

Meccanica Razionale

Università Degli Studi Di Roma 3

Docente: **Umberto Lemma**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



NOTESTOBOOK
ELEVATE YOUR NOTES

notestobook.it

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1	Cinematica e dinamica del punto materiale	6
2	Punto materiale soggetto a forza di natura inerziale	6
2.1	Metodo 1: integrazione diretta	6
2.2	Metodo 2: soluzione dell'equazione differenziale tramite omogenea e particolare	7
3	Cinematica del punto materiale — Legge oraria	8
3.1	Vettore posizione e traiettoria	8
3.2	Vettore spostamento, velocità e accelerazione	9
3.3	Versore tangente	9
3.4	Versore normale e curvatura	10
3.5	Curvatura di una curva piana	11
3.6	Terna intrinseca della traiettoria	13
4	Caratteristiche locali del moto	13
4.1	Vettore velocità in coordinate intrinseche	14
4.2	Vettore accelerazione in coordinate intrinseche	14
5	Pendolo semplice — Oscillatore non forzato	15
6	Dinamica del pendolo semplice	16
6.1	Vettore posizione e ascissa curvilinea	16
6.2	Gradi di libertà e vincoli	17
6.3	Bilancio delle forze e proiezione cartesiana	17
6.4	Proiezione sulla terna intrinseca	18
6.5	Linearizzazione dell'equazione del moto	19
6.6	Soluzione dell'equazione linearizzata	20
6.7	Determinazione della reazione vincolare	20
6.8	Pendolo semplice inclinato	20
7	Vincoli scabri	21
8	Conservatività, potenzialità e irrotazionalità	23
8.1	Campo vettoriale conservativo	23
8.2	Potenzialità	25

8.3	Irrotazionalità	25
8.4	Legami tra le definizioni	25
9	Dalla conservatività alla potenzialità	26
9.1	Il teorema di Stokes e il contesto geometrico	26
9.2	Funzione scalare di punto e indipendenza dal percorso	26
9.3	Dimostrazione: conservatività implica potenzialità	26
10	Forze conservative, traiettorie e concetti di equilibrio	27
10.1	Proiezione della forza lungo una direzione	28
10.2	Derivata direzionale e proiezione lungo la traiettoria	28
10.3	Relazioni tra conservatività, potenzialità e irrotazionalità	29
10.4	Esempio: verifica di irrotazionalità	30
10.5	Ruolo della derivata del potenziale nell'equilibrio	30
11	Bilancio energetico: lavoro ed energia	31
11.1	Teorema dell'energia cinetica	31
11.2	Concetto di lavoro	31
11.3	Lavoro di forze conservative e funzione potenziale	32
11.4	Decomposizione della forza e bilancio energetico completo	32
11.5	Energia potenziale	32
11.6	Teorema di conservazione dell'energia meccanica	33
12	Equilibrio e stabilità	33
12.1	Condizione di equilibrio	33
12.2	Classificazione della stabilità	33
12.3	Applicazione: il loop	34
13	Equilibrio e studio della stabilità per un punto materiale con un grado di libertà	36
14	Stabilità dell'equilibrio di un punto materiale su traiettoria assegnata	36
14.1	Condizioni di equilibrio e sollecitazione	36
14.2	Equazione del moto linearizzata	37
14.3	Equazione caratteristica e parametri G e K	37
14.4	Classificazione dei casi	38
14.5	Metodi energetici per lo studio della stabilità: forze conservative	43
15	Metodo energetico per la stabilità dell'equilibrio	43
15.1	Forza e derivata dell'energia potenziale lungo la traiettoria	43
15.2	Condizioni di equilibrio	43
15.3	Studio della stabilità: linearizzazione	44
15.4	Classificazione dell'equilibrio	44
15.5	Sintesi del criterio energetico	45

15.6	Estensione a più gradi di libertà	46
16	Approssimazione lineare di funzioni scalari e vettoriali	46
16.1	Funzione reale a n variabili reali	46
16.2	Funzione vettoriale a n variabili	46
16.3	Linearizzazione dell'equazione del moto vettoriale	47
17	Moti particolari	47
17.1	Moto rettilineo	47
17.2	Moto piano	48
17.3	Moto centrale	48
17.4	Moto circolare	48
17.5	Moto armonico	48
18	Esempi di forze conservative	49
18.1	Forza peso e campo di forza uniforme	49
18.2	Campi di forza centrali	49
19	Energia potenziale nei campi di forze centrali	50
19.1	Proprietà del moto in un campo di forze centrali	51
19.2	Coordinate polari	51
20	Campo di forza peso — Applicazione semplice	51
20.1	Risoluzione dell'equazione differenziale	52
20.2	Proiezione sugli assi del sistema di riferimento	53
20.3	Proiezione della velocità	53
20.4	Applicazione — Massa vincolata a una superficie	53
21	Campo di forza peso con massa-molla — Applicazione	55
21.1	Modello della molla ideale	55
21.2	Equazione del moto nel primo sistema di riferimento	55
21.3	Equazione del moto nel secondo sistema di riferimento	56
21.4	Soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico	56
21.5	Analisi delle componenti residue	57
22	Esempio di cinematica del punto materiale	57
23	Gradi di libertà	58
23.1	Vincoli ideali	59

1 Cinematica e dinamica del punto materiale

2 Punto materiale soggetto a forza di natura inerziale

Lo studio della meccanica del punto materiale prende avvio dall'analisi del caso più elementare: un punto soggetto ad una forza proporzionale alla propria massa attraverso un vettore accelerazione costante nel tempo e uniforme nello spazio. Comprendere a fondo questo problema significa padroneggiare il moto uniformemente accelerato in tutta la sua generalità vettoriale, fondamento su cui si costruisce l'intera cinematica.

Per **forza di natura inerziale** si intende una forza della forma $m\vec{a}$, dove m è la massa del punto materiale e \vec{a} è un vettore accelerazione costante (non varia nel tempo) e uniforme (non varia nello spazio). L'equazione del moto associata a tale fenomeno è

$$m\vec{a} = m\vec{\alpha}, \quad (1)$$

da cui, semplificando la massa,

$$\vec{a} = \vec{\alpha}. \quad (2)$$

L'equazione (1) è un'equazione differenziale vettoriale, ordinaria, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. La sua risoluzione può essere condotta con due metodi distinti, entrambi istruttivi.

2.1 Metodo 1: integrazione diretta

Si sceglie un sistema di riferimento cartesiano $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$.

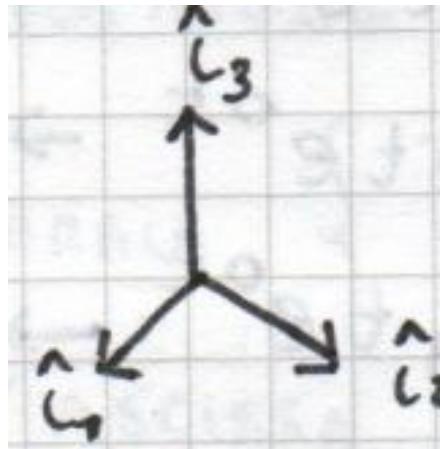


Figura 1: Sistema di riferimento cartesiano con i tre versori ortonormali $\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$.

L'equazione vettoriale (2) si decompone in tre equazioni scalari indipendenti:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \alpha_1 \\ \ddot{x}_2 = \alpha_2 \\ \ddot{x}_3 = \alpha_3 \end{cases} \quad (3)$$

Consideriamo la prima componente. Integrando nel tempo tra t_0 e t :

$$\int_{t_0}^t \ddot{x}_1(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \alpha_1 d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t_0) = \alpha_1 (t - t_0). \quad (4)$$

Integrando una seconda volta:

$$\int_{t_0}^t [\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_1(t_0)] d\tau = \int_{t_0}^t \alpha_1 (\tau - t_0) d\tau, \quad (5)$$

da cui

$$x_1(t) - x_1(t_0) - \dot{x}_1(t_0) (t - t_0) = \frac{\alpha_1}{2} (t - t_0)^2.$$

Imponendo $t_0 = 0$ si ottiene la forma compatta

$$x_1(t) = x_1(0) + \dot{x}_1(0) t + \frac{1}{2} \alpha_1 t^2. \quad (6)$$

Ripetendo il medesimo procedimento per le componenti x_2 e x_3 si perviene al sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) + \dot{x}_1(0) t + \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \\ x_2(t) = x_2(0) + \dot{x}_2(0) t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \\ x_3(t) = x_3(0) + \dot{x}_3(0) t + \frac{1}{2} \alpha_3 t^2 \end{cases} \quad (7)$$

che, ricomposto in forma vettoriale, fornisce la **legge del moto del punto materiale libero nello spazio**:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \dot{\vec{x}}(0) t + \frac{1}{2} \vec{\alpha} t^2. \quad (8)$$

Interpretazione fisica. L'equazione (8) mostra che il moto sotto accelerazione costante è completamente determinato una volta assegnate la posizione iniziale $\vec{x}(0)$ e la velocità iniziale $\dot{\vec{x}}(0)$. Il termine quadratico in t è responsabile della curvatura della traiettoria: in assenza di esso ($\vec{\alpha} = \vec{0}$) il moto sarebbe rettilineo uniforme. Nelle applicazioni più comuni si pone $\vec{\alpha} = \vec{g}$, dove \vec{g} è l'accelerazione di gravità¹.

2.2 Metodo 2: soluzione dell'equazione differenziale tramite omogenea e particolare

Si considera l'equazione omogenea associata a (2):

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{0}. \quad (9)$$

In componenti scalari ciascuna equazione $\ddot{x}_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$) ammette l'equazione caratteristica $\gamma^2 = 0$, le cui radici sono $\gamma_{1,2} = 0$, reali e coincidenti (molteplicità $\mu = 2$). La soluzione generale dell'omogenea per ciascuna componente è pertanto

$$x_{GO_k}(t) = a_k e^{0 \cdot t} + b_k t e^{0 \cdot t} = a_k + b_k t, \quad k = 1, 2, 3,$$

che in forma vettoriale diviene

$$\vec{x}_{GO}(t) = \vec{a} + \vec{b} t, \quad (10)$$

dove $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sono vettori costanti arbitrari.

Per la **soluzione particolare** si cerca una funzione della forma

$$\vec{x}_{PN}(t) = t^\mu e^{\beta t} [\vec{A}(t) \cos(\delta t) + \vec{B}(t) \sin(\delta t)]. \quad (11)$$

¹Nella realtà il vettore \vec{g} non è rigorosamente costante né uniforme, poiché dipende dalla posizione sulla superficie terrestre e dalla quota. Tuttavia, per moti che si sviluppano su scale spaziali piccole rispetto al raggio terrestre, l'approssimazione $\vec{g} = \text{cost.}$ è eccellente.

Poiché il termine non omogeneo è il vettore costante $\vec{\alpha}$, si ha $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\vec{A}(t) = \vec{A} = \text{cost.}$, $\vec{B} = \vec{0}$. Inoltre, essendo $\gamma = 0$ radice dell'equazione caratteristica con molteplicità $\mu = 2$, la soluzione particolare assume la forma

$$\vec{x}_{PN}(t) = t^2 \vec{A}.$$

Derivando:

$$\dot{\vec{x}}_{PN}(t) = 2t \vec{A}, \quad \ddot{\vec{x}}_{PN}(t) = 2\vec{A}.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale $\ddot{\vec{x}} = \vec{\alpha}$ si ottiene

$$2\vec{A} = \vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\vec{\alpha}}{2}. \quad (12)$$

La soluzione generale è dunque

$$\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \frac{1}{2} \vec{\alpha} t^2, \quad (13)$$

che, imponendo le condizioni iniziali $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ e $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$, restituisce

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{\alpha} t^2, \quad (14)$$

in perfetto accordo con il risultato (8) ottenuto per integrazione diretta.

3 Cinematica del punto materiale — Legge oraria

La descrizione cinematica di un punto materiale richiede la definizione precisa di alcune grandezze fondamentali: il vettore posizione, la traiettoria, l'ascissa curvilinea e le grandezze da esse derivate (velocità, accelerazione). In questa sezione si introducono tali concetti e si costruisce progressivamente la *terna intrinseca* della traiettoria.

3.1 Vettore posizione e traiettoria

Fissato un sistema di riferimento $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$, il **vettore posizione** $\vec{r}(t) = \vec{OP}(t)$ individua, istante per istante, la posizione P del punto materiale. La **traiettoria** è l'insieme dei luoghi dei punti occupati dal punto materiale durante l'intervallo di osservazione. Ad essa si può associare un'origine Ω e un'ascissa curvilinea s .

La posizione del punto materiale al variare del tempo può essere espressa attraverso la dipendenza parametrica dall'ascissa curvilinea:

$$\vec{r}(s(t)) = \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad (15)$$

dove $s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco di curva misurata a partire dall'origine Ω della traiettoria.

Per **ascissa curvilinea** (o **legge oraria**) si intende la funzione scalare $s(t)$ che fornisce la posizione del punto lungo la traiettoria in funzione del tempo. Si distingue dall'**equazione del moto** $\vec{r}(t)$, che è invece una funzione vettoriale e definisce, istante per istante, la posizione del vettore posizione nello spazio:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (16)$$

3.2 Vettore spostamento, velocità e accelerazione

Il **vettore spostamento** $\Delta\vec{r}$ è definito come la differenza tra due posizioni consecutive:

$$\Delta\vec{r} = \vec{OP}' - \vec{OP} = \vec{PP}' . \quad (17)$$

La **velocità media** (o globale) è il rapporto

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{OP}' - \vec{OP}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \quad (18)$$

La **velocità istantanea** si ottiene nel limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} . \quad (19)$$

Geometricamente, al tendere di Δt a zero il punto P' tende a P e la secante PP' tende alla tangente alla traiettoria in P : il vettore velocità è dunque sempre tangente alla traiettoria.

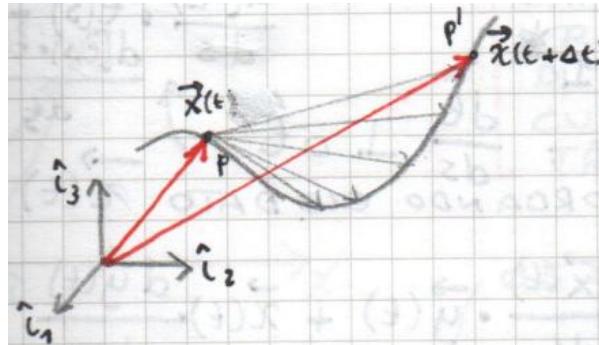


Figura 2: Costruzione geometrica della velocità istantanea: al tendere di P' a P la secante PP' diviene tangente alla traiettoria. Sono indicati i vettori $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t + \Delta t)$.

L'**accelerazione istantanea** è definita in modo analogo:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} . \quad (20)$$

3.3 Versore tangente

Si definisce **versore tangente** il vettore unitario ottenuto derivando il vettore posizione rispetto all'ascissa curvilinea:

$$\hat{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} . \quad (21)$$

Il versore \hat{t} è tangente alla traiettoria nel punto individuato da $s(t)$. Per verificare che il suo modulo sia effettivamente unitario, si osserva che

$$\|\hat{t}\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{|\Delta s|} = 1 , \quad (22)$$

poiché, per definizione di ascissa curvilinea, quando $\Delta s \rightarrow 0$ la lunghezza della corda $\|\Delta\vec{r}\|$ coincide con la lunghezza dell'arco $|\Delta s|^2$.

