBRI

$$\begin{cases} D = 0 \\ (\omega^2 - \Omega^2)C = \frac{F}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ C = \frac{F}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \end{cases}$$

HO TROVATO I COEFFICIENTI DELLA $x_{pn}(t)$, ADORA LA SOLUZIONE $x(t)$ SARÀ:

$$\rightarrow x_{pn} = \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad \text{SOLUZIONE GLOBALE}$$

ADDESSO VANNO IMPOSTE LE CONDIZIONI INIZIALI PER TROVARE A E B:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

QUINDI DERIVO *1:

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) - \frac{(F/m) \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t)$$

QUINDI IMPONENDO LE C.I. :

$$x_0 = A \cos(\omega \cdot 0) + B \sin(\omega \cdot 0) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega \cdot 0)$$

$$\dot{x}_0 = -\omega A \sin(\omega \cdot 0) + \omega B \cos(\omega \cdot 0) - \frac{F/m \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega \cdot 0)$$

$$x_0 = A + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \rightarrow \begin{cases} A = x_0 - \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases}$$

SOSTITUENDO IN *1 :

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \right) \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

QUINDI LA SOLUZIONE FINALE È :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad *2$$

SOLUZIONE
GLOBALE
CON LE C.I.

TERMINE CON PULSAZIONE
 $\omega = \sqrt{k/m}$, CARATTERISTICA
DEL SISTEMA CHE DIPENDE
DALLA MASSA E DALLA MOLLA
(QUINDI DA t)

TERMINE COMPOSTO DA 2 SOTTOTERMINI

TERMINE CON
PULSAZIONE Ω CHE
DIPENDE DALLA
CARATTERISTICA
DELLA FORZANTE

TERMINE CON
PULSAZIONE ω CHE
DIPENDE DAL
SISTEMA

APPLICAZIONE DI EQ. DIFF. DI 2° ORDINE NON OMOG. CON $\alpha_1 = 0$
SISTEMA MASSA - MOLLA FORZATO O OSCILLATORE SEMPLICE FORZATO

SI
 $\omega = \Omega$

COME NEL CASO DI PRIMA (SENZA RISOLVERE I PRIMI CALCOLI):

$$m \ddot{x} + kx = F \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

$$L) x_{G0}(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t} \quad \text{IN CUI } \gamma_{1/2} = \pm j\omega$$

IN QUESTO CASO, PERÒ, IPOTIZZIAMO CHE LA PULSAZIONE DEL SISTEMA SIA UGUALE A QUELLA
DELLA FORZANTE, OSSIA $\omega = \Omega$ QUINDI:

$$\gamma_{1/2} = \pm j\Omega \text{ È SOLUZIONE DI } x_{G0}(t)$$

PERTANTO LA $x_{PN}(t)$ CHE CERCHIAMO SARÀ:

$$x_{PN}(t) = t [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] \quad \text{POICHÉ } \gamma = 1; \eta = 0; m = 1; P_H(t) = F$$

$$P_N(t) = 0; \delta = \Omega$$

INFATTI SE FACESSI TENDERE *2 $\Omega \rightarrow \omega$ OTTERREMO $\frac{0}{0}$ OSSIA UNA F. INDETERMINATA.
CIÒ PERCHÉ ADESSO SI DEVE TENER CONTO DI UN NUOVO TERMINE (t^2)

PER DETERMINARE C E D (COEFFICIENTI DI $x_{PN}(t)$, SOL. CARATT.) DEVO:

$$L_2 x_{PN}(t) = F \cos(\Omega t) \quad \text{QUINDI}$$

$$x_{PN}(t) = t [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)]$$

$$\dot{x}_{PN}(t) = [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] + t [-\Omega C \sin(\Omega t) + \Omega D \cos(\Omega t)]$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = [-\Omega C \sin(\Omega t) + \Omega D \cos(\Omega t)] + [-\Omega C \sin(\Omega t) + \Omega D \cos(\Omega t)] + [-\Omega^2 C \cos(\Omega t) - \Omega^2 D \sin(\Omega t)] = 2\Omega [D \cos(\Omega t) - C \sin(\Omega t)] - t \Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)]$$

SOSTITUENDO: ✕

$$2\Omega [D \cos(\Omega t) + C \sin(\Omega t)] - t \Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] + \omega^2 t [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

QUINDI PER L'UGUAGLIANZA DEI DUE MEMBRI:

$$\begin{cases} 2\Omega D - t \Omega^2 C + t \omega^2 C = \frac{F}{m} \\ -2\Omega C - t \Omega^2 D + \omega^2 t D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots & D = \frac{1}{2} \frac{F}{m \Omega} = \frac{1}{2} \frac{F}{m \omega} \\ C = \frac{D t (\omega^2 - \Omega^2)}{2\Omega} \rightarrow C = 0 \text{ se } \Omega = \omega \end{cases}$$

QUINDI LA $x(t)$ SARÀ:

$$x(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \frac{F}{m \omega} t [\sin(\omega t)] \quad \Omega = \omega$$

CHE DIVENTA CON EVENTO

IN REALTÀ LE CONDIZIONI INIZIALI VANNO APPLICATE SVOLGENDO A E B CHE VANNO RISCritti COME $(C_1 + C_2)$...

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \frac{F \cdot t}{m \omega} \sin(\omega t)$$

SOLUZIONE GLOBALE

PER DETERMINARE A E B IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI DEL SISTEMA MECCANICO

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = A \cos(0) + B \sin(0) + \frac{1}{2} 0 \sin(0) \\ \dot{x}_0 = -\omega A \sin(0) + \omega B \cos(0) + \frac{1}{2} 0 \cos(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = A \\ \dot{x}_0 = \omega B \end{cases}$$

DA CUI

$$\begin{cases} A = x_0 \\ B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{cases} \rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \frac{F \cdot t}{m \omega} \sin(\omega t)$$

SOLUZIONE GLOBALE CON LE C.I.

NOTO OTTENUTO QUANDO SOLLECITIAMO IL SISTEMA CON UNA FORZANTE CON STESSA PULSAZIONE DEL SISTEMA (FORZANTE ARMONICA, IN ASSENZA DI DISSIPAZIONI).

RICORDANDO IL TEOREMA DI DE L'HOPITAL:

$$\text{SE } \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{df/dx}{dg/dx} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g}$$

IN PRATICA SVOLGENDO L'ER. DI PRIMA, QUEMA CON $\Omega \neq \omega$ ARRIVIAMO AD UN CERTO $x(t)$. SE SI APPLICASSE HO SI GIUNGEBBE A XPN DI SOPRA.

QUINDI VERIFICO COSA SUCCIEDE PER $\Omega \rightarrow \omega$ NEL CASO IN CUI IPOTIZZO $\Omega \neq \omega$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]$$

SE SOSTITUISSI $\Omega = \omega$ OTTERREI $\rightarrow \frac{0}{0}$ F.I. FORMA IND.

QUINDI USO DE L'HOPITAL:

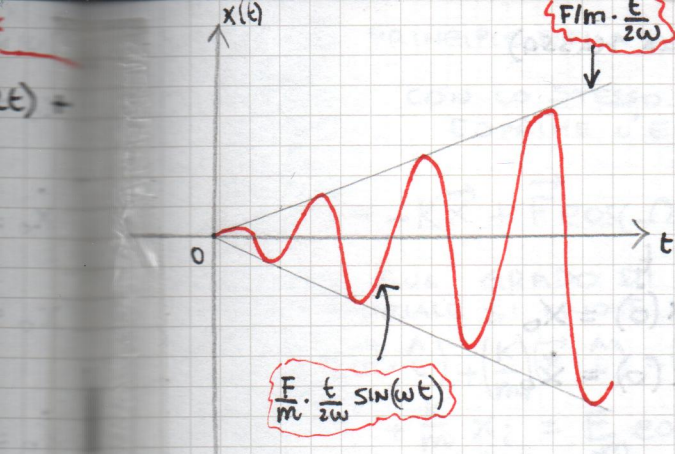
$$\frac{d}{d\Omega} [F/m (\cos(\Omega t) - \cos(\omega t))] = -\frac{F}{m} t \sin(\Omega t)$$

$$\frac{d}{d\Omega} [\omega^2 - \Omega^2] = -2\Omega$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{-\frac{F}{m} t \sin(\Omega t)}{-2\Omega} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{F t}{2\Omega m} \sin(\Omega t) = \frac{F t}{2\omega m} \sin(\omega t)$$

QUINDI AI DUE TERMINI SI SOVRAPPONE UN ALTRO TERMINE CON LA STESSA PULSAZIONE MA CON AMPIEZZA CHE VARIA LINEARMENTE AL VARIARE DI t . CARATTERISTICI DEL SISTEMA MASSA - MOLLE

GRAFICAMENTE



L'AMPIEZZA CRESCE LINEARMENTE CON IL VARIARE DI t (DIPENDE ANCHE DA ALTRE COSTANTI COME F , m E ω). QUESTE COSTANTI IDENTIFICANDO IL COEFF. ANGOLARE DELLA RETTA.

IL PERIODO T È $\frac{2\pi}{\omega}$

A PREScindERE DALLE CARATTERISTICHE DELL'OSCILLATORE E DALL'INTENSITA' DELLA FORZANTE, SE ABBIAMO CHE $\Omega = \omega$ (FREQUENZA FORZANTE UGUALE A QUELLA DEL SISTEMA), IL TERMINE LEGATO ALLA FORZANTE TENDERÀ A DIVERGERE PER $t \rightarrow +\infty$, DIVERGENDO LINEARMENTE.

QUINDI AUMENTANDO SEMPRE t , SARÀ L'ULTIMO TERMINE A PREVALERE SUI PRIMI DUE, A PREScindERE DALLE CONDIZIONI INIZIALI (QUINDI DALL'AMPIEZZA DEI PRIMI 2 TERMINE).

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{F}{m} \frac{t}{\omega} \sin(\omega t)}_{\text{TERMINE PREVALENTE PER } t \rightarrow \infty} \rightarrow \text{RISPOSTA A REGIME DEL SISTEMA}$$

TERMINE PREVALENTE PER $t \rightarrow \infty$

QUANDO SI PARLA DI $\Omega = \omega$ NELLA REALTÀ CORRISPONDE AL FENOMENO DELLA RISONANZA.

20. I VETRI CHE SI ROMPONO CON SUONI TROPPO ELEVATI È DOVUTO AL FATTO CHE LA FREQUENZA DEL SISTEMA (DELLA MASSA) È STATA RAGGIUNTA DA QUELLA DELL'EMISSIONE SONORA.

21. NEW STADIO È SUCCESSO CHE CROUASSERO STRUTTURE POICHÉ I TIFOSI PRODussero FORZANTI TALI DA RAGGIUNGERE LA PULSAZIONE DELLA STRUTTURA, 22. BATTENDO I PIEDI.