²Il valore assoluto $|\Delta s|$ tiene conto del fatto che l'ascissa curvilinea potrebbe essere percorsa nel verso delle s decrescenti.

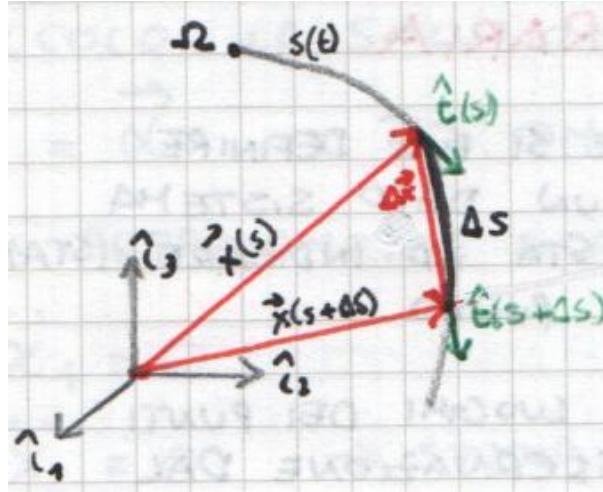


Figura 3: Costruzione del versore tangente $\hat{t}(s)$ a partire dal rapporto incrementale del vettore posizione rispetto all'ascissa curvilinea.

3.4 Versore normale e curvatura

Un secondo versore fondamentale si ottiene derivando \hat{t} rispetto all'ascissa curvilinea:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}. \quad (23)$$

Sviluppando il limite si ha

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}. \quad (24)$$

La derivata seconda del vettore posizione rispetto a s può essere interpretata anche come

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + 2\Delta s) - 2\vec{r}(s + \Delta s) + \vec{r}(s)}{\Delta s^2}. \quad (25)$$

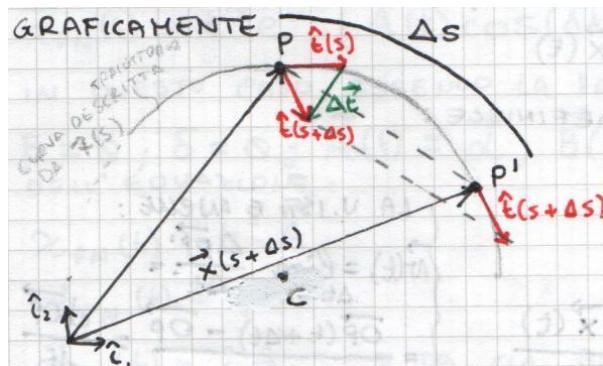


Figura 4: I tre punti $\vec{r}(s)$, $\vec{r}(s + \Delta s)$, $\vec{r}(s + 2\Delta s)$ definiscono, al limite $\Delta s \rightarrow 0$, il piano osculatore e il cerchio osculatore di centro C e raggio R . Il versore \hat{n} è orientato da P verso il centro di curvatura C .

I tre punti $\vec{r}(s)$, $\vec{r}(s + \Delta s)$ e $\vec{r}(s + 2\Delta s)$, al limite $\Delta s \rightarrow 0$, definiscono il **piano osculatore** e il **cerchio osculatore**, il quale ha centro nel *centro di curvatura* C della curva in P e raggio R detto *raggio di curvatura*. Il versore orientato da P al centro di curvatura è il **versore normale** \hat{n} . Per $\Delta s \rightarrow 0$ il vettore $\Delta \hat{t}$ tende ad allinearsi con la retta congiungente P e il centro di curvatura.

Dimostrazione dell'ortogonalità tra \hat{t} e $d\hat{t}/ds$. Poiché \hat{t} è un versore, vale identicamente

$$\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s) = 1. \quad (26)$$

Derivando rispetto a s e applicando la regola di derivazione del prodotto scalare³:

$$\frac{d}{ds} [\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s)] = 2 \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \cdot \hat{t}(s) = \frac{d(1)}{ds} = 0. \quad (27)$$

Essendo il prodotto scalare nullo e, nel caso di traiettoria non rettilinea, $d\hat{t}/ds \neq \vec{0}$, si conclude che

$$\hat{t}(s) \perp \frac{d\hat{t}(s)}{ds}. \quad (28)$$

Si esclude il caso di traiettoria rettilinea, per il quale $d\hat{t}/ds = \vec{0}$ e il versore normale non è definito.

Relazione con il raggio di curvatura. Si definisce il versore \hat{n} attraverso la relazione

$$\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \left\| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right\| \hat{n}. \quad (29)$$

Ricordando che l'arco di curva e l'angolo sotteso sono legati da $ds = R d\theta$, si ha

$$\left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\hat{t}}{R d\theta} \right\| = \frac{1}{R} \left\| \frac{d\hat{t}}{d\theta} \right\|. \quad (30)$$

Nel limite $\Delta s \rightarrow 0$ si ottiene $\|d\hat{t}\| \approx d\theta$, ossia $\|d\hat{t}/d\theta\| \rightarrow 1^4$, e pertanto il risultato fondamentale è

$$\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}. \quad (31)$$

Interpretazione fisica. L'equazione (31), nota come *prima formula di Frenet–Serret*, stabilisce che il modulo di $d\hat{t}/ds$ è inversamente proporzionale al raggio di curvatura R : curve molto "strette" (piccolo R) producono variazioni rapide della direzione tangente. La direzione di $d\hat{t}/ds$ coincide con quella del versore normale \hat{n} , il cui verso punta sempre dal punto P verso il centro di curvatura C .

3.5 Curvatura di una curva piana

Nel caso bidimensionale, una curva è descritta da $y = f(x)$ in un sistema di riferimento $R(O, \hat{i}, \hat{j})$. Il vettore posizione è

$$\vec{r} = x \hat{i} + f(x) \hat{j}. \quad (32)$$

L'elemento di arco ds si ottiene dal teorema di Pitagora applicato a spostamenti infinitesimi:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (33)$$

da cui

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)} \quad \text{e} \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}. \quad (34)$$

³Ricordiamo che, dati due vettori $\vec{u}(s)$ e $\vec{w}(s)$, si ha $\frac{d}{ds} [\vec{u} \cdot \vec{w}] = \frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{w}}{ds}$, dove la derivata di un vettore si calcola componente per componente: $\frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{du_1}{ds} \hat{i}_1 + \frac{du_2}{ds} \hat{i}_2 + \frac{du_3}{ds} \hat{i}_3$.

⁴Questo risultato discende dal fatto che, per piccole rotazioni, la variazione di un versore ha modulo pari all'angolo di rotazione stesso (in radianti).

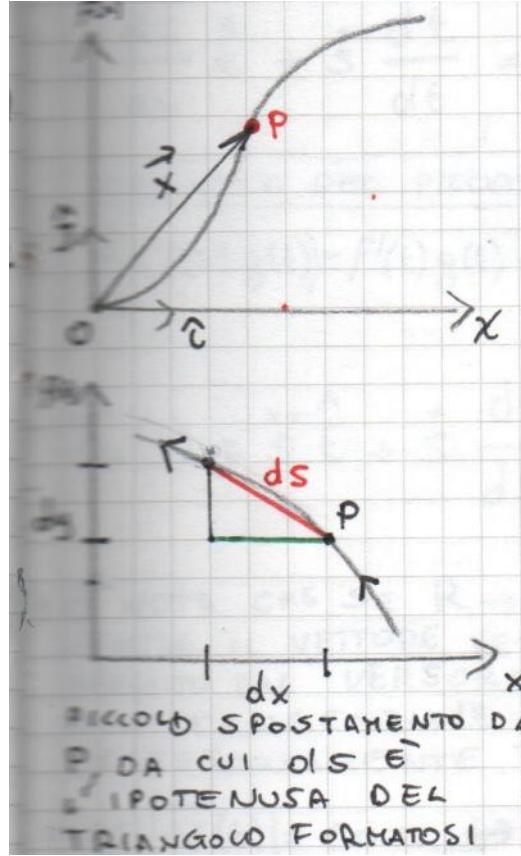


Figura 5: Elemento infinitesimo di arco ds come ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti dx e $dy = f'(x) dx$ lungo la curva $y = f(x)$.

Il versore tangente nel caso 2D si scrive

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j}, \quad (35)$$

ovvero, in forma algebrica,

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \\ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

avendo utilizzato la regola della catena $\frac{df}{ds} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = f'(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$.

Per ottenere $d\hat{t}/ds$ si calcolano le derivate delle componenti t_x e t_y rispetto a x , moltiplicandole poi per dx/ds :

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dt_x}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \\ \frac{dt_y}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Le derivate necessarie sono:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \right) = -\frac{f' f''}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad (38)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}. \quad (39)$$

La norma di $d\hat{t}/ds$ fornisce la **curvatura** κ della curva piana:

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}, \quad (40)$$

e il raggio di curvatura è $R = 1/\kappa$.

3.6 Terna intrinseca della traiettoria

Dati il versore tangente \hat{t} e il versore normale \hat{n} , si definisce il **versore binormale** come

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}, \quad (41)$$

in modo che la terna $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ costituisca una terna destrorsa.

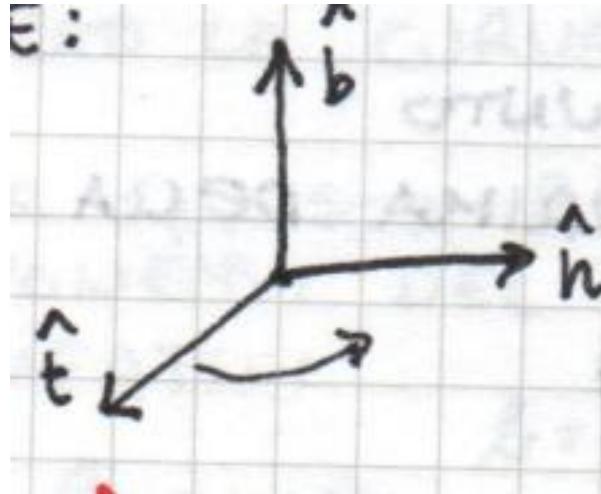


Figura 6: Terna intrinseca (o triedro di Frenet-Serret) in un punto della traiettoria: \hat{t} tangente, \hat{n} normale (verso il centro di curvatura), $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ binormale.

La terna intrinseca dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della traiettoria e si muove solidalmente con il punto materiale lungo di essa.

4 Caratteristiche locali del moto

Il vettore posizione $\vec{x}(t)$ può essere espresso come funzione composta $\vec{x}(s(t))$, dove $s(t)$ è l'ascissa curvilinea.

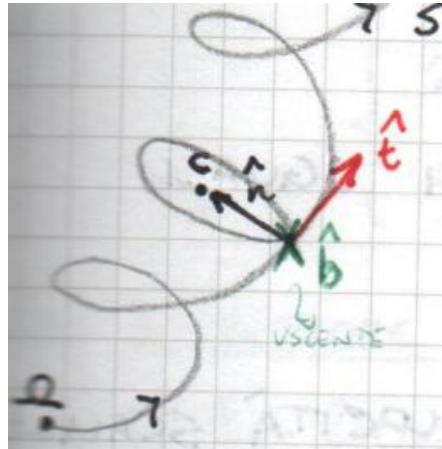


Figura 7: Terna intrinseca $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ rappresentata lungo una curva nello spazio tridimensionale.

4.1 Vettore velocità in coordinate intrinseche

Applicando la regola della catena⁵:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \hat{t}, \quad (42)$$

dove $\dot{s} = ds/dt$ è la **velocità scalare**. Il vettore velocità ha dunque direzione e verso determinati dal versore tangente \hat{t} e intensità pari a $|\dot{s}|$.

4.2 Vettore accelerazione in coordinate intrinseche

Derivando il vettore velocità rispetto al tempo e applicando la regola di derivazione del prodotto⁶ e nuovamente la regola della catena:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s} \hat{t}) = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s} \frac{d\hat{t}}{dt} \\ &= \ddot{s} \hat{t} + \dot{s} \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \hat{t} + \dot{s} \frac{\hat{n}}{R} \dot{s}, \end{aligned} \quad (43)$$

dove si è utilizzata la relazione (31). Il risultato fondamentale è

$$\vec{a}(t) = \ddot{s} \hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_N.$$

(44)

Interpretazione fisica. L'accelerazione si decompone in due contributi con significato fisico distinto:

- La **componente tangenziale** $\vec{a}_T = \ddot{s} \hat{t}$ è responsabile della variazione dell'intensità della velocità. Ha direzione tangente alla traiettoria e intensità $|\ddot{s}|$.
- La **componente normale** (o centripeta) $\vec{a}_N = (\dot{s}^2/R) \hat{n}$ è responsabile della variazione della direzione della velocità. Ha direzione normale alla traiettoria, verso il centro di curvatura, e intensità \dot{s}^2/R .

Mentre il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria, l'accelerazione in generale non lo è, essendo la somma vettoriale di \vec{a}_T e \vec{a}_N .

⁵Regola della catena: $D[f(g(t))] = f'(g(t)) \cdot g'(t)$, ovvero $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}$.

⁶Regola del prodotto: $\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.

Casi particolari.

1. Se $\ddot{s} = 0$ il punto percorre archi di curva uguali in tempi uguali (moto uniforme lungo la traiettoria); l'accelerazione è puramente normale.
2. Se $\ddot{s} \neq 0$ la velocità scalare varia nel tempo e il moto è non uniforme.
3. Se $R \rightarrow \infty$ la traiettoria è rettilinea e $\vec{a}_N \rightarrow \vec{0}$: l'accelerazione è puramente tangenziale.
4. Se $R \neq \infty$ e $\dot{s} \neq 0$ il punto si muove su una curva ed è “attirato” verso il centro di curvatura dalla componente normale dell'accelerazione.

5 Pendolo semplice — Oscillatore non forzato

Il pendolo semplice costituisce uno dei modelli fondamentali della meccanica: pur nella sua semplicità, introduce il concetto di vincolo e conduce a un'equazione del moto non lineare di grande rilevanza.

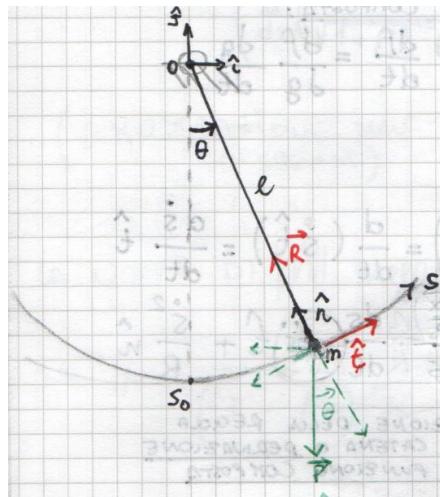


Figura 8: Schema del pendolo semplice: massa puntiforme m vincolata all'estremità di un'asta rigida di lunghezza ℓ , incernierata nel punto O . L'angolo θ è misurato rispetto alla verticale. Sono indicati i versori \hat{t} e \hat{n} della terna intrinseca e la forza peso.

Per definire il modello si assumono le seguenti ipotesi:

- La massa m è puntiforme.
- L'asta che collega m al punto di sospensione O è ideale: inestensibile, indeformabile e priva di massa.
- Nel punto O è presente una cerniera che permette la libera rotazione dell'asta.
- Il problema è piano: agiscono la forza peso e la reazione vincolare dell'asta.
- L'unico grado di libertà è l'angolo θ che l'asta forma con la verticale passante per O .

Poiché il punto m rimane sempre a distanza ℓ dal centro O , la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio

$$R = \ell. \quad (45)$$

Si fissa un sistema di riferimento $R(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ con origine in O . Il vettore posizione del punto materiale nel piano è

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j}. \quad (46)$$

L'ascissa curvilinea è legata all'angolo θ dalla relazione

$$s = \ell \theta, \quad (47)$$

e le componenti cartesiane del vettore posizione si esprimono come⁷:

$$\begin{cases} x = \ell \sin \theta \\ y = \ell \cos \theta \end{cases} \quad (48)$$

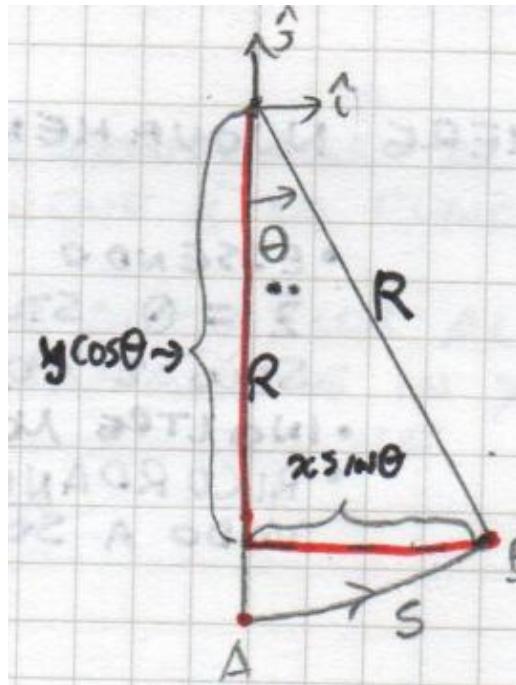


Figura 9: Geometria del pendolo: il punto materiale si muove su un arco di cerchio di raggio $R = \ell$. L'angolo θ è misurato dalla verticale e le componenti $x = \ell \sin \theta$, $y = \ell \cos \theta$ sono indicate.

6 Dinamica del pendolo semplice

Il problema del pendolo semplice, introdotto dal punto di vista cinematico, richiede ora un'analisi dinamica completa. Si tratta di determinare l'equazione del moto di un punto materiale di massa m vincolato a muoversi lungo una traiettoria circolare di raggio ℓ , sotto l'azione della gravità. Questo problema, apparentemente elementare, introduce concetti fondamentali quali i gradi di libertà, le reazioni vincolari e la linearizzazione delle equazioni del moto.

6.1 Vettore posizione e ascissa curvilinea

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani con origine nel centro della traiettoria circolare e versore \hat{j} diretto verso l'alto, il vettore posizione del punto materiale che si muove sulla

⁷La scelta $x = \ell \sin \theta$ e $y = \ell \cos \theta$ (anziché le più consuete $x = \ell \cos \theta$, $y = \ell \sin \theta$) discende dal fatto che l'angolo θ è misurato a partire dalla verticale discendente.

circonferenza di raggio ℓ si scrive come⁸:

$$\vec{r} = \ell \sin \theta \hat{i} - \ell \cos \theta \hat{j} = \vec{r}(\theta). \quad (49)$$

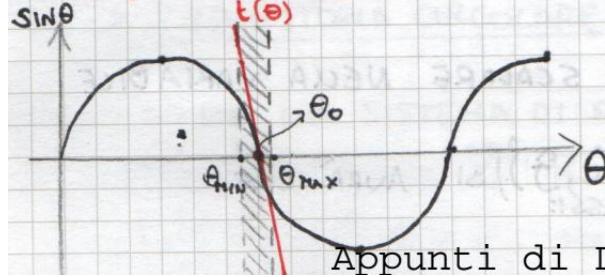


Figura 10: Punto materiale su traiettoria circolare di raggio ℓ . L'angolo θ è misurato dalla verticale; le componenti cartesiane $x = \ell \sin \theta$ e $y = -\ell \cos \theta$ e l'ascissa curvilinea s sono indicate.

In questo caso il vettore posizione dipende dal solo parametro θ , ma può essere espresso anche in funzione dell'ascissa curvilinea s . Ricordando la relazione $s = \ell \theta$, si ha:

$$\vec{r}(s) : \begin{cases} x(s) = \ell \sin \frac{s}{\ell}, \\ y(s) = -\ell \cos \frac{s}{\ell}. \end{cases} \quad (50)$$

6.2 Gradi di libertà e vincoli

La traiettoria circolare assegnata costituisce un **vincolo** di tipo unidimensionale: il punto materiale di massa m non può muoversi liberamente nello spazio, ma è costretto a percorrere la circonferenza di raggio ℓ e centro O . La possibilità di muoversi lungo quest'unica curva si espri me dicendo che il sistema possiede **un grado di libertà**. In altri termini, è sufficiente un solo parametro sia esso s oppure θ per determinare univocamente la posizione del punto materiale.

Definizione (Numero di gradi di libertà). Il numero di gradi di libertà di un sistema meccanico è il numero di parametri indipendenti necessari per determinare univocamente la posizione del sistema nello spazio. Un punto materiale libero in uno spazio tridimensionale possiede tre gradi di libertà; il pendolo semplice, vincolato alla traiettoria circolare, ne possiede uno solo.

Il problema meccanico è dunque risolto quando si determina un'equazione oraria del tipo $s(t)$ oppure $\theta(t)$, essendo le due quantità legate dalla relazione $s(t) = \ell \theta(t)$. Il problema si riduce pertanto a un'equazione differenziale scalare nell'incognita $\theta(t)$.

6.3 Bilancio delle forze e proiezione cartesiana

Si applica la seconda legge di Newton al punto materiale:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}, \quad (51)$$

dove $\vec{P} = -mg \hat{j}$ è la forza peso e \vec{R} è la reazione vincolare, diretta normalmente alla traiettoria nel punto in cui si trova il punto materiale.

⁸Il segno negativo nella componente lungo \hat{j} deriva dalla scelta dell'angolo θ misurato a partire dalla verticale discendente, cosicché per $\theta = 0$ il punto si trova nella posizione più bassa.

Scelto un sistema di riferimento $R(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, l'accelerazione si decompone come $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$. Proiettando l'equazione (51) lungo i tre versori si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x, \\ m\ddot{y} = -mg + R_y, \\ 0 = R_z, \end{cases} \quad (52)$$

dove si è sfruttato il fatto che il moto avviene nel piano (x, y) , cosicché $\ddot{z} = 0$ e la componente R_z è nulla. Il sistema si riduce quindi a due equazioni scalari. Sostituendo le espressioni cinematiche $x = \ell \sin \theta$ e $y = -\ell \cos \theta$, si possono esprimere le accelerazioni in funzione di θ e delle sue derivate temporali.

6.4 Proiezione sulla terna intrinseca

La proiezione sugli assi cartesiani non è necessariamente la scelta più conveniente. Un'alternativa efficace consiste nel proiettare l'equazione del moto sulla **terna intrinseca** $(\hat{e}, \hat{n}, \hat{b})$, dove \hat{e} è il versore tangente alla traiettoria, \hat{n} il versore normale (diretto verso il centro di curvatura) e $\hat{b} = \hat{e} \times \hat{n}$ il versore binormale. Proiettando l'equazione (51) si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = -mg \sin \theta, \\ m \frac{\dot{s}^2}{\ell} = -mg \cos \theta + R_N, \end{cases} \quad (53)$$

avendo osservato che la componente binormale è identicamente nulla ($a_b = 0$, $P_b = 0$, $R_b = 0$)⁹. Si dice che il sistema è **disaccoppiato** se in ciascuna equazione compare una sola delle funzioni incognite.

Ricordando che $s = \ell \theta$, e dunque $\dot{s} = \ell \dot{\theta}$ e $\ddot{s} = \ell \ddot{\theta}$, il sistema (53) diventa:

$$\begin{cases} m\ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta, & \text{(A)} \\ m\ell \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_N. & \text{(B)} \end{cases} \quad (54)$$

Si osservi che l'equazione (A) è un'equazione differenziale **non lineare omogenea**: la non linearità deriva dal fatto che $\theta(t)$ compare come argomento della funzione trigonometrica $\sin \theta$. L'equazione (B) è invece non lineare e non omogenea, poiché contiene l'incognita ausiliaria R_N (la reazione vincolare normale) che non è nota a priori. La strategia risolutiva consiste nel risolvere dapprima l'equazione (A) per determinare $\theta(t)$, e successivamente ricavare R_N dall'equazione (B).

Interpretazione fisica. L'equazione (A) esprime il bilancio delle forze nella direzione tangente alla traiettoria: l'unica componente attiva è la proiezione tangenziale del peso, $-mg \sin \theta$, che agisce come forza di richiamo. L'equazione (B) rappresenta il bilancio nella direzione normale (centripeta): la reazione vincolare R_N deve bilanciare sia la componente centripeta dell'accelerazione sia la proiezione radiale del peso. Il fatto che un solo grado di libertà sia sufficiente implica che basta una sola equazione differenziale l'equazione (A) per determinare completamente il moto; la seconda equazione fornisce poi la reazione vincolare.

⁹Ciò è conseguenza del fatto che il moto è piano: non vi è accelerazione né forza nella direzione ortogonale al piano del pendolo.

6.5 Linearizzazione dell'equazione del moto

L'equazione (A) del sistema (54), pur descrivendo esattamente la dinamica del pendolo, non ammette soluzione in forma chiusa elementare a causa della non linearità introdotta da $\sin \theta$. Per ottenere una soluzione analitica è necessario procedere a una **linearizzazione**.

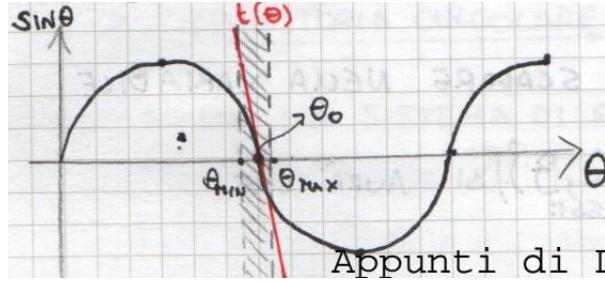


Figura 11: Illustrazione del concetto di linearizzazione: la funzione $\sin \theta$ viene approssimata dalla retta tangente nell'intorno del punto di lavoro θ_0 . L'approssimazione è valida nell'intervallo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ entro il quale l'errore resta inferiore alla tolleranza ε prescelta.

Linearizzare significa sostituire una funzione non lineare con la sua approssimazione lineare (retta tangente) in un intorno di un punto di lavoro. Ciò è lecito soltanto sotto precise condizioni:

- si deve specificare il punto θ_0 attorno al quale si effettua l'approssimazione;
- si deve garantire che la variabile θ resti confinata in un intervallo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ sufficientemente piccolo;
- l'errore introdotto, $|\sin \theta - t(\theta)| \leq \varepsilon$, deve essere inferiore a una tolleranza accettabile.

Lo strumento formale è la **serie di Taylor** della funzione $f(x)$ nell'intorno di x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (55)$$

La serie converge al valore della funzione; troncandola al primo ordine si ottiene l'approssimazione lineare (retta tangente):

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (56)$$

Applicando questa relazione alla funzione $\sin \theta$ con punto di sviluppo $\theta_0 = 0$:

$$\sin \theta \approx \sin 0 + \cos 0 (\theta - 0) = \theta. \quad (57)$$

Questa approssimazione, nota come **approssimazione per piccole oscillazioni**, è valida quando l'ampiezza angolare del moto è sufficientemente piccola¹⁰. È fondamentale sottolineare che non è sempre lecito effettuare una linearizzazione di questo tipo: occorre sempre verificare preventivamente che le ipotesi di piccole oscillazioni siano soddisfatte.

Sostituendo $\sin \theta \approx \theta$ nell'equazione (A) del sistema (54):

$$m\ell \ddot{\theta} = -mg \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0. \quad (58)$$

Questa è l'**equazione del pendolo semplice linearizzato**: un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti.

¹⁰In pratica, l'errore relativo dell'approssimazione $\sin \theta \approx \theta$ resta inferiore all'1% per $|\theta| \lesssim 0,24$ rad $\approx 14^\circ$.

6.6 Soluzione dell'equazione linearizzata

L'equazione caratteristica associata alla (58) è:

$$\chi^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \implies \chi_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{g}{\ell}}. \quad (59)$$

Poiché $g/\ell > 0$, il discriminante è negativo e le radici sono complesse coniugate:

$$\chi_{1,2} = \pm j\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad (60)$$

dove ω è la **pulsazione naturale** del sistema (frequenza angolare di oscillazione). La soluzione generale è dunque:

$$\theta(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t}. \quad (61)$$

Utilizzando la formula di Eulero e imponendo le condizioni iniziali $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, si ottiene la soluzione in forma reale:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (62)$$

Interpretazione fisica. La soluzione (62) descrive un moto oscillatorio armonico: il pendolo oscilla indefinitamente attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione $\omega = \sqrt{g/\ell}$, che dipende unicamente dalla lunghezza del pendolo e dall'accelerazione di gravità, e *non* dalla massa. Il primo termine rappresenta l'oscillazione dovuta allo spostamento iniziale θ_0 , il secondo quella dovuta alla velocità angolare iniziale $\dot{\theta}_0$.

6.7 Determinazione della reazione vincolare

Una volta nota $\theta(t)$ dalla (62), si ricava la velocità angolare:

$$\dot{\theta}(t) = \omega \left(-\theta_0 \sin(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \cos(\omega t) \right). \quad (63)$$

Sostituendo nell'equazione (B) del sistema (54), si determina la reazione vincolare normale:

$$R_N = m\ell \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta. \quad (64)$$

Si conferma così che, disponendo di un solo grado di libertà, è sufficiente una sola equazione differenziale per determinare la funzione incognita $\theta(t)$; la seconda equazione scalare fornisce poi la reazione vincolare R_N .

6.8 Pendolo semplice inclinato

Si consideri ora una variante del problema precedente: la guida circolare di raggio ℓ è inclinata di un angolo α rispetto al piano verticale. La massa m non giace più su un piano verticale, ma è vincolata a una traiettoria circolare il cui piano forma un angolo α con la verticale.

Tale configurazione comporta che la reazione vincolare \vec{R} possieda componenti sia nella direzione \hat{n} sia nella direzione \hat{b} : essa è la composizione di due vettori con direzioni date da \hat{n} e \hat{b} ¹¹.

¹¹Si può osservare che la proiezione della traiettoria circolare inclinata su un piano verticale è un'ellisse; al crescere dell'angolo di inclinazione α , l'ellisse degenera progressivamente in un segmento.

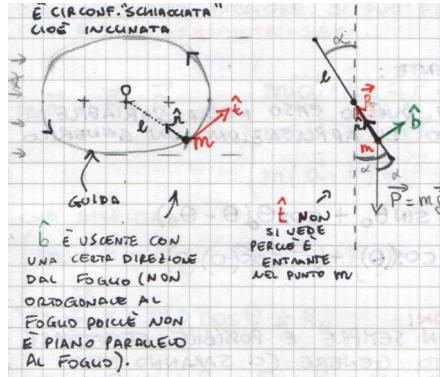


Figura 12: Pendolo semplice inclinato: la guida circolare di raggio ℓ è inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Le forze agenti sono il peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e la reazione vincolare \vec{R} . La terna intrinseca $(\hat{e}, \hat{n}, \hat{b})$ è indicata; il versore \hat{b} non è ortogonale al piano del foglio.