23. I SOLDATI ROMPONO LA MARCIA SUI PONTI PER NON RAGGIUNGERE LA FREQUENZA DEL SISTEMA.

COMUNQUE IL $K \rightarrow Kx$ NELL'EQ. DIFF. È VALIDO SOLO PER VALORI DI AMPIEZZA BEN PRECISI, ALTRIMENTI DA COMPORTAMENTO LINEARE $\rightarrow$ SI PASSA A NON LINEARE. QUANDO LA CRESUTA DI UN ANDAMENTO LINEARE SUPERA VALORI PRECISI DI AMPIEZZA, L'ANDAMENTO CESSA DI ESSERE LINEARE IN QUANTO PREDOMINANO LE NON LINEARITÀ.

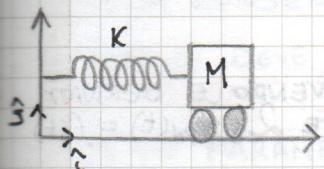
DINAMICA FORZATA DEL PUNTO MATERIALE - RISPOSTA IN FREQUENZA

(PARTE CHE VA INSIEME A CINEMATICA E DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE MA L'ANALISI RIGUARDA LA RISPOSTA E VIENE TRATTATA ORA).

IN MEC. RAZIONALE PER "SISTEMA" SI INTENDE IN REACTA' LA RISPOSTA DI UN PUNTO MATERIALE (IDEALIZZAZIONE), COSA CHE NON VA BENE SEMPRE MA POSSIAMO ESTENDERE QUESTO CONCETTO ANCHE AI CORPI.

SI STUDIA QUINDI LA DINAMICA LIBERA DELL'OSCILLATORE (NEI CASI SEMPLICE QUINDI SI PARLA DEL SISTEMA MASSA-MOLLA (CON O SENZA SMORZATORE)).

SISTEMA MASSA-MOLLA (DINAMICA LIBERA)



(GIÀ TRATTATO PRIMA)

SIAMO NEL CASO IN CUI SI HA:

- 1 GRADO DI LIBERTÀ (C'È SOLO IL G.D.L. DI TRASLAZIONE, NON È UN CORPO CHE PUÒ RUOTARE).
- FORZE IN GIOCO: FORZA DI RICHIAMO ELASTICA

DOBBIAMO PASSARE DALL'EQUAZIONE DEL MOTO VETTORIALE $\rightarrow$ A EQ. DIFF. SCALARE

SI SCRIVE QUINDI IL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO $\rightarrow$ PRIMO MEMBRO È LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE, SECONDO MEMBRO È LA VARIAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO, CHE NEL CASO DI MASSA COSTANTE, SI SCRIVE $m\vec{a}$.

$$\vec{F}(e) = \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \stackrel{\text{cost}}{=} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \rightarrow \boxed{\vec{F}(e) = m\vec{a}} \quad \text{EQUAZIONE VETTORIALE}$$

SI FISSA QUINDI UN SISTEMA DI RIF. $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ E SAPPIAMO INOLTRE CHE IL MOTO AVVIENE SOLO LUNGO L'ASSE DEFINITO DAL VERSORE $\hat{i}$.

$F^e = -K\vec{x}$ (VERSO OPPOSTO RISPETTO AL MOTO DELLA MASSA)

$-K\vec{x} = m\vec{a}$ PROIETTANDO SU $\hat{u}$:

$$-K(\vec{x} \cdot \hat{u}) = m(\vec{a} \cdot \hat{u})$$

$$-Kx = m\ddot{x} \rightarrow m\ddot{x} = -Kx \quad \text{DA CUI}$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

IN CUI DOBBIAMO ANCHE STABILIRE LE C.I.

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

QUINDI LA SOLUZIONE DI TALE E.D. SARÀ:

$$\gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\frac{K}{m} \begin{cases} (-\frac{K}{m}) > 0 \rightarrow \text{2 SOLUZIONI REALI} \\ (-\frac{K}{m}) < 0 \rightarrow \text{2 SOLUZIONI COMPLESSE E CONIUGATE (OSCILLAZIONI)} \end{cases}$$

IL CASO GENERALE (A PRESCINDERE DALLE RADICI):

$$x(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$

NEL CASO DI RADICI COMPLESSE E CONIUGATE, SI PUÒ ANCHE RISCRIVERE:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{E DATE C.I. DEL TIPO} \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

TRAMITE LE QUALI C.I. TROVO

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

SISTEMA MASSA - MOLLA - SMORZATORE (DINAMICA FORZATA)

① SISTEMA MASSA - MOLLA FORZATO (DINAMICA FORZATA)

VEDIAMO PRIMA IL CASO GENERICO NON APPLICATO AL SISTEMA MASSA - MOLLA - SMORZATORE

LA FORZANTE POTREBBE ESSERE DI VARIO GENERE MA SI IPOTIZZA UNA FORZANTE DI TIPO **ARMONICO** (PUNTO CHIAVE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA). SI HA QUINDI LA FORZANTE 1) CON UNA CERTA AMPIEZZA E 2) CON UNA CERTA FREQUENZA (QUINDI PULSAZIONE) INDIPENDENTE DA t . DATO QUINDI UN SISTEMA DEL TIPO:

$$m\ddot{x} + Kx = F \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad \text{IN CUI IMPONIAMO } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

IN CASO DI $\gamma_{1,2} = \pm j\omega$ (RADICI CON. COMPLESSE) LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È: (SENZA RIFARE GLI SVOLGIMENTI)

$$x_{OH}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

MENTRE LA SOLUZIONE GLOBALE:

$$x(t) = x_{OH}(t) + x_{PN}(t)$$

↓ SENZA RISVOLGERE

I CALCOLI

APPL. ANCHE LE C.I. →

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

IN CUI $x_{PN}(t)$ SI TROVA SOSTITUENDO LE DERIVATE NELLA EQ. DIFF. O PIÙ PROPRIAMENTE $\mathcal{L}_2 x_{PN}(t) = f(t)$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)]$$

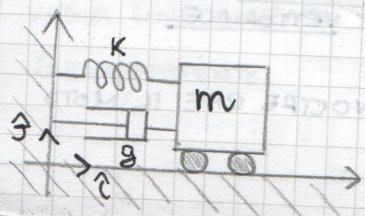
OSCILLATORE
SENZA
FORZATO

SI STUDIA ORA L'ALTRO CASO:

② SISTEMA MASSA - MOLLA - SMORZATORE (DINAMICA FORZATA)

CASO DI MASSA - MOLLA MA CON UN ALTRO "OGGETTO" CHE DEFINIAMO SMORZATORE (LA CUI NATURA DI SMORZATORE DIPENDE COMUNQUE DAL PARAMETRO γ).

γ È COEFFICIENTE PROPORZIONALE A $\dot{x}$



IL SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA / 1° EQ. CARDINALE

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

CON LO STESSO RAGIONAMENTO DI PRIMA SI ESPRIME L'EQ. DIFF. NEL SEGUENTE MODO:

$$m\ddot{\vec{a}} + g\vec{v} = -K\vec{x} + \vec{F}\cos(\Omega t) \rightarrow \ddot{\vec{a}} + \frac{g}{m}\vec{v} + \frac{K}{m}\vec{x} = \frac{\vec{F}}{m}\cos(\Omega t)$$

SI PROIETTA SUL GRADO DI LIBERTÀ (CE NE È SOLO 1 COME NEL CASO PREC.) IL PUNTO MATERIALE SI MUOVE LUNGO L'ASSE DEFINITO DA $\hat{c}$.

$$\ddot{\vec{a}} \cdot \hat{c} + \left(\frac{g}{m}\right)(\vec{v} \cdot \hat{c}) + \left(\frac{K}{m}\right)(\vec{x} \cdot \hat{c}) = \left(\frac{\vec{F} \cdot \hat{c}}{m}\right) \cos(\Omega t)$$

$$a_i + \frac{g}{m}v_i + \frac{K}{m}x_i = \frac{F}{m}\cos(\Omega t)$$

COMPONENTI LUNGO L'ASSE $\hat{c}$; LA RISCRIVIAMO PER SEMPLICITÀ COME:

$$\ddot{x} + \frac{g}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F}{m}\cos(\Omega t)$$

E IMPONGO LE C.I. = $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$

SI DEFINISCE POI: $\frac{g}{m} = 2\zeta\omega$

$$\zeta = \frac{g}{2\omega m}$$

→ RAPPORTO DI SMORZAMENTO

$m > 0; g > 0; K > 0$
IL SISTEMA È SMORZATO, PERCHÉ $g > 0$

$$\frac{K}{m} = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

→ PULSAZIONE NATURALE

SE g FOSSE
0, AUREMMO
UN SISTEMA
IN CUI β
QUINDI LA RADICE
REALE > 0 E
A $t \rightarrow \infty$ SI
AVREBBE UN
AUMENTO DI
AMPIEZZA E
NON UNO
SMORZAMENTO

QUINDI RISCRIVO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE COME:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F}{m}\cos(\Omega t)$$

DEFINIZIONE

PER **RISPOSTA IN FREQUENZA** SI INTENDE COMPRENDERE COSA SUCCEDDE ALLA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE VARIANDO LA FREQUENZA DELLA FORZANTE (INPUT) DA CUI ESCE UN CERTO $x(t)$ (OUTPUT). QUINDI LA RISPOSTA È LA SOLUZIONE DEL SISTEMA; AL VARIARE DI Ω LA SOLUZIONE SARÀ DIVERSA. LA SOLUZIONE $x(t)$ DI TALE ED. HA PARTE OMogenea + PARTICOLARE:

$$x(t) = x_{go}(t) + x_{pn}(t)$$

PER $t \rightarrow +\infty$, DOPO UN TRANSITORIO INIZIALE, PREVALE LA $x_{pn}(t)$ LEGATA ALLA FORZANTE.

SE AVESSIMO UN SISTEMA NON SMORZATO, DATE LE C.I. AUREMMO (IN CASO DI $\zeta_{1/2}$ COMPLESSE E CONIUGATE), UNA SITUAZIONE PER CUI DALL'ISTANTE t LA PARTICELLA AURÀ UN ANDAMENTO PERIODICO DEL TIPO:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{es. PENDOLO O MASSA-MOLLA}$$

QUINDI IL SISTEMA OSCILLA ALLA SUA FREQUENZA, QUINDI PULSAZIONE. NEL MOMENTO IN CUI INFERISCO UNO SMORZAMENTO ($g > 0$) ALLORA L'ENERGIA NON SI CONSERVA E L'AMPIEZZA DI $x(t)$ TENDE A CONVERGERE.

QUINDI SI DEVE STUDIARE LA RISPOSTA IN FREQUENZA AL VARIARE DEL **RAPPORTO DI SMORZAMENTO ζ** . **X RADICI CONIUGATE E COMPLESSE**

ζ È UN PARAMETRO T.C. → $0 \leq \zeta \leq 1$

MA NEL MOMENTO IN CUI ESCE DA TALE INTERVALLO SIGNIFICA CHE LE RADICI NON SONO PIÙ CONIUGATE E COMPLESSE

QUINDI SI HANNO QUESTI 3 CASI:

1) $0 < \zeta < 1$

$$\delta_{1/2} = \beta \pm j\omega$$

RADICI COMPLESSE E CONIUGATE → COMPORTAMENTO OSCILLATORIO

SOTTOSMORZATO

2) $\zeta = 1$

RADICI REALI E COINCIDENTI → COMPORTAMENTO NON OSCILLATORIO MA LIMITE

SMORZAMENTO CRITICO

3) $\zeta > 1$

RADICI REALI E DISTINTE → COMPORTAMENTO NON OSCILLATORIO

SOVRASMORZATO

SE $\zeta < 0 \rightarrow g < 0$ Appunti di Davide Antonio Mautone

$\zeta = 1$ SIGNIFICA CHE, FISSATA LA MASSA E LA PULSAZIONE DEL SISTEMA (CIOE' FISSATI m E k), SI AURA' IN CASO DI SISTEMA SMORZATO, UN PARAMETRO ζ TALE CHE E' UGUALE AD UN ζ CRITICO:

CASO LIMITE

$\zeta = \zeta_{CRIT}$ IN CUI ζ_{CRIT} E' LO SMORZAMENTO CRITICO

$$\zeta_{CRIT} = 2m\omega$$

QUINDI SIGNIFICA CHE:

$$\zeta = \frac{\zeta}{\zeta_{CRIT}} = \frac{\zeta}{2m\omega} = 1 \quad \text{E' QUINDI IL CONFINE TRA 2 ANDAMENTI DELLA SOLUZIONE, UNO OSCILLATORIO E UNO NON.}$$

SE $\zeta < 1$ E' LEGGERMENTE $< 1 \rightarrow$ IL SISTEMA INIZIA AD OSCILLARE.

ESEMPIO:

IL SISTEMA "SOSPENSIONE" RISPONDE ALLA SOLLECITAZIONE NON OSCILLANDO. LA RISPOSTA DEL SISTEMA NON E' OSCILLATORIA MA TENDE A RIMETTERSI NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO SENZA OSCILLAZIONI SE LE SOSPENSIONI SONO BUONE. IN QUESTO CASO SI VUOLE AVERE UN COMPORTAMENTO SOVRASMORZATO; NON SI VUOLONO AVERE OSCILLAZIONI DEL SISTEMA. SI MODELA QUINDI ζ IN MODO TALE DA TROVARCI IN UNA CONDIZIONE $\zeta > 1$.

DIMOSTRAZIONE

$$m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + Kx = F\cos(\omega t)$$

SI DETERMINANO LE RADICI DELL'EQ. CARATTERISTICA DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$\ddot{x} + \frac{\zeta}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \quad \text{cos}(\omega t)$$

SI CERCA SOLUZIONE DEL TIPO $x(t) = e^{\alpha t}$ QUINDI:

$$e^{\alpha t} \left[\alpha^2 + \frac{\zeta}{m}\alpha + \frac{K}{m} \right] = 0$$

IN CUI $e^{\alpha t} = 0$ PER $C=0 \rightarrow$ SOL. BANALE

$$\alpha^2 + \frac{\zeta}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0$$

QUINDI $\alpha_{1/2}$:

$$\alpha_{1/2} = \frac{-\frac{\zeta}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{m}\right)^2 - 4\frac{K}{m}}}{2} = -\frac{\zeta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} = \alpha_{1/2}$$

QUINDI LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA DIPENDERE DAL Δ DEFINENDO NUOVAMENTE:

$$\zeta_{CRIT} = 2m\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\zeta = \frac{\zeta}{2m\omega} = \frac{\zeta}{\zeta_{CRIT}}$$

LE RADICI SARANNO:

FATTORE DI SMORZAMENTO

$$\alpha_{1/2} = -\zeta\omega \pm \sqrt{\zeta^2\omega^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_{1/2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\beta = -\zeta\omega$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

PARTI IMM. DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA IL CASO $\Delta < 0 \rightarrow \alpha_{1/2}$ (CIOE' $\alpha_{1/2}$) RADICI COMPLESSE E CONIUGATE QUINDI $\zeta < 1$

LE RADICI SONO DEL TIPO $\alpha_{1/2} = \beta \pm j\omega_D$

$$\text{IN CUI } \omega_D = \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

PULSAZIONE NATURALE SMORZATA

SOLO PER $\zeta = 1$

$$\omega_D \neq \omega$$

QUINDI LA SOLUZIONE DELLA OMOGENEA È:

$$x_{GO}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1/2} = \beta \pm j\omega_D \rightarrow$$

1) X_{GO}
IPOTIZZANO RADICI
COMPLESSE E CONIUGATE
 $\zeta^2 - 1 < 0 \rightarrow 0 < \zeta < 1$

CON LE C.I. DEL TIPO: $x(0) = x_0$ E $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

USANDO LE FORMULE DI EULERO $\rightarrow e^{\pm j\omega_D t} = \cos(\omega_D t) \pm j \sin(\omega_D t)$
SI OTTIENE (OMETTENDO ALCUNI PASSAGGI):

$$x_{GO}(t) = e^{\beta t} [(C_1 + C_2) \cos(\omega_D t) + (C_1 - C_2) j \sin(\omega_D t)]$$

IN CUI $C_1 + C_2 = A$ E $j(C_1 - C_2) = B$

$$x_{GO}(t) = e^{\beta t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)]$$

SI NOTA CHE ESSENDO $\beta < 0$ POICHÉ $\zeta > 0$ DA CUI $\zeta > 0$ ALLORA IL SISTEMA, PER
E $\rightarrow \infty$ SARA' TALE CHE L'ESPONENZIALE $\rightarrow 0$

$$\text{QUINDI } \lim_{t \rightarrow \infty} x_{GO}(t) = 0 \quad \zeta > 0$$

TROVO ORA LA SOLUZIONE PARTICOLARE $x_{PN}(t)$:

ESSENDO LA FORZANTE DEL TIPO $F \cos(\Omega t)$ ALLORA:

$\eta = 0$; $\delta = \Omega$; $p_m(t) = F$; $p_n(t) = 0$; $m = 0$ SEGUE CHE:

$$x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)$$

CERCO UNA SOLUZIONE CHE MESSA AL POSTO DELLA x MI DIA LA FORZANTE:

$$L_2 x_{PN}(t) = F \cos \Omega t \quad \text{cioè:}$$

$$\dot{x}_{PN}(t) = -\Omega [C \sin(\Omega t) + D \cos(\Omega t)]$$

$$\ddot{x}_{PN}(t) = -\Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)]$$

SOSTITUITI IN *:

$$-\Omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] + 2 \zeta \omega (-\Omega) [C \sin(\Omega t) - D \cos(\Omega t)] + \omega^2 [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

RISCRITTO COME:

$$\cos(\Omega t) [-\Omega^2 C + 2 \zeta \omega \Omega D + \omega^2 C] + \sin(\Omega t) [-\Omega^2 D - 2 \zeta \omega C \Omega + \omega^2 D] = \frac{F}{m} \cos(\Omega t)$$

PER L'UGUAGLIANZA DEI DUE TERMINI:

$$\begin{cases} -\Omega^2 C + 2 \zeta \omega \Omega D + \omega^2 C = \frac{F}{m} \\ -\Omega^2 D - 2 \zeta \omega \Omega C + \omega^2 D = 0 \end{cases}$$

SISTEMA IN 2 INCOGNITE
C E D

OMETTENDO I PASSAGGI SI OTTIENE:

$$C = \frac{\frac{F}{m} (\omega^2 - \Omega^2)}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \zeta^2 \omega^2 \Omega^2]}$$

$$D = \frac{2 \zeta \omega \Omega \frac{F}{m}}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \zeta^2 \omega^2 \Omega^2]}$$

MA CHE SI
POSSONO
RISCRIVERE
ASSUMENDO
CHE C'E
D' SIANO
UGUALI A

$$\rightarrow C = \Delta \cos \varphi$$

$$\rightarrow D = -\Delta \sin \varphi$$

LA FASE È IN RITARDO RISPETTO A CHI L'HA GENERATA.

DA CUI $x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)$

$x_{PN}(t) = \Delta [\cos(\Omega t) \cos \varphi - \sin(\Omega t) \sin \varphi]$

FORMA
GENERALE
 $x_{PN}(t)$
CON C E D

NON SI PARLA DI
RISONANZA QUANDO SI
HA SMORZAMENTO
PERCHÉ SE SI HA
UNO, NON SI HA L'ALTRO

RICORDANDO CHE $\cos(\Omega t + \varphi) = \cos \Omega t \cos \varphi - \sin \Omega t \sin \varphi$
F. DI DUPLICAZIONE DEL COSENO, ALORA:

$x_{PN}(t) = \Delta \cos(\Omega t + \varphi)$

FORMA ALTERNATIVA
EQUIVALENTE

LE DUE FORME SONO EQUIVALENTI TRA
LORO IN QUANTO I PARAMETRI SONO SEMPRE
DUE: C, D O Δ, φ

QUINDI TUTTO QUESTO RAGIONAMENTO STA AD INDICARE CHE (PER ORA) CI IMPORTA
SOLO DELLA RISPOSTA A REGIME, QUANDO IL TRANSITORIO È SUPERATO, PER $t \rightarrow \infty$.
SI È FISSATA UNA FREQUENZA Ω INDIPENDENTE DAL SISTEMA (ESSENDO LA FORZANTE
ESTERNA AVERE LA SUA FREQUENZA).

QUINDI, IN GENERALE, SI AVRA': $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{PN}(t)$

QUINDI LA RISPOSTA IN FREQUENZA INDICA "COME SI COMPORTERÀ IL SISTEMA AL
VARIARE DELLA FORZANTE ESTERNA (INDIPENDENTEMENTE DAL SISTEMA STESSO).