Proiettando l'equazione $m\ddot{a} = \vec{P} + \vec{R}$ sulla terna intrinseca $(\hat{e}, \hat{n}, \hat{b})$:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \vec{P} \cdot \hat{e} = 0, \\ m \frac{\dot{s}^2}{\ell} = -mg \cos \alpha + R_N, \\ 0 = -mg \sin \alpha + R_b. \end{cases} \quad (65)$$

Si osservi che, a differenza del pendolo verticale, compaiono ora **due** reazioni vincolari incognite: R_N (componente normale) e R_b (componente binormale). La componente R_b è necessaria per impedire alla massa di uscire dal piano inclinato della guida e risulta tanto maggiore quanto più grande è l'angolo di inclinazione α . Le quantità R_N e R_b costituiscono le incognite ausiliarie del problema.

Interpretazione fisica. Nel pendolo verticale la reazione vincolare è puramente radiale (lungo \hat{n}), poiché il piano del moto contiene la direzione della gravità. Quando la guida è inclinata, la gravità possiede una componente ortogonale al piano del moto (lungo \hat{b}), che deve essere bilanciata da una corrispondente componente della reazione vincolare. Questo spiega la comparsa di R_b .

7 Vincoli scabri

Nella trattazione precedente si è implicitamente assunto che il vincolo fosse **liscio**, ossia privo di attrito nella direzione tangenziale. Si considera ora il caso di un **vincolo scabro**, nel quale esiste una resistenza allo scorrimento del punto nella direzione consentita dal vincolo, cioè nella direzione tangenziale¹².

Si distinguono due regimi. In **condizioni statiche**, la reazione tangenziale \vec{R}_t si oppone esattamente alla forza tangenziale applicata e la sua intensità non supera un valore limite proporzionale alla reazione normale:

$$|\vec{R}_t| \leq \phi_s |\vec{R}_N| \implies \vec{R}_t = -\vec{F}_t, \quad (66)$$

dove ϕ_s è il **coefficiente di attrito statico**, che dipende dalla natura dei materiali a contatto.

¹²Quella che segue è una trattazione semplificata del fenomeno dell'attrito; modelli più raffinati sono disponibili nella letteratura specializzata.

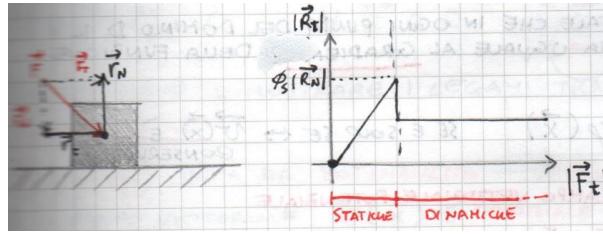


Figura 13: Modello di attrito: la reazione tangenziale R_t in funzione della forza tangenziale applicata F_t . Nel tratto crescente (regime statico) la reazione eguaglia la forza applicata; superata la soglia $\phi_s |R_N|$ si passa al regime dinamico, in cui la reazione tangenziale si riduce al valore $\phi_d |R_N|$.

Quando la forza tangenziale applicata supera la soglia $\phi_s |\vec{R}_N|$, il vincolo non riesce più a mantenere le condizioni statiche e si passa alle **condizioni dinamiche**. In questo regime la reazione tangenziale assume il valore:

$$|\vec{R}_t| = \phi_d |\vec{R}_N|, \quad \phi_d < \phi_s, \quad (67)$$

dove ϕ_d è il **coefficiente di attrito dinamico**. La direzione della reazione tangenziale è opposta a quella della velocità di scorrimento:

$$\vec{R}_t = -\phi_d |\vec{R}_N| \hat{u}, \quad (68)$$

essendo \hat{u} il versore della velocità del punto materiale.



Figura 14: Cono d'attrito: la reazione vincolare totale \vec{R} deve restare all'interno del cono di semiangolo α affinché il sistema permanga in condizioni statiche. L'asse del cono coincide con la direzione della reazione normale \vec{R}_N .

Il concetto di **cono d'attrito** fornisce un'interpretazione geometrica elegante. Si definisce α come l'angolo che la reazione vincolare totale \vec{R} forma con la normale alla superficie di contatto. In condizioni statiche:

$$\frac{|\vec{R}_t|}{|\vec{R}_N|} \leq \phi_s \implies \tan \alpha \leq \phi_s \implies \alpha \leq \arctan(\phi_s). \quad (69)$$

Finché la reazione vincolare \vec{R} resta all'interno del cono di semiangolo $\arctan(\phi_s)$ il sistema permane in condizioni statiche; quando \vec{R} raggiunge la superficie del cono, si innesca lo scorrimento e si passa al regime dinamico. La simmetria circolare della sezione del cono indica che l'attrito statico agisce in modo isotropo, ossia è valido per ogni direzione tangenziale.

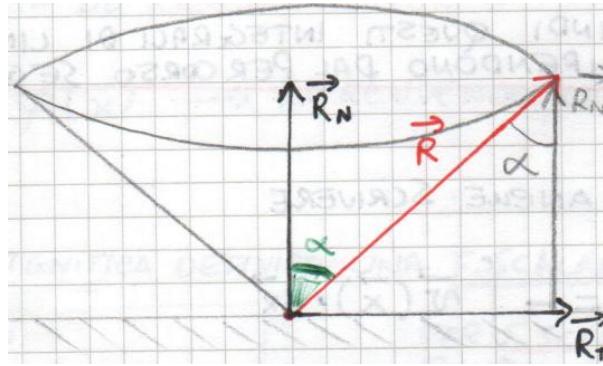


Figura 15: Rappresentazione laterale del cono d’attrito: la reazione vincolare \vec{R} forma un angolo α con la normale alla superficie. Finché $\alpha \leq \arctan(\phi_s)$ il sistema è in equilibrio statico.

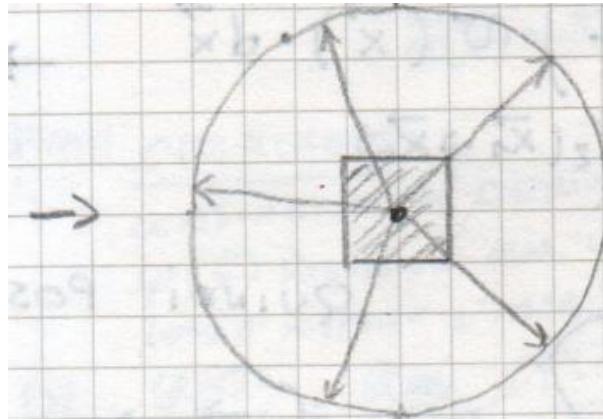


Figura 16: Sezione trasversale del cono d’attrito vista dall’alto: la simmetria circolare indica che l’attrito statico è valido per ogni direzione tangenziale.

8 Conservatività, potenzialità e irrotazionalità

Si introduce ora lo studio delle proprietà fondamentali dei campi vettoriali, con particolare riferimento ai concetti di conservatività, potenzialità e irrotazionalità. Queste nozioni rivestono un ruolo centrale nella meccanica, poiché permettono di classificare le forze e di introdurre il concetto di energia potenziale.

Sia $\vec{v}(\vec{x})$ un campo vettoriale definito in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$, con $\vec{x} \in D$. Ad esempio, la funzione velocità $\vec{v}(\vec{x})$ definisce un campo vettoriale che associa a ogni punto dello spazio un vettore.

8.1 Campo vettoriale conservativo

Definizione (Conservatività). Un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ si dice **conservativo** nel dominio D se la sua circuitazione lungo qualsiasi curva chiusa C contenuta in D è nulla:

$$\oint_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall C \subset D. \quad (70)$$

In altre parole, il campo è conservativo se l’integrale di linea lungo qualsiasi circuito chiuso formato da punti appartenenti al dominio è identicamente nullo.

Per comprendere le conseguenze di questa definizione, si consideri un circuito generico C nel dominio D e si scelgano due punti qualsiasi \vec{x}_0 e \vec{x}_1 lungo di esso, suddividendo così C in due

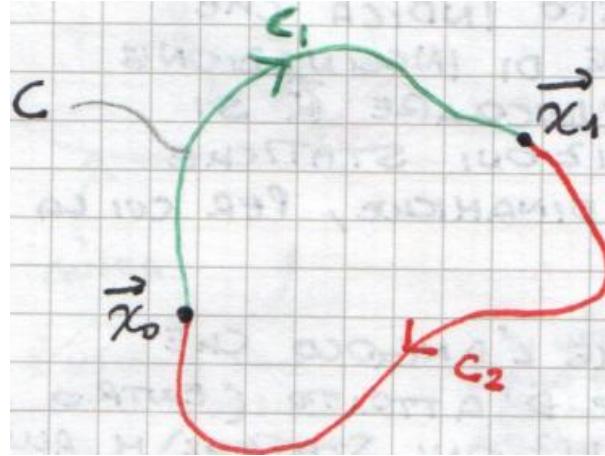


Figura 17: Circuito chiuso C suddiviso in due cammini C_1 (da \vec{x}_0 a \vec{x}_1) e C_2 (da \vec{x}_1 a \vec{x}_0). Se il campo è conservativo, gli integrali di linea lungo i due cammini sono uguali in modulo e opposti in segno.

cammini distinti C_1 (da \vec{x}_0 a \vec{x}_1) e C_2 (da \vec{x}_1 a \vec{x}_0). Dalla condizione di conservatività:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0 \implies \int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0, \quad (71)$$

da cui:

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} = - \int_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{x}. \quad (72)$$

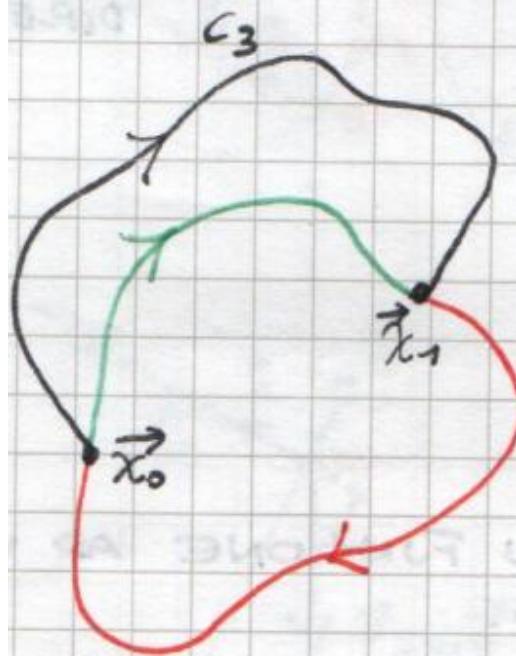


Figura 18: Circuito chiuso C suddiviso in tre cammini C_1 , C_2 e C_3 . L'indipendenza dal cammino implica che l'integrale di linea tra \vec{x}_0 e \vec{x}_1 è lo stesso lungo qualsiasi percorso.

Poiché il ragionamento vale per qualsiasi scelta dei cammini, si può introdurre un terzo percorso C_3 da \vec{x}_0 a \vec{x}_1 e verificare che:

$$\int_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{C_3} \vec{v} \cdot d\vec{x}. \quad (73)$$

Si giunge così a una definizione equivalente di conservatività.

Definizione (Conservatività forma equivalente). Il campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ è conservativo se e solo se l'integrale di linea $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{v} \cdot d\vec{x}$ non dipende dal percorso seguito, ma solo dagli estremi \vec{x}_0 e \vec{x}_1 .

8.2 Potenzialità

Definizione (Potenzialità). Un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ si dice **potenziale** se esiste una funzione scalare $\varphi(\vec{x})$, detta **funzione potenziale**, tale che in ogni punto del dominio D :

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x}), \quad (74)$$

dove il gradiente è definito come:

$$\nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial z} \hat{k}. \quad (75)$$

L'operatore gradiente associa a una funzione scalare un vettore le cui componenti sono le derivate parziali del campo scalare lungo le tre direzioni coordinare.

Un risultato fondamentale stabilisce che un campo vettoriale è potenziale **se e solo se** è conservativo. Le due proprietà sono dunque equivalenti¹³.

8.3 Irrotazionalità

Definizione (Irrotazionalità). Un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ si dice **irrotazionale** nel dominio D se:

$$\nabla \times \vec{v}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in D. \quad (76)$$

Il termine “rotore” rimanda al concetto di rotazione: considerando il moto di un corpo rigido, esso può essere decomposto in una traslazione del baricentro e in una rotazione attorno ad esso. Il rotore di un campo di velocità misura la tendenza locale del campo a indurre rotazione.

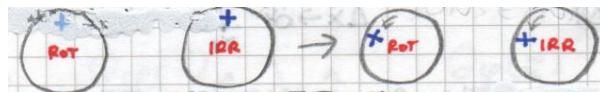


Figura 19: Decomposizione del moto di un corpo rigido in traslazione (TR) e rotazione (ROT).

8.4 Legami tra le definizioni

Si dimostrano ora i legami logici tra le tre proprietà introdotte.

Da potenzialità a irrotazionalità ($B \Rightarrow C$). Se il campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ è potenziale, allora è anche irrotazionale. Infatti, se $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})$, si ha:

$$\nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla \varphi) = \vec{0} \quad \forall \varphi(\vec{x}) \text{ di classe } C^2, \quad (77)$$

poiché il rotore del gradiente di qualsiasi funzione scalare sufficientemente regolare è identicamente nullo¹⁴.

¹³L'equivalenza vale in domini semplicemente connessi, come si preciserà nel seguito.

¹⁴Questa identità vettoriale segue dal teorema di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate parziali miste: $\partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 \varphi / \partial x_j \partial x_i$.

Da irrotationalità a conservatività (C \Rightarrow A). Per dimostrare questa implicazione si introduce il **teorema di Stokes**. Data una superficie $S \subset D$, dove D è un dominio **semplicemente connesso** (privo di buchi),

9 Dalla conservatività alla potenzialità

Si vuole ora dimostrare l'implicazione (A) \Rightarrow (B), ossia che se un campo vettoriale $\vec{v}(\vec{x})$ è conservativo, allora è anche potenziale: esiste cioè una funzione scalare $\varphi(\vec{x})$ tale che $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$. Questo risultato è centrale perché consente di ricondurre lo studio di un campo vettoriale a quello di una singola funzione scalare, con enormi vantaggi sia analitici sia computazionali.

9.1 Il teorema di Stokes e il contesto geometrico

Prima di procedere alla dimostrazione, è utile richiamare il teorema di Stokes, che collega l'integrale di superficie del rotore di un campo vettoriale al circuito del campo stesso lungo la frontiera della superficie. Data una superficie S con bordo $\partial S = C$, e indicato con \hat{n} il versore normale a S , il teorema afferma:

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}(\vec{x})) \cdot \hat{n} dS = \oint_{\partial S} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (78)$$

Figura 20: Superficie S con frontiera $C = \partial S$. Il versore \hat{n} è normale all'elemento di superficie dS ; il vettore $d\vec{x}$ è tangente alla curva di bordo C . Il teorema di Stokes lega l'integrale di superficie del rotore all'integrale di linea lungo ∂S .

9.2 Funzione scalare di punto e indipendenza dal percorso

Si definisce la funzione

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}', \quad (79)$$

dove \vec{x}_0 è un punto di riferimento fissato. Per **funzione scalare di punto** si intende una funzione il cui valore dipende unicamente dai punti iniziale \vec{x}_0 e finale \vec{x} , e non dal particolare percorso seguito per collegare i due punti. Questa proprietà è garantita proprio dalla conservatività del campo: poiché $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0$ per ogni curva chiusa C nel dominio, l'integrale di linea tra due punti qualsiasi è indipendente dal cammino.

9.3 Dimostrazione: conservatività implica potenzialità

Si deve dimostrare che, se $\vec{v}(\vec{x})$ è conservativo, allora $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$, con φ definita dalla (79).

Si consideri uno spostamento $\Delta\vec{x}$ nel dominio D della funzione φ . La variazione di φ è:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x} + \Delta\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \int_{\vec{x}}^{\vec{x} + \Delta\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'. \quad (80)$$

Ad una variazione $\Delta\vec{x} = (\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{x}$ della posizione corrisponde dunque una variazione $\Delta\varphi(\vec{x})$ della funzione potenziale.

Si effettua ora il passaggio al limite per $\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}$. Per il **teorema della media integrale**¹⁵, applicato all'integrale nella (80), si ottiene:

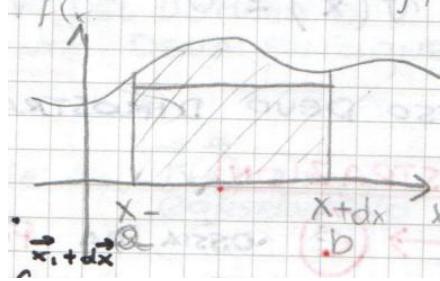


Figura 21: Illustrazione del teorema della media integrale: il rettangolo di base $[a, b]$ e altezza $f(c)$ ha area uguale a quella sottesa dalla curva $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

$$\lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}} \Delta \varphi = d\varphi(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (81)$$

Il differenziale $d\varphi(\vec{x})$ quantifica la variazione infinitesima della funzione rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti che compongono \vec{x} : si tratta del **differenziale totale**. Se si considerasse la variazione rispetto ad una sola variabile indipendente, si parlerebbe di differenziale parziale.

In componenti, il differenziale parziale rispetto alla i -esima variabile è $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) dx_i$, mentre il differenziale totale si scrive:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = \nabla y \cdot d\vec{x}. \quad (82)$$

Applicando questa struttura alla funzione $\varphi(\vec{x})$:

$$d\varphi(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (83)$$

Confrontando la (81) con la (83) si conclude che

$$d\varphi(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}, \quad (84)$$

da cui $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})$, se e solo se il dominio D è semplicemente connesso, ossia privo di “buchi”.¹⁶

Interpretazione fisica. Il risultato stabilisce che, in un dominio semplicemente connesso, un campo vettoriale conservativo ammette sempre una funzione potenziale φ il cui gradiente ricostruisce il campo stesso. Ciò significa che tutta l'informazione contenuta nel campo vettoriale (tre componenti) è codificata in una singola funzione scalare: una riduzione drastica della complessità del problema.

10 Forze conservative, traiettorie e concetti di equilibrio

Un punto materiale soggetto a campi di forze conservativi può cambiare il proprio stato — la propria posizione — in modo tale che le forze compiono un lavoro indipendente dal percorso

¹⁵Il teorema della media integrale afferma che, data una funzione continua f su $[a, b]$, esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

¹⁶La semplice connessione del dominio è condizione necessaria affinché l'irrotationalità implichia la conservatività. In domini non semplicemente connessi un campo irrotazionale può non essere conservativo.

seguito. Questa proprietà consente di descrivere la forza e le sue componenti in funzione di una funzione scalare, il potenziale.

Se $\vec{F}(\vec{x})$ è un campo di forza conservativo, allora esiste una funzione potenziale $\varphi(\vec{x})$ tale che:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x}). \quad (85)$$

La forza è dunque associata ad un campo potenziale.

10.1 Proiezione della forza lungo una direzione

In generale si studia la componente di \vec{F} lungo una direzione generica individuata dal versore \hat{w} :

$$\vec{F} \cdot \hat{w} = F_w = \nabla \varphi(\vec{x}) \cdot \hat{w}, \quad (86)$$

dove \hat{w} può coincidere con uno qualsiasi dei versori \hat{e}_k del sistema di riferimento cartesiano.

Proiettando lungo il k -esimo versore \hat{e}_k :

$$\vec{F} \cdot \hat{e}_k = (f_1 \hat{e}_1 + f_2 \hat{e}_2 + f_3 \hat{e}_3) \cdot \hat{e}_k = f_k, \quad (87)$$

e analogamente:

$$\nabla \varphi(\vec{x}) \cdot \hat{e}_k = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{e}_3 \right) \cdot \hat{e}_k = \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_k}, \quad (88)$$

da cui si ottiene la relazione fondamentale tra la k -esima componente della forza e la derivata parziale del potenziale:

$$f_k = \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_k}. \quad (89)$$

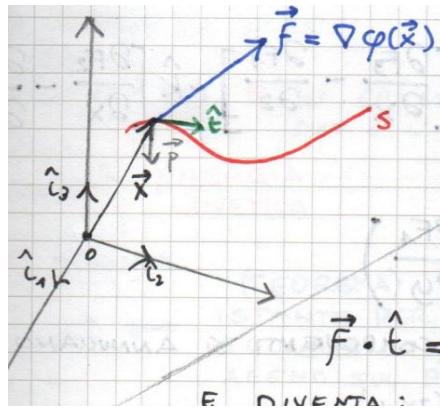


Figura 22: Sistema di riferimento con assi $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$. La curva rossa S rappresenta la traiettoria; il vettore blu $\vec{F} = \nabla \varphi(\vec{x})$ origina dal punto \vec{x} sulla curva, mentre il versore verde \hat{e} è tangente alla traiettoria in \vec{x} . Il vettore \vec{r} indica la posizione rispetto all'origine.

10.2 Derivata direzionale e proiezione lungo la traiettoria

Si consideri ora la proiezione della forza lungo un versore generico \hat{e} espresso in componenti come $\hat{e} = t_1 \hat{e}_1 + t_2 \hat{e}_2 + t_3 \hat{e}_3$, dove t_1, t_2, t_3 sono i coseni direttori della direzione individuata da \hat{e} . Si ha:

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \hat{e}_3 \right) \cdot (t_1 \hat{e}_1 + t_2 \hat{e}_2 + t_3 \hat{e}_3), \quad (90)$$

che si riduce a:

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_k} t_k = \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial s} \Big|_{\vec{x}}, \quad (91)$$

dove il membro destro è la **derivata direzionale** di $\varphi(\vec{x})$ lungo la traiettoria S , ossia lungo l'ascissa curvilinea s .

Per **derivata direzionale** di una funzione scalare $\varphi(\vec{x})$ lungo un vettore \hat{e} si intende il limite:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{x} + h\hat{e}) - \varphi(\vec{x})}{h}. \quad (92)$$

Essa rappresenta la variazione di φ nella direzione di \hat{e} . Equivalentemente, parametrizzando il potenziale lungo l'ascissa curvilinea s :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s + \Delta s) - \varphi(s)}{\Delta s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \vec{F} \cdot \hat{e}, \quad (93)$$

relazione valida se e solo se \vec{F} è conservativa, cosicché φ è la funzione potenziale di \vec{F} .

Interpretazione fisica. La componente della forza conservativa lungo una qualsiasi direzione è pari alla derivata del potenziale in quella direzione. Lungo la traiettoria, la forza “sente” il gradiente del potenziale: dove il potenziale cresce rapidamente, la forza è intensa; dove il potenziale è stazionario, la forza si annulla.

10.3 Relazioni tra conservatività, potenzialità e irrotazionalità

Dato un campo vettoriale $\vec{F}(\vec{x})$ con $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, si hanno le seguenti proprietà:

- **Campo conservativo:** $\oint_C \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0$ per ogni curva chiusa $C \subset D$.
- **Campo potenziale:** $\vec{F}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})$ per una opportuna funzione scalare φ .
- **Campo irrotazionale:** $\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$.

In meccanica, conservatività e potenzialità sono equivalenti (in domini semplicemente connessi). In meccanica dei fluidi, l'equivalenza rilevante è tra potenzialità e irrotazionalità. È fondamentale osservare che un campo irrotazionale *non* è necessariamente conservativo:

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x}), \quad (94)$$

mentre vale l'implicazione inversa:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}. \quad (95)$$

Interpretazione fisica. La distinzione è sottile ma cruciale: l'irrotazionalità è una condizione locale (il rotore si annulla punto per punto), mentre la conservatività è una proprietà globale (l'integrale di linea si annulla su *ogni* curva chiusa). Le due proprietà coincidono solo se il dominio è semplicemente connesso.

10.4 Esempio: verifica di irrotazionalità

Si consideri il campo vettoriale:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x - 3y}{2(x - y)^{3/2}}, \frac{3x - y}{2(x - y)^{3/2}}, 0 \right), \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (96)$$

L'insieme di definizione è:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > y\}, \quad (97)$$

poiché si richiede $(x - y)^3 > 0$, ossia $x > y$. Il dominio D è semplicemente connesso.¹⁷

Si calcola il rotore di \vec{F} :

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \quad (98)$$

Poiché $F_3 = 0$ e F_1, F_2 non dipendono da z , le prime due componenti del rotore si annullano immediatamente. Per la terza componente si calcola:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3x - y}{2(x - y)^{3/2}} \right]. \quad (99)$$

Svolgendo analogamente $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, si verifica che le due derivate coincidono, cosicché la terza componente del rotore si annulla. In definitiva:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}, \quad (100)$$

e il campo è irrotazionale nel suo dominio di definizione. Essendo inoltre D semplicemente connesso, il campo è anche conservativo e ammette funzione potenziale.

10.5 Ruolo della derivata del potenziale nell'equilibrio

Se un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una traiettoria assegnata, esso possiede un solo grado di libertà, descritto dall'ascissa curvilinea s . La risultante delle forze agenti, proiettata lungo la tangente alla traiettoria, determina l'accelerazione del punto lungo il suo unico grado di libertà.

L'intensità di tale risultante varia lungo la traiettoria: vi saranno massimi, minimi e punti in cui essa si annulla. In un punto generico, se il punto materiale parte da quiete, esso assume un'accelerazione proporzionale alla proiezione della risultante lungo il grado di libertà. Se tale proiezione è nulla, il punto rimane in stato di quiete: questo è il concetto di **equilibrio**.

Si possono dunque sintetizzare due fatti fondamentali:

1. Le componenti di una forza conservativa sono legate alle derivate della funzione potenziale associata, come espresso dalla (89).
2. Le componenti della forza lungo la tangente alla traiettoria, essendo legate all'accelerazione del punto, possono dar luogo a posizioni particolari in cui il punto materiale è in equilibrio indefinitamente se lasciato con velocità nulla.

Le derivate della funzione potenziale di un campo conservativo giocano pertanto un ruolo fondamentale nella definizione e nella caratterizzazione dell'equilibrio.

¹⁷Il semipiano $x > y$ in \mathbb{R}^3 è un aperto convesso, dunque semplicemente connesso.

11 Bilancio energetico: lavoro ed energia

Il legame tra forze e movimento trova la sua formulazione più potente nel linguaggio energetico. Si sviluppa qui il bilancio per un punto materiale, partendo dalla seconda legge di Newton.

11.1 Teorema dell'energia cinetica

Dalla seconda legge di Newton:

$$m\vec{a} = \vec{F} \implies m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (101)$$

Eseguendo il prodotto scalare di entrambi i membri per la velocità \vec{v} :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (102)$$

Il membro sinistro si riscrive osservando che¹⁸:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt}, \quad (103)$$

avendo definito l'**energia cinetica**:

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (104)$$

Il risultato fondamentale è il **teorema dell'energia cinetica** (o teorema delle forze vive):

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (105)$$

Interpretazione fisica. Istante per istante, la derivata temporale dell'energia cinetica egualia la potenza sviluppata dalla risultante di tutte le forze agenti sul punto materiale. Se la potenza è positiva, l'energia cinetica cresce (il punto accelera); se è negativa, decresce (il punto decelera).

11.2 Concetto di lavoro

Per introdurre il concetto di lavoro, si moltiplica l'equazione (105) per l'infinitesimo temporale dt :

$$dT = (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = \vec{F} \cdot (\vec{v} dt) = \vec{F} \cdot d\vec{x} = dL, \quad (106)$$

dove si è usato il fatto che $\vec{v} dt = d\vec{x}$.¹⁹ La quantità $dL = \vec{F} \cdot d\vec{x}$ è il **lavoro elementare**, ossia la quantità di lavoro compiuto dalla risultante delle forze nell'intervallo infinitesimo associato allo spostamento $d\vec{x}$.

Per verificare esplicitamente l'identità $(\vec{F} \cdot \vec{v}) dt = \vec{F} \cdot d\vec{x}$, si sviluppa in componenti:

$$\begin{aligned} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt &= (f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3) dt \\ &= f_1 v_1 dt + f_2 v_2 dt + f_3 v_3 dt \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = \vec{F} \cdot d\vec{x}. \end{aligned} \quad (107)$$

¹⁸Si utilizza l'identità $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$, da cui $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$.

¹⁹La proprietà $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ garantisce la legittimità del passaggio.

Integrando tra due posizioni $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$ e $\vec{x}_2 = \vec{x}(t_2)$:

$$T_2 - T_1 = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F} \cdot d\vec{x} = L_{C_{1 \rightarrow 2}}. \quad (108)$$

Il risultato è il **teorema dell'energia cinetica in forma finita**: la variazione di energia cinetica tra due stati successivi è pari al lavoro compiuto da tutte le forze esterne — in generale non conservative — per spostare il punto materiale da \vec{x}_1 a \vec{x}_2 lungo la traiettoria C . Si noti che, in generale, il lavoro dipende dalla traiettoria seguita.

11.3 Lavoro di forze conservative e funzione potenziale

Se la forza \vec{F}_C è conservativa, allora:

$$\oint \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = 0 \implies \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = L_{1 \rightarrow 2}, \quad (109)$$

e il lavoro non dipende dal percorso. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una forza sia conservativa è che sia **posizionale**, ossia che dipenda solo dalla posizione: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$.

Si associa a \vec{F}_C il campo potenziale φ_C , cosicché $\vec{F}_C = \nabla \varphi_C$. Il lavoro si calcola come:

$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \nabla \varphi_C \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\varphi_C = \varphi_{C_2} - \varphi_{C_1}, \quad (110)$$

dove si è sfruttato il fatto che $\nabla \varphi_C(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\varphi_C(\vec{x})$ è il differenziale totale di φ_C :

$$d\varphi_C(\vec{x}) = \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi_C}{\partial x_3} dx_3. \quad (111)$$

11.4 Decomposizione della forza e bilancio energetico completo

In generale, la forza agente sul punto materiale si decomponе in un contributo conservativo e uno non conservativo:

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_{NC}. \quad (112)$$

La variazione di energia cinetica diventa:

$$T_2 - T_1 = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}_C \cdot d\vec{x} + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{x} = L_{1 \rightarrow 2} + L_{NC, 1 \rightarrow 2}. \quad (113)$$

11.5 Energia potenziale

Si definisce l'**energia potenziale** come:

$$U(\vec{x}) = -\varphi(\vec{x}), \quad (114)$$

da cui $dU(\vec{x}) = -d\varphi(\vec{x})$. L'energia potenziale è una funzione scalare di punto associata ad un campo di forze conservativo, pari alla funzione potenziale cambiata di segno.²⁰

Poiché è possibile fissare in modo arbitrario il livello zero dell'energia potenziale, essa è definita a meno di una costante additiva.