STUDIO IL LEGAME TRA $C, D \leftrightarrow \Delta, \varphi$:

A DIFFERENZA DELLA (1) FORMA IN CUI C'È UNA SOMMA TRA DUE FUNZIONI
OSCILLANTI, NELLA (2) HO DIRETTAMENTE L'AMPIEZZA Δ DELLA SOLUZIONE, ELEMENTO
MOLTO IMPORTANTE. LA FREQUENZA A CUI OSCILLA IL SISTEMA DOPO UN CERTO
TEMPO t PER CUI LA SOLUZIONE DELLA OMogenea $\rightarrow 0$, SARA' PROPRIO LA Ω
IMPOSTA DALLA FORZANTE. $\hookrightarrow$ PERCHÉ $\beta < 0$

Δ È AMPIEZZA CHE NON SARA' SEMPRE UGUALE MA VARIERA' IN BASE ALLA
FREQUENZA DELLA FORZANTE (Δ È RICAUVATO DOPO)

φ INDICA LO SFASAMENTO TRA FORZANTE E SOLUZIONE. SEBBENE L'INPUT, OSSIA
LA FORZANTE, ABBAIA LA STESSA PULSAZIONE DELLA SOLUZIONE, OUTPUT, QUESTA
SARA' SFASATA DI UN CERTO ANGOLO φ CHE SI PUÒ CONSIDERARE DIRET-
TAMENTE IN RITARDO. QUINDI IL SISTEMA RISPONDE IN RITARDO ALL'INGRESSO

DESCRIZIONE QUALITATIVA DEI DIAGRAMMI DI RISPOSTA IN FREQUENZA

QUINDI DEVO STUDIARE COME VARIA Δ E φ DELLA RISPOSTA $x(t)$ (SOLUZIONE
A REGIME) IN TERMINI DELL'UNICO PARAMETRO CHE È STATO IMPOSTO OSSIA
LA FREQUENZA DELLA FORZANTE Ω , VARIABILE INDIPENDENTE.

I LEGAMI TRA LE COSTANTI SONO:

$$\begin{cases} C = \Delta \cos \varphi \\ D = -\Delta \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta^2 = C^2 + D^2 \\ \tan \varphi = -\frac{D}{C} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta = \sqrt{C^2 + D^2} \quad *1 \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{D}{C}\right) \quad *2 \end{cases}$$

E SAPPIAMO CHE DA QUESTA ESPRESSIONE:

$x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)$

SI PUÒ RISCRIVERE:

$x_{PN}(t) = \Delta \cos(\Omega t + \varphi)$

PER STUDIARE L'AMPIEZZA DI Δ E φ DOBBIAMO RIPRENDERE
LE RELAZIONI RICAUVATE DI C E D:

$$C = \frac{F}{m} (\omega^2 - \Omega^2) \quad \text{E} \quad D = \frac{2 F \omega \zeta \Omega}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \omega^2 \zeta^2 \Omega^2]}$$

QUINDI, ESSENDO $\Delta = \sqrt{C^2 + D^2}$:

$$\Delta = \sqrt{\frac{F^2}{m^2} (\omega^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4 F^2 \omega^2 \zeta^2 \Omega^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{F^2}{m^2} [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4 \omega^2 \zeta^2 \Omega^2]}$$

*1 ELEVO TUTTO ALLA 2

$$\begin{cases} C^2 = \Delta^2 \cos^2 \varphi \\ D^2 = \Delta^2 \sin^2 \varphi \end{cases} \quad \text{SOMMO LE DUE E O:} \quad C^2 + D^2 = \Delta^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

DA CUI
 $\Delta^2 = C^2 + D^2$

*2 BASTA SOSTITUIRE:

$$\begin{cases} \Delta = \frac{C}{\cos \varphi} \\ D = -\frac{C}{\cos \varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad \text{DA CUI} \quad -\frac{D}{C} = \tan \varphi$$

SEMPLIFICANDO:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\frac{F^2}{m^2}}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2 \Omega^2]}}$$

SE ORA MOLTIPLICO IL DENOMINATORE PER $\frac{\omega^4}{\omega^4}$ OTTENGO;
SOLGO SOLO IL DENOMINATORE:

$$m^2 [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2 \Omega^2] \cdot \frac{\omega^4}{\omega^4} = m^2 \omega^4 \left[\omega^4 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^4} + 4 \frac{\omega^2}{\omega^4} \zeta^2 \Omega^2 \right]$$

DA CUI:

$$m^2 \omega^4 \left[\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \zeta^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right]$$

QUINDI IL Δ PUO' ESSERE RISCITTA COME:

$$\Delta = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1 - \sigma^2)^2 + 4\zeta^2 \sigma^2}} \quad (3)$$

AMPIEZZA Δ

IN CUI $K \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ QUINDI $K = \omega^2 m$
 $K^2 = \omega^4 m^2$

$$\sigma = \frac{\Omega}{\omega}$$

STESSO PROCEDIMENTO PER φ :

$$\varphi = \text{ARCTAN}\left(-\frac{D}{C}\right) \rightarrow -\frac{D}{C} = -\frac{2 \frac{F}{m} \omega \zeta \Omega}{\frac{F}{m} (\omega^2 - \Omega^2)} = -\frac{2 \omega \zeta \Omega}{\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \quad \text{DA CUI}$$

$$\varphi = \text{ARCTAN}\left(-\frac{2\zeta\sigma}{1 - \sigma^2}\right) \quad (4)$$

SFASAMENTO φ

QUINDI LA $x_{PN}(t)$ SARA':

$$x_{PN}(t) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1 - \sigma^2)^2 + 4\zeta^2 \sigma^2}} \cos(\Omega t + \text{ARCTAN}\left[-\frac{2\zeta\sigma}{1 - \sigma^2}\right])$$

$x_{PN}(t)$
FINALE
CON Δ E φ

QUINDI LA (3) E (4) METTONO IN EVIDENZA LA DIPENDENZA DELL'AMPIEZZA Δ E LO SFASAMENTO φ CON I VARI PARAMETRI, IN PARTICOLARE IL RAPPORTO DI SMORZAMENTO E LA FREQUENZA DELLA FORZANTE (IN REALTA' IL RAPPORTO TRA LA FREQ. DELLA FORZANTE E DEL SISTEMA).

IN GENERALE SI ESPRIME QUESTA DIPENDENZA TRAMITE DEI GRAFICI.

DIAGRAMMI DI RISPOSTA IN FREQUENZA - AMPIEZZA

NON VIENE GRAFICATA DIRETTAMENTE L'AMPIEZZA Δ , MA VIENE RAPPRESENTATO UN PARAMETRO ADIMENSIONALE COSTRUITO TRAMITE L'AMPIEZZA Δ .

L'AMPIEZZA $\hat{A}$ E' POSIZIONATA SULLE ORDINATE E VIENE CONFRONTATA CON IL PARAMETRO DI INPUT σ (ADIMENSIONALE). E' COME SE, COMUNQUE, VENISSE CONFRONTATA CON Ω , IN QUANTO SI CONSIDERA ω COSTANTE MENTRE Ω VARIABILE, QUINDI σ VARIA AL VARIARE DI Ω .

SI INTRODUCE $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \frac{\Delta}{F/K} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma^2)^2 + 4\zeta^2 \sigma^2}} = \frac{\Delta(\zeta; \sigma)}{\Delta(\zeta; 0)}$$

AMPIEZZA $\hat{A}$ ADIMENSIONALIZZATA

$\rightarrow$ AMPIEZZA GENERATA DALLA RISPOSTA

$\rightarrow$ AMPIEZZA DELLA RISPOSTA CON $\sigma = 0 \rightarrow \Omega = 0$

QUINDI $\Delta(\xi; \delta)$ È AMPIEZZA GENERALE DATA DA UN DATO ξ RAPP. DI SMORZAMENTO E δ RAPPORTO TRA LE FREQUENZE.

$\Delta(\xi; 0)$ È AMPIEZZA DELLA RISPOSTA QUANDO LA FORZANTE HA $\delta = 0$ OSSIA QUANDO HA FREQUENZA NULLA.

SIAMO NEL CASO DI **FORZANTE STATICA**: È UNA FORZANTE NON DI TIPO ARMONICO, PER ESEMPIO UNA FORZA GRAVITAZIONALE O QUALCOSA CHE IMPRIME UNA FORZA COSTANTE IN MANIERA STATICA.

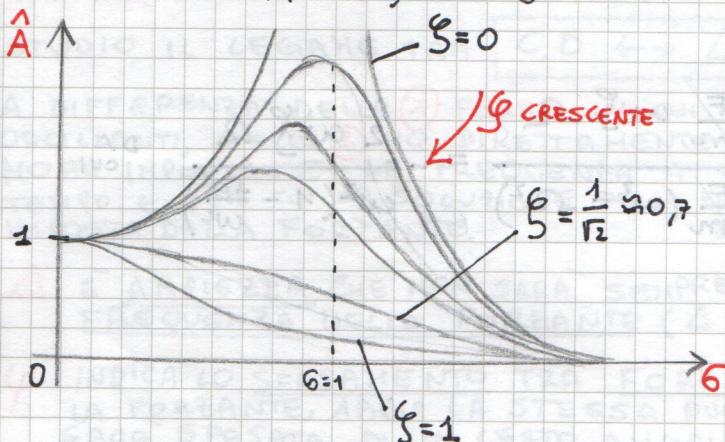
QUINDI ESSENDO $x(t) = x_{PN}(t)$ DOPO CHE IL TRANSITORIO SI È CONCLUSO SI AUREBBE NEL CASO DI **FORZANTE STATICA**:

$$x(t) = \Delta \cos(\Omega t + \varphi) \text{ MA } \varphi \text{ E } \Omega = 0 \text{ QUINDI}$$

$$x(t) = \Delta = \frac{F}{K} \text{ OSSIA È LO SPOSTAMENTO CHE SUBIREBBE LA MASSA DOPO IL TRANSITORIO. RAGGIUNTO IL DATO } x, \text{ LA MASSA SI FERMEREBBE E NON SI AUREBBE PIÙ ALCUN SPOSTAMENTO.}$$

QUINDI IL FATTORE ADIMENSIONALIZZANTE È PROPRIO L'**AMPIEZZA DELLA RISPOSTA STATICA** OSSIA F/K .

GRAFICANDO $\hat{A}$ IN F DI δ :



- SI NOTA CHE PER $\delta = 0$ SI HA $\hat{A} = 1$. QUINDI A PRESCINDERE DAL RAPPORTO DI SMORZAMENTO (QUINDI DA ξ), SE $\delta = 0$ SI AVRÀ SEMPRE $\hat{A} = 1$ LE AMPIEZZE STATICHE COMUNQUE VARIANO DA SISTEMA A SISTEMA.