²⁰Il segno meno è convenzionale: ad un lavoro positivo della forza conservativa corrisponde una *riduzione* dell'energia potenziale. Il punto materiale “scende” nel paesaggio energetico quando la forza compie lavoro positivo.

11.6 Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Sostituendo $L_{1 \rightarrow 2} = \varphi_{C_2} - \varphi_{C_1} = -(U_2 - U_1)$ nella (113):

$$T_2 + U_2 - T_1 - U_1 = L_{NC,1 \rightarrow 2}. \quad (115)$$

Definendo l'**energia meccanica** come:

$$E_M = T + U, \quad (116)$$

il bilancio si scrive nella forma compatta:

$$E_{M_2} - E_{M_1} = L_{NC,1 \rightarrow 2}. \quad (117)$$

Nel caso in cui le uniche forze agenti siano conservative, ossia $L_{NC,1 \rightarrow 2} = 0$:

$$E_{M_2} - E_{M_1} = 0 \implies E_M = \text{costante}. \quad (118)$$

Interpretazione fisica. L'energia meccanica si conserva quando le sole forze in gioco sono conservative. In tal caso, energia cinetica e potenziale si scambiano continuamente, ma la loro somma resta invariata: ciò che il punto “guadagna” in velocità lo “perde” in quota (o viceversa). Le forze non conservative (attrito, resistenza dell'aria) rompono questa simmetria, producendo una variazione netta dell'energia meccanica pari al lavoro da esse compiuto.

12 Equilibrio e stabilità

12.1 Condizione di equilibrio

La derivata della funzione potenziale è intimamente legata al concetto di equilibrio. Si definisce **posizione di equilibrio** \vec{x}_e una configurazione costante del punto materiale tale che:

$$\frac{d\vec{x}_e}{dt} = \vec{0} = \vec{v}, \quad (119)$$

ossia il punto è fermo. Se \vec{x}_e fosse variabile nel tempo, la velocità sarebbe non nulla.

In generale la forza dipende da posizione, velocità e tempo: $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Nella posizione di equilibrio, con $\vec{x} = \vec{x}_e$ e $\vec{v} = \vec{0}$, la condizione di equilibrio richiede:

$$\vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}. \quad (120)$$

Se il punto materiale ha velocità nulla in \vec{x}_e e la risultante delle forze è nulla, il punto rimane in quella posizione indefinitamente.

12.2 Classificazione della stabilità

Se si perturba il punto materiale dalla posizione di equilibrio \vec{x}_e , il comportamento successivo definisce il tipo di stabilità:

- **Equilibrio instabile:** il punto assume un moto che lo allontana indefinitamente da \vec{x}_e .
- **Equilibrio stabile:** il punto assume un moto confinato in un intorno di \vec{x}_e .
- **Equilibrio asintoticamente stabile:** il punto assume un moto tale che $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_e$ per $t \rightarrow \infty$.

Interpretazione fisica. La stabilità è una proprietà qualitativa dell'equilibrio che risponde alla domanda: “cosa succede se il sistema viene leggermente disturbato?”. Un equilibrio stabile corrisponde a un minimo dell'energia potenziale (il punto “tende a tornare”), uno instabile a un massimo (il punto “tende ad allontanarsi”), e uno asintoticamente stabile richiede la presenza di meccanismi dissipativi che smorzano le oscillazioni.

12.3 Applicazione: il loop

Si consideri un punto materiale di massa m che si muove lungo una guida liscia comprendente un tratto circolare (loop) di raggio R . La traiettoria è assegnata e il vincolo è liscio: il punto ha un solo grado di libertà. Le forze in gioco sono conservative, dunque l'energia meccanica si conserva: $E_M = T + U = \text{costante}$.

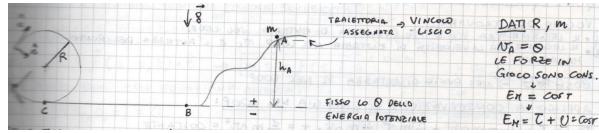


Figura 23: Punto materiale di massa m su una guida con loop circolare di raggio R . Il punto parte da un'altezza h_A con velocità nulla. Lo zero dell'energia potenziale è fissato alla base del loop.

Problema. Determinare l'altezza h_A tale che non si verifichi distacco nel loop.

12.3.1 Bilancio energetico

Nel punto A (altezza h_A , velocità nulla) l'energia meccanica è:

$$E_{M_A} = mgh_A. \quad (121)$$

Nel punto B (alla base del loop, quota zero) l'energia meccanica è:

$$E_{M_B} = \frac{1}{2}mv_B^2. \quad (122)$$

Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2. \quad (123)$$

12.3.2 Condizione di distacco

La condizione di distacco si verifica quando la reazione vincolare normale R_N si annulla. L'equazione del moto nel loop è:

$$m\vec{g} + \vec{R}_N = m\vec{a}. \quad (124)$$

Poiché il loop è una traiettoria circolare di raggio R costante, la forza vincolare non compie lavoro, essendo ortogonale allo spostamento tangente alla traiettoria.

Proiettando l'equazione (124) sulla terna intrinseca (\hat{e}, \hat{n}) nel caso bidimensionale, e ricordando che $\vec{a} = \ddot{s}\hat{e} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n}$ con $s = R\theta$:

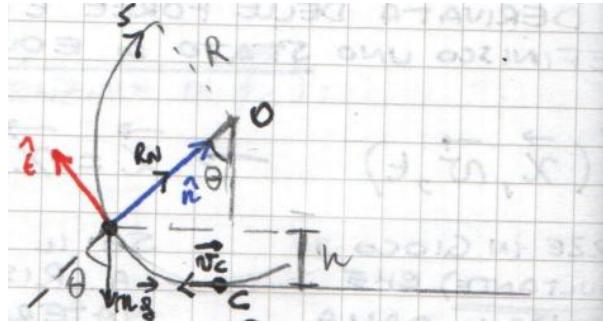


Figura 24: Punto materiale nel loop circolare di raggio R . L'angolo θ è misurato dalla verticale discendente passante per il centro C . I versori \hat{e} (tangente) e \hat{n} (normale centripeto) definiscono la terna intrinseca. La quota nel loop è $h = R - R \cos \theta$.

$$\hat{e}) \quad mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta, \quad (125)$$

$$\hat{n}) \quad mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_N. \quad (126)$$

Imponendo la condizione di distacco $R_N = 0$ nella (126):

$$mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta. \quad (127)$$

Poiché $m, R > 0$ e $\dot{\theta}^2 \geq 0$, il membro sinistro è non negativo. Affinché l'uguaglianza sia soddisfatta con $R_N = 0$, è necessario che $-mg \cos \theta \geq 0$, ossia:

$$\cos \theta < 0, \quad (128)$$

il che significa che il distacco può avvenire solo nella metà superiore del loop ($\theta > \pi/2$).²¹

Si osservi che l'equazione (125) è un'equazione differenziale non lineare (analogia a quella del pendolo, dove compariva il seno). A differenza del caso del pendolo, qui non è possibile linearizzare attorno a un punto di equilibrio, poiché il problema è intrinsecamente dinamico e coinvolge ampie escursioni angolari.

12.3.3 Legame tra altezza di partenza e velocità nel loop

Si vogliono determinare:

1. il legame tra h_A e la velocità di ingresso nel loop v_C ;
2. il legame tra v_C e l'altezza h raggiunta nel loop.

Applicando la conservazione dell'energia meccanica all'interno del loop, con $h = R - R \cos \theta$ e $\dot{s} = R\dot{\theta} = v$:

$$E_M = T + U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \text{costante}, \quad (129)$$

e il valore della costante è fissato dalle condizioni iniziali, ad esempio dall'altezza h_A o dalla velocità v_C all'ingresso del loop.

²¹Per $\cos \theta = 0$ (ossia $\theta = \pi/2$) si avrebbe $\dot{\theta} = 0$, cioè il punto è fermo in quella posizione: caso limite.

13 Equilibrio e studio della stabilità per un punto materiale con un grado di libertà

In generale, la sollecitazione agente su un punto materiale dipende dalla posizione, dalla velocità e dal tempo. Si consideri un punto materiale vincolato a muoversi lungo una traiettoria assegnata, descritto dall'ascissa curvilinea s : il sistema possiede un solo grado di libertà.

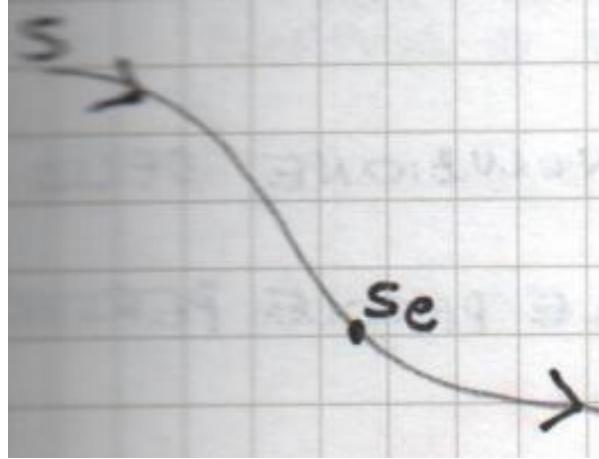


Figura 25: Traiettoria assegnata S con un punto materiale nella posizione di equilibrio s_e . Il sistema possiede un solo grado di libertà, parametrizzato dall'ascissa curvilinea s .

14 Stabilità dell'equilibrio di un punto materiale su traiettoria assegnata

Lo studio della stabilità dell'equilibrio rappresenta uno dei problemi centrali della meccanica razionale: dato un punto materiale in equilibrio, ci si chiede se, a seguito di una piccola perturbazione, il sistema tenda a ritornare alla configurazione di equilibrio oppure se ne allontani indefinitamente. La risposta a questa domanda dipende in modo cruciale dalle proprietà della sollecitazione agente sul sistema, e la sua analisi richiede la linearizzazione dell'equazione del moto nell'intorno della posizione di equilibrio.

14.1 Condizioni di equilibrio e sollecitazione

Si consideri un punto materiale soggetto ad una sollecitazione \vec{f} che dipende, in generale, dalla posizione \vec{x} , dalla velocità \vec{x}' e dal tempo t . La condizione di **equilibrio statico** richiede che, in corrispondenza di una posizione $\vec{x}_e = \text{cost.}$ e di velocità nulla $\vec{v} = \vec{0}$, la sollecitazione si annulli identicamente:

$$\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0} \quad \forall t. \quad (130)$$

In altre parole, la sollecitazione complessiva che agisce sul punto materiale quando questo si trova fermo nella posizione di equilibrio è identicamente nulla per ogni istante di tempo.

Qualora il punto materiale sia vincolato a muoversi lungo una **traiettoria assegnata**, il sistema possiede un solo grado di libertà e lo stato del moto è completamente descritto dall'ascissa curvilinea s e dalla sua derivata temporale \dot{s} . La sollecitazione può dunque essere riscritta in funzione del solo parametro s :

$$\vec{f}(s, \dot{s}, t) \longrightarrow f(s_e, 0, t) = 0 \quad \forall t, \quad (131)$$

dove $s_e = \text{cost.}$ è l'ascissa curvilinea corrispondente alla posizione di equilibrio e la condizione $\dot{s} = 0$ esprime la quiete del punto.

14.2 Equazione del moto linearizzata

Per studiare la stabilità dell'equilibrio si perturba il sistema con una piccola sollecitazione e si analizza l'evoluzione della perturbazione nel tempo. Si assume che il raggio di curvatura della traiettoria nell'intorno del punto di equilibrio sia sufficientemente grande ($R \rightarrow \infty$), cosicché la componente normale della sollecitazione risulti trascurabile²². L'equazione oraria, proiettata lungo la direzione tangente \vec{u}_t , assume la forma:

$$m \ddot{s} = f(s, \dot{s}, t), \quad (132)$$

dove f indica la componente tangenziale della sollecitazione. All'equilibrio, tale equazione si riduce a $m \ddot{s} = f(s_e, 0, t) = 0$.

Si introduca ora una piccola perturbazione $s'(t)$ rispetto alla posizione di equilibrio, ponendo:

$$s(t) = s_e + s'(t). \quad (133)$$

L'obiettivo è determinare come varia lo stato dinamico del sistema nell'intorno dello stato meccanico di equilibrio $(s_e, 0)$.

Espansione in serie di Taylor. Si espande la funzione sollecitazione $f(s, \dot{s}, t)$ in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio $(s_e, 0)$, arrestando lo sviluppo al primo ordine:

$$f(s, \dot{s}, t) \approx f(s_e, 0, t) + \frac{\partial f}{\partial s} \bigg|_{\text{eq}} (s - s_e) + \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \bigg|_{\text{eq}} (\dot{s} - 0) + o(s'^2, \dot{s}'^2). \quad (134)$$

Poiché $s - s_e = s'$ e $\dot{s} = \dot{s}'$, si ottiene:

$$f(s, \dot{s}, t) \approx f(s_e, 0, t) + \frac{\partial f}{\partial s} \bigg|_{\text{eq}} s' + \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \bigg|_{\text{eq}} \dot{s}' + o(s'^2, \dot{s}'^2). \quad (135)$$

Sostituendo nell'equazione oraria (132) e osservando che $f(s_e, 0, t) = 0$ per la condizione di equilibrio, e che $\ddot{s}(t) = \ddot{s}'(t)$ essendo s_e costante, si perviene all'equazione linearizzata:

$$m \ddot{s}' = \frac{\partial f}{\partial s} \bigg|_{\text{eq}} s' + \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \bigg|_{\text{eq}} \dot{s}', \quad (136)$$

in cui i termini di ordine superiore al primo sono stati trascurati.

14.3 Equazione caratteristica e parametri G e K

Per rendere più compatta la trattazione, si introducono i parametri:

$$G = - \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \bigg|_{\text{eq}}, \quad K = - \frac{\partial f}{\partial s} \bigg|_{\text{eq}}, \quad (137)$$

cosicché l'equazione (136) si riscrive nella forma canonica:

$$m \ddot{s}' + G \dot{s}' + K s' = 0. \quad (138)$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui incognita è l'evoluzione temporale della perturbazione $s'(t)$. Essa governa la **dinamica delle piccole perturbazioni** nell'intorno del punto di equilibrio $(s_e, 0)$.

²²Questa ipotesi equivale a considerare la traiettoria localmente rettilinea nell'intorno di s_e , il che consente di proiettare l'equazione del moto esclusivamente lungo la direzione tangente \vec{u}_t .

Interpretazione fisica. Il parametro K ha il ruolo di una *rigidezza*: se $K > 0$, la sollecitazione nell'intorno dell'equilibrio è di tipo richiamante (tende a riportare il punto verso s_e); se $K < 0$, è di tipo repulsivo. Il parametro G ha il ruolo di uno *smorzamento*: se $G > 0$, la sollecitazione dissipava energia cinetica della perturbazione; se $G < 0$, la amplifica. La massa m è sempre positiva.