- $\hat{A}$ QUINDI NON INDICA L'AMPIEZZA BENSÌ LA "PERCENTUALE" O "FRAZIONE" DI AMPIEZZA RISPETTO A QUELLA STATICA.

$$\hat{A} = 1,5 \rightarrow \Delta(\xi; \delta) = 1,5 \cdot \Delta(\xi; 0) \text{ OSSIA L'AMPIEZZA DEL SISTEMA È 1,5 VOLTE L'AMPIEZZA STATICA}$$

QUALSIASI SISTEMA CON UN DATO RAPPORTO DI SMORZAMENTO ξ AVRÀ L'AMPIEZZA DELLA RISPOSTA 1,5 VOLTE L'AMPIEZZA STATICA, QUINDI:

- OGNI CURVA È ASSOCIATA AD UN DATO ξ , K E M (QUINDI g, K, m). SI POSSONO RAPPRESENTARE DIVERSE CURVE CHE SI DIFFERENZIANO LE UNE DALLE ALTRE PER IL DIVERSO VALORE DEL PARAMETRO ξ . MAN MANO CHE SALGO VERSO VALORI PIÙ BASSI DI ξ (SOTTOSMORZAMENTO), SI NOTA UN PICCO SPOSTATO SEMPRE PIÙ VERSO L'ALTO E VERSO DESTRA (SIGNIFICA CHE STO SMORZANDO MENO IL SISTEMA, LO "FRENO" DI MENO). L'AMPIEZZA DEL SISTEMA, FISSATO UN DATO δ , SARÀ SEMPRE PIÙ GRANDE, DIMINUENDO ξ . PORTANDO AL LIMITE QUESTA SITUAZIONE, OSSIA $\xi \rightarrow 0$ (ASSENZA DI SMORZAMENTO) SI AVRÀ UN ASINTOTO. NOI CONSIDERIAMO IL CASO DI STUDIO SENZA ASINTOTO. VICEVERSA, NEL CASO IN CUI AUMENTIAMO ξ , CIOÈ CI PORTIAMO VERSO IL BASSO (CASO SOVRASMORZATO), LE CURVE PARTONO SEMPRE DAL VALORE $\hat{A} = 1$ E TENDONO ASINTOTICAMENTE AD $\hat{A} = 0$.

- SI STUDIA ORA DOVE SI HA L'AMPIEZZA ADIMENSIONALIZZATA $\hat{A}$ AL SUO VALORE MASSIMO. SI SA CHE IN CASO IN CUI $\delta = 0$ (QUINDI $\Omega = 0$) $\hat{A} = 1$ È DATO PUNTO RAPPRESENTA UN MASSIMO (MA BANALE). PER TROVARE ALTRI PUNTI DI MASSIMO SI FA LA DERIVATA DELLA f RISPETTO LA SUA VARIABILE DA CUI DIPENDE:

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{(1-\delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \text{ DA CUI } \frac{\partial \hat{A}}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{1}{\sqrt{(1-\delta^2)^2 + 4\xi^2\delta^2}} \right] = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{CERCHIAMO IL} \\ \text{MAX} \\ \text{SI ANNULLA LA DERIVATA} \end{array}$$

E CUI SOLUZIONI SONO:

$\xi = 0$ (DOVE QUINDI $\hat{A} = 1$) E $\xi_H = \sqrt{1 - 2\xi^2} \rightarrow$ QUINDI DIPENDE DA ξ

QUINDI SONO I VALORI DELL'ASCISSE PER CUI HO IL MASSIMO $\hat{A}$.

SI NOTA DA ξ_H CHE PIÙ LO SMORZAMENTO È ELEVATO PIÙ ξ SI SPOSTA VERSO SINISTRA, MA CIÒ È VALIDO FINO A CHE L'ARGOMENTO DELLA RADICE È POSITIVO, INFATTI:

$1 - 2\xi^2 \geq 0 \rightarrow \xi^2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
AL LIMITE

QUINDI SI AVRÀ $\xi_{\max} = 0$ PER

$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$

QUINDI PER $\xi = 1$ NON SI HA $\hat{A}_{\max}$!!

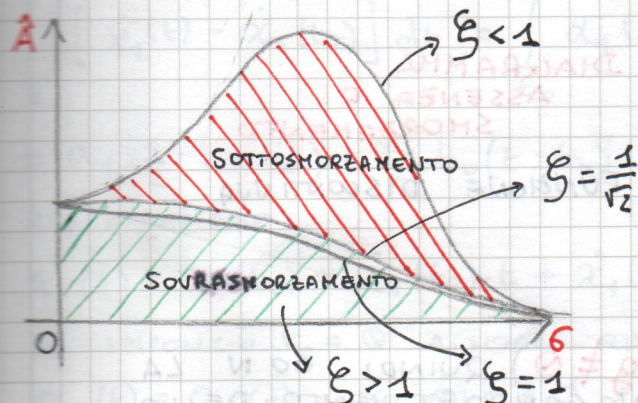
QUINDI AL DI SOPRA DI UN CERTO ξ NON SI AVRÀ ALCUN MASSIMO SE NON LA SOLUZIONE BANALE $\xi = 0$. QUINDI $\xi = 1/\sqrt{2}$ EVIDENZIA LA ZONA DI SEPARAZIONE TRA DUE FENOMENI, QUELLO DEL SOTTOSMORZAMENTO E QUELLO DEL SOVRASMORZAMENTO

• COME SI VEDE DAL DIAGRAMMA, A PREScindERE DA ξ , SI AVRÀ UNA SITUAZIONE TALE PER CUI TUTTE LE CURVE TENDONO ASINTOTICAMENTE A 0.

QUINDI SI NOTA CHE PER ξ ELEVATI QUINDI PER Ω ELEVATI DELLA FORZANTE, IL SISTEMA RISponderà CON UN'AMPIEZZA PICCOLISSIMA, È COME SE NON RISPONDESSE PIÙ ALLA FORZANTE E NON SI MUOVE PROPRIO (O QUASI). RISULTA QUINDI TRASPARENTE A QUELL'ECcITAZIONE $\rightarrow$ A CAUSA DELLA SUA INERZIA: PER INERZIA SI INTENDE L'OPPOSIZIONE A QUALSIASI VARIAZIONE DEL MOTO. ESSENDO LA FREQUENZA ELEVATA, L'INERZIA DELLA MASSA È TALE DA NON RIUSCIRE NEPPURE A REAGIRE ALLA SOLLECITAZIONE CHE GIÀ LA FORZANTE HA CAMBIATO DI SEGNO.

QUINDI SE SI CERCA DI METTERE IN VIBRAZIONE UN SISTEMA A FREQUENZE MOLTO ELEVATE RISPETTO A QUELLE DEL SISTEMA, ESSO (IL SISTEMA) RESTERÀ FERMO, OSCILLANDO POCHISSIMO.

• QUINDI SE DEVI PRENDERE UN DOSSO O UNA BUCIA CON LA MACCHINA, O LA/O PRENDIALENTO O A VELOCITÀ BASSA "CIT. BURGIGNOLI



• IL DIAGRAMMA È QUINDI DIVISO IN DUE PARTI:

SOTTOSMORZAMENTO PER $\xi < 1/\sqrt{2} \rightarrow$ oscilla

LIMITE PER $\xi = 1/\sqrt{2}$

SOVRASMORZAMENTO PER $\xi > 1/\sqrt{2}$
oscilla poco o non oscilla

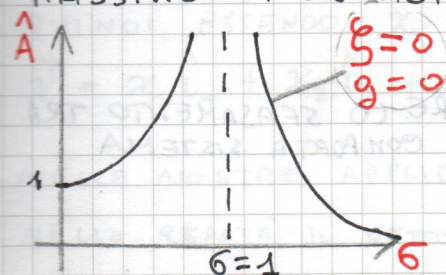
$\xi = 1$ È NELLA ZONA DI SOVRASMORZAMENTO MA INDICA SOLO IL PASSAGGIO DA RADICI REALI A RADICI IMMAGINARIE DELLA OMOGENEA ASSOCIATA!

NELLA ZONA $\xi > 1$ IL SISTEMA RISPONDE OSCILLANDO POCO O PER NIENTE

ESISTONO SISTEMI NON-MECCANICI CHE AL CONTRARIO DI QUESTI CHE RISENTONO DELLE BASSE FREQUENZE E NON DELLE ALTE, RISENTONO DELLE ALTE E NON DELLE BASSE FREQUENZE.

• I MASSIMI DELL'AMPIEZZA $\hat{A}$ RICADONO TUTTI PRIMA DI $\xi = 1$, NON POSSONO RICADERE DOPO $\xi = 1$ (CIOÈ PRIMA DI $\Omega = \omega$ O NEL PUNTO STESSO $\Omega = \omega$ AL LIMITE).

IL CASO LIMITE DI $\hat{A}$ È QUANDO $\xi = 0$ OSSIA $\xi = 0$. NON SI AVRÀ UN MASSIMO MA UN ASINTOTO VERTICALE.



QUESTO È IL CASO IN CUI $\xi = 1 = \frac{\Omega}{\omega} \rightarrow \Omega = \omega$

SIAMO NELLA CONDIZIONE DI ASSENZA DI SMORZAMENTO

RISONANZA $\Omega = \omega \rightarrow$ È UN CASO IDEALE POICHÉ QUINDI AVIENE SENZA SMORZAMENTO

AVENDO $\chi_{1/2} = \pm j\omega$ ED ESSENDO $\Omega = \omega$, PER LA RISOLUZIONE GIÀ VISTA SI OTTIENE CHE LA SOLUZIONE PARTICOLARE TENDERÀ AD AUMENTARE LINEARMENTE (L'AMPIEZZA) ALL'AUMENTARE DI t .

L'OMOGENEA NON VA PIU' A 0 PER $t \rightarrow \infty$ POICHE' LE RADICI SONO CONIUGATE E COMPLESSE ($\pm j\omega$) E NON C'E' PIU' IL TERMINE $\beta < 0$ CHE PORTA A 0 IL TRANSITORIO. QUINDI LA DINAMICA LIBERA NON TENDE A SPARIRE.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F}{2\omega m} t \sin(\omega t)$$

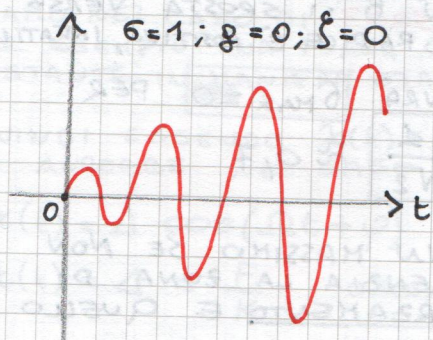


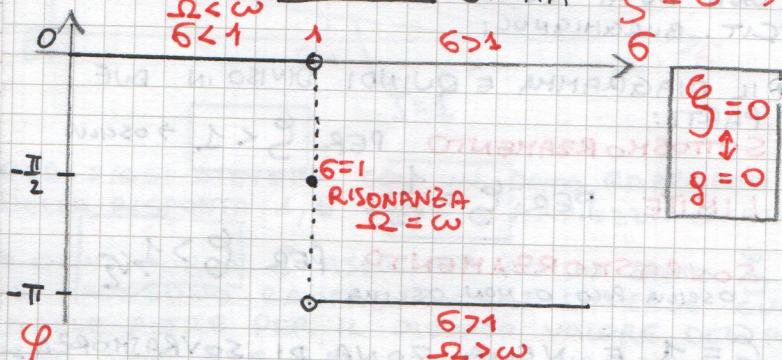
DIAGRAMMA DELLE FASI

φ E' QUINDI L'ANGOLO DI SFASAMENTO TRA RISPOSTA E FORZANTE (QUINDI TRA RISPOSTA DEL SISTEMA E LA FORZANTE).