Si cerca una soluzione del tipo $s'(t) = C e^{\gamma t}$; sostituendo nell'equazione (138) si ottiene l'equazione caratteristica:

$$m\gamma^2 + G\gamma + K = 0, \quad (139)$$

le cui radici sono:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 - 4mK}}{2m}. \quad (140)$$

La soluzione generale è pertanto:

$$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}, \quad (141)$$

e il comportamento asintotico per $t \rightarrow \infty$ dipende dal segno della parte reale delle radici $\gamma_{1,2}$, dunque dai valori di G e K .

14.4 Classificazione dei casi

Si analizzano sistematicamente tutti i casi possibili, organizzati in base ai segni dei parametri G e K .

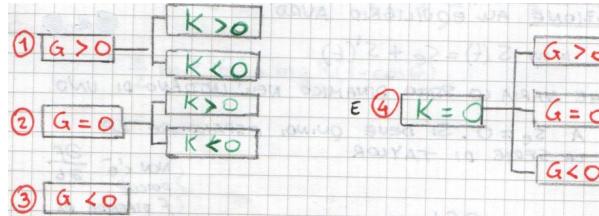


Figura 26: Diagramma riassuntivo dei casi per la classificazione della stabilità dell'equilibrio in funzione dei parametri G e K .

14.4.1 Caso 1: $G > 0, K > 0$ — Equilibrio asintoticamente stabile

Quando sia $G > 0$ che $K > 0$, il calcolo delle radici $\gamma_{1,2}$ conduce a due sottocasi.

Radici reali negative ($G^2 - 4mK > 0$). Il discriminante è positivo e si ottengono due radici reali distinte, entrambe negative. La soluzione generale è:

$$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty, \quad (142)$$

poiché $\gamma_1 < 0$ e $\gamma_2 < 0$. Il punto materiale ritorna alla posizione di equilibrio senza oscillare, con un decadimento esponenziale monotono.

Radici complesse coniugate con parte reale negativa ($G^2 - 4mK < 0$). Il discriminante è negativo e le radici assumono la forma $\gamma_{1,2} = \beta \pm j\omega$, dove:

$$\beta = -\frac{G}{2m} < 0 \quad (\text{poiché } G > 0). \quad (143)$$

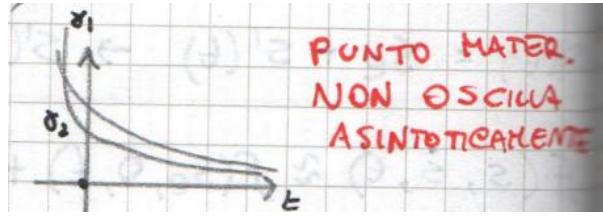


Figura 27: Andamento della perturbazione $s'(t)$ nel caso di equilibrio asintoticamente stabile con radici reali negative: il punto materiale non oscilla e ritorna asintoticamente all'equilibrio.

La soluzione si scrive:

$$s'(t) = e^{\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty, \quad (144)$$

poiché $\beta < 0$. Il punto materiale oscilla attorno alla posizione di equilibrio con ampiezza esponenzialmente decrescente.

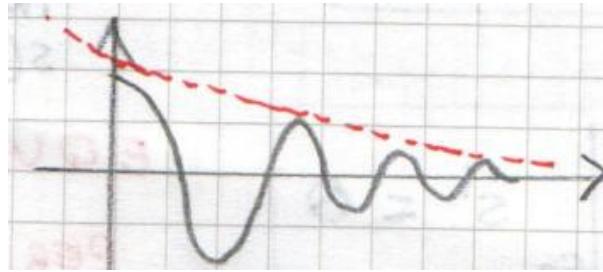


Figura 28: Andamento della perturbazione $s'(t)$ nel caso di equilibrio asintoticamente stabile con radici complesse coniugate: il punto materiale oscilla con ampiezza decrescente, tendendo asintoticamente all'equilibrio.

14.4.2 Caso 2: $G > 0, K < 0$ — Equilibrio instabile

Quando $G > 0$ e $K < 0$, il discriminante $G^2 - 4mK$ è sempre positivo (poiché $-4mK > 0$), e si ottengono due radici reali distinte, una positiva e una negativa: $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 < 0$. La soluzione generale è:

$$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \rightarrow \infty \quad \text{per } t \rightarrow \infty, \quad (145)$$

poiché il termine con $\gamma_1 > 0$ prevale asintoticamente. Il punto materiale si allontana dalla posizione di equilibrio senza oscillare: l'equilibrio è instabile.

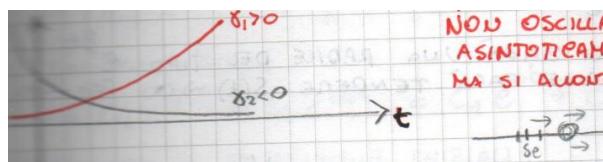


Figura 29: Andamento della perturbazione $s'(t)$ nel caso $G > 0, K < 0$: equilibrio instabile con divergenza esponenziale monotona.

14.4.3 Caso 3: $G = 0, K > 0$ — Equilibrio stabile (moto oscillatorio)

In assenza di smorzamento ($G = 0$) e con rigidezza positiva ($K > 0$), l'equazione del moto si riduce a:

$$m \ddot{s}' + K s' = 0. \quad (146)$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono puramente immaginarie:

$$\gamma_{1,2} = \pm j\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (147)$$

e la soluzione è:

$$s'(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (148)$$

Il punto materiale assume un moto oscillatorio confinato attorno alla posizione di equilibrio s_e , con ampiezza costante nel tempo. L'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile, poiché la perturbazione non si smorza.

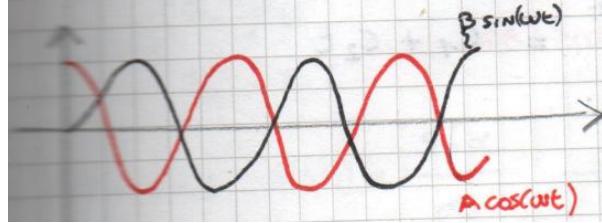


Figura 30: Andamento della perturbazione $s'(t)$ nel caso $G = 0$, $K > 0$: moto oscillatorio armonico confinato attorno all'equilibrio.

Interpretazione fisica. La condizione $G = 0$ implica che la sollecitazione proiettata f non dipende dalla velocità \dot{s} , ovvero $\partial f / \partial \dot{s}|_{\text{eq}} = 0$. La forza è dunque puramente posizionale e non vi è alcun meccanismo dissipativo: l'energia meccanica si conserva e il moto è periodico.

14.4.4 Caso 4: $G = 0$, $K < 0$ — Equilibrio instabile

Con $G = 0$ e $K < 0$, l'equazione del moto è ancora $m \ddot{s}' + K s' = 0$, ma ora le radici sono reali e distinte:

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{K}{m}}, \quad \text{con } -\frac{K}{m} > 0 \text{ poiché } K < 0, \quad (149)$$

di cui una positiva ($\gamma_1 > 0$) e una negativa ($\gamma_2 < 0$). La soluzione è:

$$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \rightarrow \infty \quad \text{per } t \rightarrow \infty, \quad (150)$$

poiché il termine esponenziale crescente prevale. L'equilibrio è instabile.

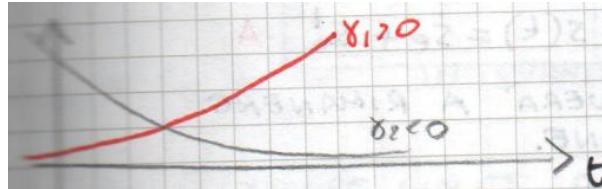


Figura 31: Andamento della perturbazione $s'(t)$ nel caso $G = 0$, $K < 0$: equilibrio instabile con divergenza esponenziale.

14.4.5 Caso 5: $G < 0$ — Equilibrio instabile (per qualsiasi K)

Quando $G < 0$, indipendentemente dal valore di K , l'equilibrio è sempre instabile. Riprendendo l'espressione generale delle radici (140), si osserva che il termine $-G/(2m)$ è positivo (poiché $G < 0$), e pertanto la parte reale di almeno una delle due radici è positiva, qualunque sia il segno del discriminante $G^2 - 4mK$:

- se $G^2 - 4mK > 0$, si hanno due radici reali di cui almeno una positiva;
- se $G^2 - 4mK = 0$, si ha una radice reale doppia positiva;
- se $G^2 - 4mK < 0$, si hanno due radici complesse coniugate con parte reale positiva $\beta = -G/(2m) > 0$.

In tutti i casi la soluzione contiene un termine del tipo $e^{\beta t}$ con $\beta > 0$, cosicché $s'(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$, sia che il moto sia oscillante sia che non lo sia. Il punto materiale si allontana indefinitamente dalla posizione di equilibrio.

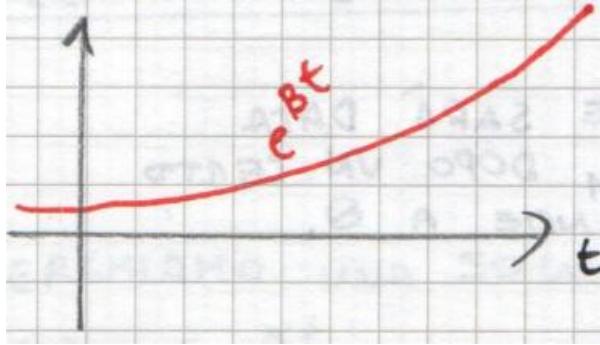


Figura 32: Andamento qualitativo della perturbazione nel caso $G < 0$: crescita esponenziale $e^{\beta t}$ con $\beta > 0$, indipendentemente dal valore di K .

Interpretazione fisica. La condizione $G < 0$ corrisponde ad una sollecitazione che *amplifica* la velocità della perturbazione anziché smorzarla: il sistema riceve energia dall'esterno in modo proporzionale alla velocità, rendendo impossibile la stabilità.

14.4.6 Caso 6: $K = 0$ — Equilibrio indifferente (con distinzione dei sottocasi)

Quando $K = 0$, la sollecitazione nell'intorno dell'equilibrio non dipende dalla posizione ($\partial f/\partial s|_{\text{eq}} = 0$) e la natura dell'equilibrio dipende dal valore di G . Si distinguono tre sottocasi.

Sottocaso $K = 0, G = 0$. L'equazione del moto si riduce a $m\ddot{s}' = 0$, ovvero la sollecitazione non dipende né dalla posizione né dalla velocità. L'equazione caratteristica $m\gamma^2 = 0$ fornisce una radice doppia $\gamma_{1,2} = 0$, e la soluzione generale è²³:

$$s'(t) = C_1 + C_2 t. \quad (151)$$

Imponendo le condizioni iniziali generiche $s'(0) = s'_0$ e $\dot{s}'(0) = \dot{s}'_0$, si ottiene $C_1 = s'_0$ e $C_2 = \dot{s}'_0$, da cui:

$$s'(t) = s'_0 + \dot{s}'_0 t. \quad (152)$$

Il comportamento per $t \rightarrow \infty$ dipende dalla natura della perturbazione iniziale:

A) Perturbazione in posizione ($s'_0 \neq 0, \dot{s}'_0 = 0$). Si ha $s'(t) = s'_0$ per ogni t , ovvero:

$$s(t) = s_e + s'_0. \quad (153)$$

Il punto materiale rimane indefinitamente in quiete nella nuova posizione: l'equilibrio è *indifferente*.

²³Nel caso di radici coincidenti $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine include il termine secolare $C_2 t$ oltre alla costante C_1 .

B) Perturbazione in velocità ($s'_0 = 0, \dot{s}'_0 \neq 0$). Si ha $s'(t) = \dot{s}'_0 t$, ovvero:

$$s(t) = s_e + \dot{s}'_0 t \rightarrow \infty \quad \text{per } t \rightarrow \infty. \quad (154)$$

Il punto materiale si allontana indefinitamente dall'equilibrio con moto uniforme: l'equilibrio è *instabile* rispetto a perturbazioni in velocità.

Sottocaso $K = 0, G > 0$. L'equazione del moto diventa $m \ddot{s}' + G \dot{s}' = 0$, la cui equazione caratteristica $m\gamma^2 + G\gamma = 0$ fornisce due radici reali distinte:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{G}{m} = -\alpha \quad (\alpha > 0 \text{ poiché } G > 0). \quad (155)$$

La soluzione generale è:

$$s'(t) = C_1 + C_2 e^{-\alpha t}. \quad (156)$$

Imponendo le condizioni iniziali $s'(0) = s'_0$ e $\dot{s}'(0) = \dot{s}'_0$, si ricava:

$$C_1 = \frac{\alpha s'_0 + \dot{s}'_0}{\alpha} = s'_0 + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}, \quad C_2 = -\frac{\dot{s}'_0}{\alpha}, \quad (157)$$

e la soluzione diventa:

$$s'(t) = \frac{\alpha s'_0 + \dot{s}'_0}{\alpha} - \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{-\alpha t}. \quad (158)$$

Anche in questo caso si distinguono due situazioni:

A) Perturbazione in posizione ($s'_0 \neq 0, \dot{s}'_0 = 0$). Per $t \rightarrow \infty$ si ha $s'(t) \rightarrow s'_0$, ovvero:

$$s(t) = s_e + s'_0. \quad (159)$$

Il punto materiale rimane indefinitamente in quiete nella posizione perturbata.

B) Perturbazione in velocità ($s'_0 = 0, \dot{s}'_0 \neq 0$). Per $t \rightarrow \infty$ il termine esponenziale si estingue e si ha:

$$s'(t) \rightarrow \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}, \quad \text{ovvero} \quad s_\infty = s_e + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}. \quad (160)$$

Il punto materiale, perturbato in velocità, subisce un moto esponenzialmente decelerato (grazie allo smorzamento $G > 0$) e raggiunge asintoticamente una nuova posizione di quiete s_∞ , distante dall'equilibrio originario di una quantità \dot{s}'_0/α . L'equilibrio è dunque stabile in senso lato²⁴.

Sottocaso $K = 0, G < 0$. L'equazione del moto è ancora $m \ddot{s}' + G \dot{s}' = 0$, ma ora $G < 0$. L'equazione caratteristica fornisce:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{G}{m} = \alpha \quad (\alpha > 0 \text{ poiché } G < 0), \quad (161)$$

e la soluzione generale è:

$$s'(t) = C_1 + C_2 e^{\alpha t}. \quad (162)$$

Poiché $\alpha > 0$, il termine esponenziale cresce indefinitamente e $s'(t) \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$, qualsiasi siano le condizioni iniziali (purché $C_2 \neq 0$). L'equilibrio è **instabile**: il meccanismo di amplificazione ($G < 0$) impedisce al sistema di rimanere nell'intorno dell'equilibrio.

²⁴Si noti che, pur non ritornando alla posizione originaria s_e , il punto materiale non diverge: la perturbazione rimane limitata per $t \rightarrow \infty$. Tuttavia non si tratta di stabilità asintotica, poiché $s'(t) \not\rightarrow 0$.