φ E' DEFINITO COME: $\varphi = \text{ARCTAN}\left(-\frac{2\xi\delta}{1-\delta^2}\right)$ SI DISTINGUONO 3 CASI

- NEL CASO DI **ASSENZA DELLO SMORZAMENTO** SUCCEDERE CHE LA RISPOSTA E' SEMPRE IN **FASE CON LA FORZANTE**. E' IL CASO LIMITE PER $\omega \rightarrow \infty$ QUINDI $\varphi = 0$ IN QUANTO $\xi = 0$ ($\text{opp. } \zeta = 0$) MENTRE $\delta \rightarrow 1$ ($\delta < 1$)
- NEL MOMENTO IN CUI $\omega = \omega_n$ SI HA UN SALTO E LA RISPOSTA SI METTE IN **QUADRATURA** A $-\pi/2$ (90° IN RITARDO) SEMPRE CON $\delta = 1$.
- INFINE PER $\delta > 1$ SI METTE IN **OPPOSIZIONE DI FASE**

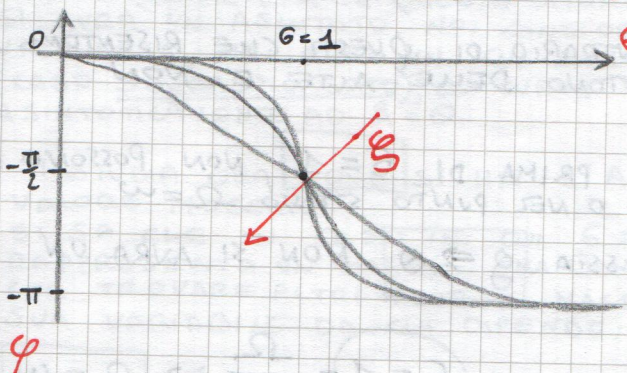
IN TUTTI E 3 I CASI SI HA $\xi = 0 \rightarrow$ **ASSENZA DI SMORZAMENTO**



**DIAGRAMMA
ASSENZA DI
SMORZAMENTO**

$\rightarrow$ **FUNZIONE DISCONTINUA**

IN TUTTI GLI ALTRI CASI CON $\xi \neq 0$ ($\text{opp. } \zeta \neq 0$) QUINDI CON LA **PRESENZA DELLO SMORZAMENTO** SI HA UN COMPORTAMENTO DELLO SFASAMENTO "CONTINUO" E NON A "SALTI" (LA FUNZIONE ARCTAN E' CONTINUA).



**DIAGRAMMA DI PRESENZA
DELO SMORZAMENTO**

$\rightarrow$ **FUNZIONE CONTINUA**

IL DIAGRAMMA DELLE FASI E' IMPORTANTE PER CAPIRE LO SFASAMENTO TRA INPUT (FORZANTE) E OUTPUT (RISPOSTA), QUINDI COME SI COMPORTA SISTEMA VARIANDO δ .

SINTESI SU ANALISI SPETTRALE MATRICI

(IN PIV)

(1)

SPAZIO VETTORIALE È INSIEME DOTATO DI OPERAZIONE SOMMA E PRODOTTO PER UNO SCALARE.

ES. DI SPAZI VETTORIALI SONO $\mathbb{R}^n$ O MATRICI $\text{MAT}(n \times n)$ → DIMENSIONE $n \times n$

SI DEFINISCE V SPAZIO VETTORIALE T.C. HA INOLTRE LE OPERAZIONI

• SOMMA TRA VETTORI → $u, v \in V \rightarrow u + v \in V$

• PRODOTTO PER UNO SCALARE → $\alpha u \in V$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

~ O SI SCRIVONO VETTORI RIGA
O VETTORI COLONNA, È UGUALE

SI DEFINISCE COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ IL VETTORE:

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \vec{v}_n \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

I VETTORI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE ESISTE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE A COEFF. NON TUTTI NULLI.

$$a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{DOVE ALMENO UN } a_n \neq 0$$

SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI QUANDO LA COMBINAZIONE È A COEFFICIENTI TUTTI NULLI.

I VETTORI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ SONO UN INSIEME DI GENERATORI DI V SE OGNI VETTORE DI V È ESPRIMIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

UN INSIEME FINITO DI VETTORI $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ SI DICE BASE DI V

• È UN INSIEME DI GENERATORI DI V

• SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

È UN SOTTOINSIEME DI UNO SPAZIO VETTORIALE V SE VERIFICA LE PROPRIETÀ:

• VETTORE NULLO $\in E$

• $u + v \in E$ CON $u, v \in E$

• $u \in E$ E $k \in \mathbb{R} \rightarrow ku \in E$

DATO UNO SPAZIO VETTORIALE NON VUOTO V , ESSO AMMETTE ALMENO UNA BASE. TEOREMA ESISTENZA BASE

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE È IL NUMERO DI VETTORI DI UNA SUA QUALUNQUE BASE.

ES. $\mathbb{R}^n \rightarrow$ HA DIMENSIONE (n) → TUTTE LE BASI SONO COMPOSTE DA n VETTORI

APPLICAZIONI LINEARI

SE A E B SONO DUE INSIEMI, UN' APPLICAZIONE DA A A B È UNA LEGGE CHE ASSOCIA CIASCUN ELEMENTO DI A UN ELEMENTO DI B.

$$f: A \rightarrow B$$

$$Im f = \{ b \in B : b = f(a) \}$$

IMMAGINE DI f

APPLICAZIONE È INIETTIVA SE $a \neq a' \rightarrow f(a) \neq f(a')$ $a, a' \in A$

APPLICAZIONE È SURRIETTIVA SE $Im f = B$

BIIETTIVA O BIUNIVOCA SE TUTTE E DUE.

APPLICAZIONE LINEARE È TALE CHE

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } u, v \in V$$

APPLICAZIONI LINEARI DA $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

DEFINISCO L'APPLICAZIONE:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ TALE CHE DATO } u \in \mathbb{R}^n:$$

$$f(u) = Au = v \rightarrow \text{OGNI APPLICAZIONE LINEARE DA } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ È RAPPRESENTABILE CON UNA MATRICE}$$

$$\begin{aligned} A \vec{z} &= \lambda \vec{z} \\ A \vec{z} &= \vec{c} \end{aligned}$$

APPLICAZIONI LINEARI DA $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \leftrightarrow$ ENDOMORFISMI

DATO SPAZIO VETTORIALE V DEFINISCO ENDOMORFISMO UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \rightarrow V$

FISSATA UNA BASE B DI V SI DIRÀ MATRICE ASSOCIATA A f RISPETTO B LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE LINEARE.

LA MATRICE ASSOCIATA DIPENDE DALLA SCELTA DELLA BASE.

es. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 7x - 13y + 6z \\ 2x - 8y + 6z \\ 2x - 13y + 11z \end{pmatrix} \rightarrow \text{MATRICE ASSOCIATA RISPETTO LA BASE CANONICA È:}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -13 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -13 & 11 \end{pmatrix}$$

SE CAMBIASSI BASE es. $B' (v_1, v_2, v_3) \rightarrow v_1 = (1, 1, 1) \quad v_2 = (13, 2, 0) \quad v_3 = (-3, 0, 1) \rightarrow$ INSERENDOLI UNA VOLTA IN *

OTTERREI $\rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ MATRICE ASSOCIATA DIAGONALE FACENDO SEMPLIF.

ENDOMORFISMO - CAMBIAMENTO DI BASE

③

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE E SIANO B E B' DUE BASI DI V .
OGNI VETTORE DI B' PUO' ESSERE ESPRESSO COME COMBINAZIONE LINEARE DELLA BASE B :

$$\begin{cases} v_1' = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n \\ v_2' = a_{21}v_1 + \dots + a_{2n}v_n \\ v_3' = \vdots \\ \vdots \\ v_n' = \vdots \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ a_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$B' = B M \Leftrightarrow B = B' M^{-1}$$

MATRICE DEL CAMBIAMENTO
MATRICE DI TRASFORMAZIONE
MATRICE DI PASSAGGIO

DA UNA BASE B A B'
È MATRICE INVERTIBILE

$$M = M^{-1}$$

MATRICI SIMILI

DATE DUE MATRICI QUADRATE A E A' SONO SIMILI SE ESISTE UNA MATRICE DI PASSAGGIO/CAMB./TRASF. M TALE CHE:

$$A' = M^{-1} A M$$

QUINDI SE A E A' SONO MATRICI ASSOCIATE AD UN ENDOMORFISMO f RISPETTO BASI DIVERSE B E B' DI $V \rightarrow$ ADORA TRAMITE M SONO SIMILI

ENDOMORFISMO - DIAGONALIZZABILE

UN ENDOMORFISMO DI UNO SPAZIO VETTORIALE V SI DICE DIAGONALIZZABILE SE PUO' ESSERE RAPPRESENTATO DA UNA MATRICE DIAGONALE OSSIA SE ESISTE UNA BASE DI V RISPETTO ALLA QUALE LA MATRICE ASSOCIATA È DIAGONALE.

QUINDI COME SI FA?

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

SI DICE AUTOVETTORE v ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE $\lambda \in \mathbb{R}$ SE:

$$f(v) = \lambda v$$

SI DICE AUTOVALORE λ DI f SE ESISTE v TALE CHE $f(v) = \lambda v$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{es. } f(x; y) = (x+y; x+y) \rightarrow \text{SIANO } v_1 = (1; -1) \text{ E } v_2 = (1; 1)$$

$$f(1; -1) = 0 v_1 \quad \text{E} \quad f(1; 1) = 2 v_2$$

QUINDI v_1 È AUTOVETTORE DI f ASSOCIATO A

v_2 " " " " " "

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

GLI AUTOVETTORI DI $V \in \mathbb{R}^3$ FORMANO UNA BASE DI V TALE CHE

A È MATRICE ASSOCIATA DIAGONALE

DA CUI I DUE VETTORI v_1, v_2 FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$ TALE CHE LA MATRICE ASSOCIATA È DIAGONALE FORMATA DAGLI AUTOVALORI: ④

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

QUINDI DATA BASE $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ FORMATA DA AUTOVETTORI DI $f \rightarrow \exists$ N AUTOVALORI NON NECESSARIAMENTE TUTTI DISTINTI T.C.:

MATRICE ASSOCIATA A f

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ È DIAGONALE}$$

QUINDI ENDOMORFISMO f È DIAGONALIZZABILE SE AMMETTE UNA BASE B FORMATA DA AUTOVETTORI DI f .

AUTOSPAZIO È SOTTOSPAZIO DI V ASSOCIATO AD λ LA CUI DIMENSIONE È DEFINITA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA:

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA È: $n - \text{RG}[A - \lambda I]$

DIM. GEO
^
DIM. ALG.

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA INDICA QUANTE VOLTE IL POLINOMIO CARATTERISTICO È ANNULLATO DALL'AUTOVALORE λ .

es. $(1-x)(1-\lambda) \rightarrow \lambda$ HA MOLTEPL. ALG. ②

$(1-x)(2-x) \rightarrow$ HO $\lambda_1 = 1$ E $\lambda_2 = 2$ CIASCUNO CON MOLTEPL. ALG. ①

DETERMINAZIONE AUTOVALORI - AUTOVETTORI

DATO f ENDOMORFISMO $f: V \rightarrow V$ E SIA A LA MATRICE ASSOCIATA ALL'ENDOMORFISMO, AORA λ È UN AUTOVALORE DI f SE E SOLO SE:

$$\text{DET}[A - \lambda I] = 0$$

FORNISCE IL POLINOMIO/EQUAZIONE CARATTERISTICA DI GRADO n (ESSENDO LA MATRICE $n \times n$) $\rightarrow$ TROVO GLI AUTOVALORI λ_k

MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO

A QUESTO PUNTO PER CALCOLARE GLI AUTOSPAZI

$$A \vec{z} = \lambda_k \vec{z} \rightarrow (A - \lambda_k I) \vec{z} = \vec{0}$$

CALCOLATI GLI AUTOVETTORI PER OGNI λ_k , UNIAMO GLI AUTOVETTORI PER FORMARE UNA BASE B' TALE CHE LA MATRICE ASSOCIATA AD f SARA' DIAGONALE.

LA MATRICE T È PROPRIO COMPOSTA DAGLI AUTOVETTORI

$\rightarrow$ MATRICE DI PASSAGGIO

5) I VETTORI $\vec{v}$ E $\vec{u}$ SI DICONO ORTOGONALI SE:
 $\vec{v} \perp \vec{u} \iff \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

LA NORMA DI UN VETTORE È:

$$\vec{v} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

IN $\mathbb{R}^3$ DOVE v_1, v_2, v_3 SONO LE COMPONENTI RISPETTO LA BASE DI V

ORTOGONALITÀ E ORTONORMALITÀ

SE N VETTORI SONO A 2 A 2 ORTOGONALI $\iff$ FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^N$

SE N VETTORI SONO A 2 A 2 ORTOGONALI E HANNO NORMA UNITARIA
ALLORA FORMANO UNA BASE ORTONORMALE

POICHÉ T MATRICE DI PASSAGGIO È FORMATA DA AUTOVETTORI
QUALI SONO ORTOGONALI TRA LORO $\rightarrow$ FORMA UNA BASE ORTOGONALE.
SE NORMALIZZATI $\rightarrow$ È BASE ORTONORMALE $\rightarrow$ QUINDI È IN ENTRAMBI
I CASI UNA MATRICE ORTOGONALE

$$M^{-1} = M^T$$

$$\rightarrow MM^T = I$$

ENDOMORFISMI - SIMMETRICI

SI DICE f , DI $\mathbb{R}^n$, UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO QUANDO LA MATRICE
ASSOCIATA È SIMMETRICA $A^T = A$

SE f QUINDI A È SIMMETRICA $\rightarrow$ GLI AUTOVETTORI SONO ORTOGONALI
NON È DETTO IL CONTRARIO

TEOREMA SPETTRALE

SE f È UN ENDOMORFISMO SIMMETRICO QUINDI LA MATRICE ASSOCIATA È
SIMMETRICA ALLORA f (QUINDI A) È DIAGONALIZZABILE.
INOLTRE ESISTE UNA BASE ORTONORMALE COSTITUITA DAGLI
AUTOVETTORI DI f .

SE ESISTE BASE ORTONORMALE $\rightarrow f$ È SIMMETRICA

$$B = T^{-1}AT \rightarrow B = T^TAT$$

DOVE T È ORTOGONALE
MENTRE A È SIMMETRICA

PROCEDIMENTO DIAGONALIZZAZIONE

SE A È MATRICE QUADRATA $n \times n$, SI DIRÀ CHE $\vec{z}^{(k)}$ È AUTOVETTORE ASSOCIATO A λ_k SE:

$$A \vec{z}^{(k)} = \lambda_k \vec{z}^{(k)}$$

POICHÉ PARLANO DI VETTORI IN PRECISE BASI, SI USA IL VETTORE ALGEBRICO:

$$\underline{A} \underline{z}^{(k)} = \lambda_k \underline{z}^{(k)}$$

QUINDI PER ARRIVARE A QUESTA DEFINIZIONE:

1 TROVO GLI AUTOVALORI:

$$\text{DET}[A - \lambda I] = 0 \rightarrow \lambda_k \quad k=1, \dots, n$$

2 TROVO GLI AUTOVETTORI ASSOCIATI A IL PROPRIO AUTOVALORE λ_k :

$$\underline{A} \underline{z}^{(k)} = \lambda_k \underline{z}^{(k)} \rightarrow (\underline{A} - \lambda_k \underline{I}) \underline{z}^{(k)} = \underline{0}$$

3 DEFINISCO T LA MATRICE DI PASSAGGIO (O CAMBIAMENTO DI TRASFORMAZIONE) COMPOSTA DAGLI AUTOVETTORI COLONNA.

4 SEGUE CHE LA MATRICE $\underline{A}$ È SIMILE ALLA MATRICE $\underline{B}$:

$$\underline{B} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \Leftrightarrow \underline{B} = \underline{T}^T \underline{A} \underline{T}$$

ESSENDO $\underline{T}^T = \underline{T}^{-1}$
IN QUANTO
ORTOGONALE

$\underline{B}$ SARA' FORMATA DAGLI AUTOVALORI λ_k ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$)
È LA MATRICE TRASFORMATTA

$A^{-1} \rightarrow \bar{E} \text{ INV.} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\text{DET } A} A^*$ DOVE A^* È
MATRICE AGGIUNTA
COMPOSTA DAI
COMPONENTI ALGEBRAICI
DI A .

MATRICE DEL CAMBIAMENTO

$$\underline{v}' = \underline{T} \underline{v}$$

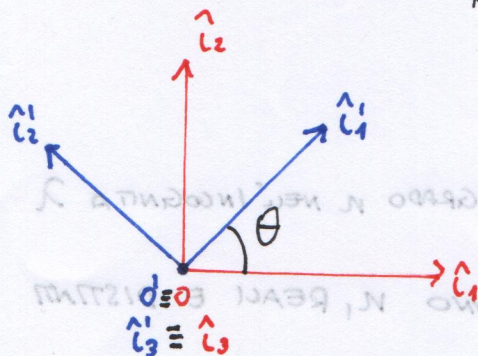
$$\underline{v} = \sum_k v_k \hat{c}_k$$

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

HO SEMPLICEMENTE
DEFINITO $\underline{v}$ NEI
DUE SISTEMI DI
RIFERIMENTO

$$\underline{v} = \sum_k v'_k \hat{c}'_k$$

$$\underline{v}' = \begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}$$



$\underline{v} = \sum_k (\underline{v} \cdot \hat{c}_k) \hat{c}_k$ * HO RISPRESO $\underline{v}$ NEI DUE SDR MA AL POSTO

$$\underline{v} = \sum_k (\underline{v} \cdot \hat{c}'_k) \hat{c}'_k$$

LA COMPONENTE

$$v_k = \underline{v} \cdot \hat{c}_k \quad \text{E} \quad v'_k = \underline{v} \cdot \hat{c}'_k$$

RIPRENDENDO * POSSO RISCRIVERLO DIFFERENTEMENTE:

$$\underline{v} = \sum_k (\underline{v} \cdot \hat{c}_k) \hat{c}_k = \sum_k (v_k) \hat{c}_k \Rightarrow \text{CAMBIO INDICE PER SEMPLICITA} \quad \sum_{j=1}^3 v_j \hat{c}_j$$

SE ORA VOGLIO ESPRIMERE LE COMPONENTI v'_k QUINDI RELATIVE AL SDR':

$$v'_k = \underline{v} \cdot \hat{c}'_k \xrightarrow{\text{SOSTITUENDO}} v'_k = \sum_{j=1}^3 (v_j \hat{c}_j) \cdot \hat{c}'_k$$

SE ADESSO VOGLIO RICALCOLARE $\underline{v}'$:

$$\underline{v}' = \sum_{k=1}^3 v'_k \hat{c}'_k \xrightarrow{\text{SOSTITUENDO}} \underline{v}' = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 (v_j \hat{c}_j) \cdot \hat{c}'_k$$

INFATTI SVILUPPANDO

$$v'_1 = v_1 \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_1 + v_2 \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_1 + v_3 \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_1$$

$$v'_2 = v_1 \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_2 + v_2 \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_2 + v_3 \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_2$$

$$v'_3 = v_1 \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_3 + v_2 \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_3 + v_3 \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_3$$



$$\begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_1 & \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_1 & \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_1 \\ \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_2 & \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_2 & \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_2 \\ \hat{c}_1 \cdot \hat{c}'_3 & \hat{c}_2 \cdot \hat{c}'_3 & \hat{c}_3 \cdot \hat{c}'_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{DOVE } T_{ij} = \hat{c}_i \cdot \hat{c}'_j$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE

QUINDI È MATRICE DI CAMBIO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

APPLICANDOLA AL CASO PRECEDENTE SI OTTIENE:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{z}} = \lambda \underline{\underline{z}} \quad \text{A HA DEGLI AUTOVETTORI?}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{z}} = 0 \quad \exists \text{ SSE } \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \quad \text{EQ. DI GRADO N NEW INCOGNITA } \lambda$$

EQ. CARATTERISTICA

SE LA MATRICE A È SIMMETRICA → GLI AUTOVALORI SARANNO λ_i REALI E DISTINTI

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{z}}_k = 0$$

es.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \rightarrow \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

ossia

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow \begin{array}{c|cc} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow (\lambda-1)(\lambda+3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

A QUESTO PUNTO SOSTITUISCO λ_1 E λ_2 (NEI RISPETTIVI CASI) IN

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_k \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{z}}_k = 0$$

DA CUI

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1^{(1)} = z_2^{(1)} \\ -z_1^{(1)} = -z_2^{(1)} \end{cases} \rightarrow \text{SE } z_1^{(1)} = 1 \rightarrow z_2^{(1)} = 1$$

e una

$$\underline{\underline{z}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1^{(2)} \\ z_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1^{(2)} = -z_2^{(2)} \\ z_1^{(2)} = -z_2^{(2)} \end{cases} \rightarrow \text{SE } z_1^{(2)} = 1 \rightarrow z_2^{(2)} = -1$$

e quindi

$$\underline{\underline{z}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

QUINDI

$$T = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{z}}_1 \\ \underline{\underline{z}}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \quad \text{QUINDI}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

OPERATORE LINEARE 2

APPLICATO AD UNA FUNZIONE:

$$\mathcal{L}u(t) = f(t)$$

PROPRIETÀ:

- 1) $\mathcal{L}[\alpha u(t)] = \alpha \mathcal{L}[u(t)]$
- 2) $\mathcal{L}[u(t) + w(t)] = \mathcal{L}u(t) + \mathcal{L}w(t)$
- 3) $\mathcal{L}[\alpha u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[u_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[u_2(t)]$

EQ. DIFF. È:

- ORDINARIA: DIPENDE DA UNA SOLA VARIAB.
- LINEARE: LA FUNZIONE E LE SUE DERIVATE COMPARTONO CON ESPONENTE UNITARIO
- A COEFF. COSTANTI: NON DIPENDONO DALLA VARIABILE
- OMOGENEA O NON: $f(t) = 0 \neq \emptyset$

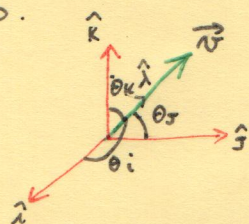
UN GENERICO MOMENTO:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{v}$$

È NULLO SE:

- 1) $O \equiv P \rightarrow \vec{OP} = \vec{0}$
- 2) $\vec{v} = \vec{0}$
- 3) SE $\vec{OP} \parallel \vec{v}$

COSENO DIRETTORE È IL COSENO DELL'ANGOLO CHE SI GENERA TRA GENERICO VETTORE DI POSIZIONE E L'ASSE A CUI ASSOCIAMO QUEL COSENO.



DA CIÒ SEGUE CHE IL VETTORE UNITÀ ASSOCIATO A $\vec{r}$ (DEGNATO $\hat{r}$) È:

$$\hat{r} = \cos\theta_i \hat{i} + \cos\theta_j \hat{j} + \cos\theta_k \hat{k}$$

ovvero $\cos^2\theta_i + \cos^2\theta_j + \cos^2\theta_k = 1$

DIMOSTRAZIONE ORTOGONALITÀ

DEFINITA A MATRICE SIMMETRICA AVREMO CHE PER DEFINIZIONE, DATI 2 AUTOVETTORI $\underline{z}^{(1)}$ E $\underline{z}^{(2)}$ DI CUI SO ESSELE ORTOGONALI, NE DIMOSTRO LA ORTOGONALITÀ.

LA MATRICE SIMMETRICA È TALE DA AVERE AUTOVALORI DISTINTI DA CUI AUTOVETTORI DISTINTI. SCRIVO QUINDI:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \underline{A} \underline{z}^{(1)} &= \lambda_1 \underline{z}^{(1)} \\ \textcircled{2} \underline{A} \underline{z}^{(2)} &= \lambda_2 \underline{z}^{(2)} \rightarrow \underline{A}^T \underline{z}^{(2)T} = \lambda_2 \underline{z}^{(2)T} \end{aligned}$$

FACCO LA TRASPOSTA

A QUESTO PUNTO MOLTIPLICO IL $\textcircled{1}$ PER $\underline{z}^{(2)T}$ E IL $\textcircled{2}$ PER $\underline{z}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \underline{z}^{(2)T} \underline{A} \underline{z}^{(1)} &= \lambda_1 \underline{z}^{(1)T} \underline{z}^{(2)} \\ \underline{z}^{(1)T} \underline{A} \underline{z}^{(2)} &= \lambda_2 \underline{z}^{(2)T} \underline{z}^{(1)} \end{aligned}$$

NE FACCO LA SOTTRAZ.

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{z}^{(1)T} \underline{z}^{(2)}$$

PER DEFINIZIONE $\lambda_1 \neq \lambda_2$
QUINDI $\underline{z}^{(1)} \perp \underline{z}^{(2)}$

A COSA SERVE L'ASSE CENTRALE?

POICHÉ IN MECCANICA I VETTORI APPLICATI QUINDI ANCHE I VETTORI RISULTANTI SONO FORZE (ANCHE I MOMENTI SARANNO MOMENTI DI FORZE), SI CERCANO CONDIZIONI PER LE QUALI SI RENDONO MINIME LE SOLLECITAZIONI A CUI LE STRUTTURE DI SOSTEGNO VENGONO SOTTOPOSTE.

IN UN SISTEMA DI VETTORI APPLICATI SI CONOSCE LA RISULTANTE MENTRE IL MOMENTO È VARIABILE IN DIPENDENZA DEL POLO SCELTO. SI CERCANO QUINDI DEI PUNTI CHE PRESI COME POLI RENDONO MINIMO IL MODULO DEL MOMENTO $\rightarrow$ SI CERCA QUINDI L'ASSE CENTRALE

RISOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} -\Omega^2 C + 2\omega^2 \Omega D + \omega^2 C = F/m \\ -\Omega^2 D - 2\omega^2 \Omega C + \omega^2 D = 0 \end{cases}$$

RAGGRUPPO C E D:

$$\begin{cases} C(\omega^2 - \Omega^2) + 2\omega^2 \Omega D = F/m \\ D(\omega^2 - \Omega^2) - 2\omega^2 \Omega C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(\omega^2 - \Omega^2) + 2\omega^2 \Omega D = F/m \\ C = \frac{D(\omega^2 - \Omega^2)}{2\omega^2 \Omega} \end{cases}$$

SOSTITUENDO C SOPRA

$$\frac{D(\omega^2 - \Omega^2)}{2\omega^2 \Omega} (\omega^2 - \Omega^2) + 2\omega^2 \Omega D = \frac{F}{m} \quad (1)$$

$$C = \dots$$

Sviluppo ora solo la (1):

RAGGRUPPO D:

$$D \left[\frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2}{2\omega^2 \Omega} + 2\omega^2 \Omega \right] = \frac{F}{m}$$

$$D \left[\frac{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^4 \Omega^2}{2\omega^2 \Omega} \right] = \frac{F}{m}$$

QUINDI

$$D = \frac{2 \frac{F}{m} \omega^2 \Omega}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^4 \Omega^2]}$$

SOSTITUENDO NELLA RIMANENTE EQ.

$$C = \frac{2 \frac{F}{m} \omega^2 \Omega}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega^4 \Omega^2]} \cdot \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{2\omega^2 \Omega}$$

OTTENGO I RISULTATI VOLUTI

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{k=1}^3 v_k u_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^3 v_k \hat{u}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 u_j \hat{u}_j \right) =$$

$$\begin{aligned} & (v_1 \hat{u}_1 + v_2 \hat{u}_2 + v_3 \hat{u}_3) \cdot (u_1 \hat{u}_1 + u_2 \hat{u}_2 + u_3 \hat{u}_3) = \\ & v_1 \hat{u}_1 \cdot u_1 \hat{u}_1 + v_1 \hat{u}_1 \cdot u_2 \hat{u}_2 + v_1 \hat{u}_1 \cdot u_3 \hat{u}_3 + v_2 \hat{u}_2 \cdot u_1 \hat{u}_1 + \\ & v_2 \hat{u}_2 \cdot u_2 \hat{u}_2 + v_2 \hat{u}_2 \cdot u_3 \hat{u}_3 + v_3 \hat{u}_3 \cdot u_1 \hat{u}_1 + v_3 \hat{u}_3 \cdot u_2 \hat{u}_2 + \\ & v_3 \hat{u}_3 \cdot u_3 \hat{u}_3 \end{aligned}$$

$v_3 \hat{u}_3 \cdot u_3 \hat{u}_3 \rightarrow$ SI ANNULLANO TUTTI I PRODOTTI SCALARI DEL TIPO $\hat{u}_k \cdot \hat{u}_j$ DOVE $k \neq j$ POICHE $\cos 90^\circ$ DELL'ANGOLO TRA I VERSORI È 0 QUINDI

$$\sum_{k=1}^3 v_k u_k = \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

COMMUTATIVA

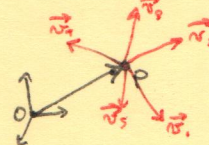
TEOREMA DI VARIGNON

IL TEOREMA DI VARIGNON AFFERMA CHE, DATI N VETTORI APPLICATI IN UNO STESSO PUNTO P, ALLORA:

$$\vec{M}_O = \sum_k \vec{OP}_k \times \vec{v}_k \quad \text{MA}$$

$\vec{OP}_k$ NON DIPENDE DALLA SOMMATORIA, QUINDI:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \sum_k \vec{v}_k = \vec{OP} \times \vec{v}$$



SVOLGIMENTO DERIVATA

$$\frac{d\hat{A}}{d\phi} = \frac{-\frac{1}{2}[(1-\phi^2)^2 + 4\beta^2\phi^2]}{(1-\phi^2)^2 + 4\beta^2\phi^2} \cdot [2(1-\phi^2)(-2\phi) + 8\beta^2\phi] = 0$$

QUINDI

$$\frac{-\frac{1}{2}[2(1-\phi^2)(-2\phi) + 8\beta^2\phi]}{[(1-\phi^2)^2 + 4\beta^2\phi^2]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

AFFINCHÉ LA FRAZIONE SI ANNULLI,
BASTA ANNULARE IL NUMERATORE

$$-[(1-\phi^2)(-2\phi) + 4\beta^2\phi] = 0$$

$$-[-2\phi + 2\phi^3 + 4\beta^2\phi] = 0$$

$$-2\phi[\phi^2 + 2\beta^2 - 1] = 0$$

↳ $\phi = 0 \rightarrow$ SOL. BANALE
DA CUI $\hat{A} = 1$

$$\phi \neq 0 \rightarrow \phi^2 + 2\beta^2 - 1 = 0$$

$$\phi^2 = 1 - 2\beta^2$$

$$\phi_H = \sqrt{1 - 2\beta^2}$$

③ CASO 3° IN CUI $\alpha_1 = 0$ MA

$$(-\frac{b}{a} = 0)$$

QUINDI:

$$\gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma_{1/2} = 0 \rightarrow \text{MOLT. AG. 2}$$

QUINDI

$$u(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$

$$u(t) = C_1 + C_2 t$$

$$\text{APPLICANDO LE C.I.} \rightarrow u(0) = u_0$$

$$\text{E } \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \text{ AUTOM.}$$

$$u(0) = C_1 = u_0$$

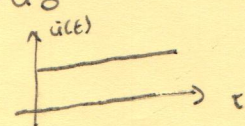
$$\dot{u}(0) = C_2 = \dot{u}_0$$

DA CUI

$$u(t) = \dot{u}_0 t + u_0$$



NON PASSA x FORZA
PER L'ORIGINE
(E' IL CASO $u_0 = 0$)



CIO' SI VERIFICA PER I CORPI SUI QUALI
NON AGISCE ALCUNA FORZA E CHE QUINDI
PERMANGONO INDEFINITIVAMENTE IN QUIETE