14.5 Metodi energetici per lo studio della stabilità: forze conservative

Quando la sollecitazione dipende esclusivamente dalla posizione, ovvero $\vec{F} = \vec{F}(s)$, si è in presenza di una **forza conservativa**²⁵. In tal caso esiste una funzione potenziale φ (o, equivalentemente, un'energia potenziale U) tale che:

$$\vec{F} = \nabla \varphi = -\nabla U, \quad \text{con } \vec{F} = \vec{F}(s). \quad (163)$$

Proiettando l'equazione del moto lungo l'unico grado di libertà — nell'ipotesi, già adottata, di punto materiale vincolato ad una traiettoria assegnata con raggio di curvatura $R \rightarrow \infty$ nell'intorno dell'equilibrio, cosicché la proiezione lungo la normale sia nulla —

15 Metodo energetico per la stabilità dell'equilibrio

Quando un punto materiale è vincolato a muoversi lungo una traiettoria e le forze agenti sono conservative, lo studio della stabilità dell'equilibrio può essere ricondotto interamente all'analisi dell'energia potenziale. Questo approccio, noto come *metodo energetico*, consente di classificare le posizioni di equilibrio senza risolvere esplicitamente l'equazione del moto, sfruttando la relazione tra la forza e il gradiente del potenziale.

15.1 Forza e derivata dell'energia potenziale lungo la traiettoria

Sia $U(\vec{x}) = U(x, y, z)$ l'energia potenziale associata a una forza conservativa $\vec{F} = -\nabla U$. La componente della forza lungo la direzione tangente \hat{e} alla traiettoria, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s , è data da

$$\vec{F} \cdot \hat{e} = (-\nabla U) \cdot \hat{e} = -\frac{\partial U}{\partial s} = f(s). \quad (164)$$

Per dimostrare la (164), si esprime il gradiente di U nella terna intrinseca $(\hat{e}, \hat{n}, \hat{b})$:

$$-\nabla U(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial s} \hat{e} + \frac{\partial U}{\partial n} \hat{n} + \frac{\partial U}{\partial b} \hat{b}\right). \quad (165)$$

Proiettando sulla direzione tangente e sfruttando l'ortonormalità della terna ($\hat{e} \cdot \hat{e} = 1$, $\hat{n} \cdot \hat{e} = 0$, $\hat{b} \cdot \hat{e} = 0$), si ottiene immediatamente

$$-\nabla U(\vec{x}) \cdot \hat{e} = -\frac{\partial U}{\partial s}, \quad (166)$$

il che completa la dimostrazione.

15.2 Condizioni di equilibrio

Se l'energia potenziale U dipende dalla posizione esclusivamente attraverso l'ascissa curvilinea s , la forza generalizzata f si riduce a una funzione della sola s : $f = f(s)$. Le condizioni di equilibrio statico richiedono che la forza si annulli nella posizione di equilibrio s_e , ossia

$$f(s_e) = 0 \iff -\frac{\partial U}{\partial s} \Big|_{s_e} = 0. \quad (167)$$

Le posizioni di equilibrio corrispondono dunque ai punti stazionari dell'energia potenziale.

²⁵Una forza si dice conservativa quando il lavoro da essa compiuto lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo, condizione equivalente all'esistenza di una funzione potenziale.

15.3 Studio della stabilità: linearizzazione

L'equazione del moto scalare lungo la traiettoria è

$$m \ddot{s} = f(s). \quad (168)$$

Per studiare il comportamento del sistema in prossimità dell'equilibrio s_e , si introduce una piccola perturbazione $s'(t)$ tale che $s(t) = s_e + s'(t)$, da cui $\ddot{s}(t) = \ddot{s}'(t)$. Linearizzando $f(s)$ attorno a s_e mediante sviluppo di Taylor al primo ordine,

$$f(s) \approx f(s_e) + \left. \frac{df}{ds} \right|_{s_e} s' + O(s'^2), \quad (169)$$

e trascurando i termini di ordine superiore al primo, tenendo conto che $f(s_e) = 0$, l'equazione del moto linearizzata diviene

$$m \ddot{s}' = \left. \frac{df}{ds} \right|_{s_e} s'. \quad (170)$$

Poiché $f(s) = -\partial U / \partial s$, si ha

$$\frac{df}{ds} = -\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}, \quad (171)$$

e definendo la *rigidezza effettiva*

$$K = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right|_{s_e}, \quad (172)$$

l'equazione linearizzata assume la forma canonica

$$m \ddot{s}' + K s' = 0. \quad (173)$$

Interpretazione fisica. La costante K rappresenta la curvatura del profilo di energia potenziale nel punto di equilibrio. Se $K > 0$ il potenziale presenta un minimo locale e la “forza di richiamo” $-K s'$ tende a riportare il sistema verso s_e ; se $K < 0$ il potenziale ha un massimo e la forza allontana il sistema dall'equilibrio; se $K = 0$ il potenziale è localmente piatto e occorre un'analisi più fine.

15.4 Classificazione dell'equilibrio

La natura delle soluzioni dell'equazione (173) dipende dal segno di K . Si distinguono tre casi fondamentali.

15.4.1 Caso I: $K = 0$ Equilibrio indifferente

Quando $\partial^2 U / \partial s^2|_{s_e} = 0$, l'equazione (173) si riduce a $m \ddot{s}' = 0$. L'equazione caratteristica $m \gamma^2 = 0$ ammette la radice $\gamma_{1,2} = 0$ con molteplicità $\nu = 2$, e la soluzione generale è

$$s'(t) = C_1 + C_2 t. \quad (174)$$

Imponendo le condizioni iniziali $s'(0) = s'_0$ e $\dot{s}'(0) = \dot{s}'_0$, si ottiene $C_1 = s'_0$ e $C_2 = \dot{s}'_0$, dunque

$$s(t) = s_e + s'_0 + \dot{s}'_0 t. \quad (175)$$

Si distinguono due sottocasi:

Perturbazione in sola posizione ($s'_0 \neq 0, \dot{s}'_0 = 0$). La soluzione diviene $s(t) = s_e + s'_0$: il punto materiale rimane in quiete nella posizione perturbata, senza tendenza a tornare né ad allontanarsi.

Perturbazione in sola velocità ($s'_0 = 0, \dot{s}'_0 \neq 0$). La soluzione diviene $s(t) = s_e + s'_0 t$: il punto si allontana indefinitamente dalla posizione di equilibrio con moto uniforme. L'equilibrio è dunque instabile rispetto a perturbazioni in velocità²⁶.

15.4.2 Caso II: $K > 0$ Equilibrio stabile

Quando $\partial^2 U / \partial s^2|_{s_e} > 0$, l'equazione caratteristica associata alla (173) è

$$\gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \implies \gamma_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (176)$$

Le radici sono puramente immaginarie coniugate e la soluzione generale è

$$s(t) = s_e + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (177)$$

dove le costanti A e B sono determinate dalle condizioni iniziali. A meno che queste non siano identicamente nulle, il punto materiale oscilla attorno alla posizione di equilibrio s_e con moto armonico di pulsazione ω .

Interpretazione fisica. Il punto di equilibrio stabile corrisponde a un *minimo* dell'energia potenziale. La forza agisce sempre come forza di richiamo, e l'energia cinetica si converte periodicamente in energia potenziale e viceversa, senza che il sistema possa allontanarsi indefinitamente.

15.4.3 Caso III: $K < 0$ Equilibrio instabile

Quando $\partial^2 U / \partial s^2|_{s_e} < 0$, l'equazione caratteristica fornisce radici reali e distinte:

$$\gamma^2 = -\frac{K}{m} > 0 \implies \gamma_{1,2} = \pm \omega, \quad \omega = \sqrt{-\frac{K}{m}}. \quad (178)$$

Si noti che qui ω è una quantità reale positiva, poiché $K < 0$ rende $-K/m > 0$. La soluzione generale è

$$s(t) = s_e + C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (179)$$

La presenza del termine $e^{\omega t}$ implica che, per qualsiasi perturbazione non nulla, il punto si allontana esponenzialmente dalla posizione di equilibrio. Il punto di equilibrio instabile corrisponde a un *massimo* dell'energia potenziale.

15.5 Sintesi del criterio energetico

In conclusione, per un punto materiale soggetto a sole forze conservative e vincolato a una traiettoria parametrizzata dall'ascissa curvilinea s , le posizioni di equilibrio stabile coincidono con i *punti di minimo* dell'energia potenziale U , le posizioni di equilibrio instabile con i *punti di massimo*, e le posizioni di equilibrio indifferente con le zone in cui U è costante²⁷.

²⁶Per $K = 0$ la classificazione dell'equilibrio come stabile o instabile richiede in generale l'analisi dei termini di ordine superiore nello sviluppo di Taylor dell'energia potenziale.

²⁷Questo risultato è una conseguenza del teorema di Lagrange–Dirichlet, che garantisce la stabilità dell'equilibrio nei minimi stretti dell'energia potenziale.

15.6 Estensione a più gradi di libertà

Il risultato precedente può essere esteso a sistemi con più gradi di libertà. Nel caso di due gradi di libertà, ad esempio, l'energia potenziale è una funzione $U(x_1, x_2)$ e la classificazione dell'equilibrio richiede lo studio della matrice hessiana di U valutata nel punto di equilibrio.

16 Approssimazione lineare di funzioni scalari e vettoriali

La linearizzazione delle equazioni del moto attorno a una posizione di equilibrio si fonda sulla teoria dell'approssimazione lineare di funzioni a più variabili. Si richiamano qui i risultati essenziali.

16.1 Funzione reale a n variabili reali

Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile nell'aperto Ω , con $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Lo sviluppo al primo ordine di f attorno al punto $\vec{\alpha} \in \Omega$ è

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{\alpha}) + \nabla f(\vec{\alpha}) \cdot (\vec{x} - \vec{\alpha}), \quad (180)$$

dove il gradiente è il vettore

$$\nabla f(\vec{\alpha}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{\alpha}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{\alpha}) \right), \quad (181)$$

e il prodotto scalare si espande come

$$\nabla f(\vec{\alpha}) \cdot (\vec{x} - \vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\alpha}) (x_i - \alpha_i). \quad (182)$$

Dal punto di vista geometrico, l'espressione (180) definisce l'iperpiano n -dimensionale tangente al grafico di f nel punto $\vec{\alpha}$.

16.2 Funzione vettoriale a n variabili

Sia $\vec{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con componenti $f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})$, ciascuna differenziabile in Ω aperto. L'approssimazione lineare componente per componente nel punto $\vec{\alpha} \in \Omega$ è

$$f_i(\vec{x}) \approx f_i(\vec{\alpha}) + \nabla f_i(\vec{\alpha}) \cdot (\vec{x} - \vec{\alpha}), \quad i = 1, \dots, m. \quad (183)$$

Raccogliendo tutte le componenti in forma compatta si ottiene

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{\alpha}) + \mathbf{J}_f(\vec{\alpha}) (\vec{x} - \vec{\alpha}), \quad (184)$$

dove $\mathbf{J}_f(\vec{\alpha})$ è la *matrice jacobiana* di \vec{f} valutata in $\vec{\alpha}$, le cui righe sono i gradienti delle m componenti:

$$\mathbf{J}_f(\vec{\alpha}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{\alpha}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{\alpha}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{\alpha}) \end{bmatrix}. \quad (185)$$

16.3 Linearizzazione dell'equazione del moto vettoriale

Data l'equazione del moto di un punto materiale in forma generale,

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \quad (186)$$

si perturba il sistema attorno alla posizione di equilibrio statico \vec{x}_e ponendo $\vec{x}(t) = \vec{x}_e + \vec{x}'(t)$. Espandendo \vec{F} in serie di Taylor al primo ordine e ricordando che $\vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}$ per definizione di equilibrio, si ottiene, trascurando i termini di ordine superiore al primo,

$$m \ddot{\vec{x}'}(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_k} \bigg|_{\vec{x}_e} x'_k + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{x}_k} \bigg|_{\vec{x}_e} \dot{x}'_k, \quad (187)$$

dove $\vec{x} = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$. L'equazione (187) rappresenta un sistema di tre equazioni differenziali scalari, lineari, omogenee e a coefficienti costanti, che governano le piccole perturbazioni attorno alla posizione di equilibrio stazionario. L'analisi delle soluzioni di tale sistema — in particolare il segno della parte reale degli autovalori della matrice dei coefficienti — determina la stabilità o l'instabilità dell'equilibrio²⁸.

17 Moti particolari

Si esaminano ora alcune classi di moti che ricorrono frequentemente nello studio della dinamica del punto materiale, ciascuna caratterizzata da specifiche proprietà geometriche o cinematiche.

17.1 Moto rettilineo

Un moto si dice **rettilineo** quando, in ogni istante, il vettore accelerazione è parallelo al vettore velocità:

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \text{in ogni istante.} \quad (188)$$

Ricordando le espressioni intrinseche $\vec{v} = \dot{s} \hat{e}$ e $\vec{a} = \ddot{s} \hat{e} + (\dot{s}^2/R) \hat{n}$, il prodotto vettoriale si riduce a

$$\vec{a} \times \vec{v} = \frac{\dot{s}^3}{R} (\hat{n} \times \hat{e}).$$

Poiché $\hat{n} \times \hat{e} \neq \vec{0}$ in generale, la condizione (188) è soddisfatta se e solo se il raggio di curvatura $R \rightarrow \infty$, ossia la traiettoria è una retta.

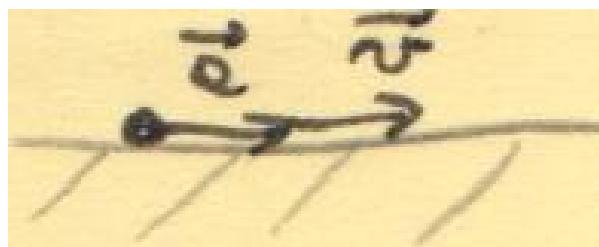


Figura 33: Punto materiale in moto lungo una traiettoria curva, con i vettori velocità \vec{v} e accelerazione \vec{a} .

²⁸In presenza del termine in \dot{x}'_k , il sistema include effetti dissipativi o giroscopici, e la classificazione della stabilità richiede lo studio completo dello spettro della matrice associata al sistema linearizzato.

17.2 Moto piano

Un moto si dice **piano** quando il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{v}$ ha direzione costante nel tempo. L'intensità di tale vettore può variare, ma la sua direzione rimane fissa: ciò garantisce che la traiettoria giace interamente in un piano. Se la direzione variasse, la traiettoria si svilupperebbe nello spazio tridimensionale.

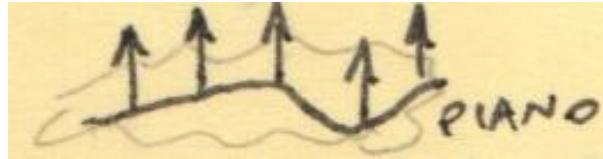


Figura 34: Moto piano: i vettori \vec{v} e \vec{a} giacciono in un piano fisso, e il loro prodotto vettoriale mantiene direzione costante.

17.3 Moto centrale

Dato un punto fisso C , si definisce **moto centrale** rispetto a C il moto per il quale, in ogni istante,

$$\vec{a} \times \overrightarrow{CP} = \vec{0}, \quad (189)$$

dove P è la posizione del punto materiale. La condizione (189) implica che l'accelerazione è sempre diretta lungo la congiungente CP : non esiste componente dell'accelerazione ortogonale a tale direzione.

17.4 Moto circolare

Il **moto circolare** è il moto lungo una traiettoria circolare di centro O e raggio R .

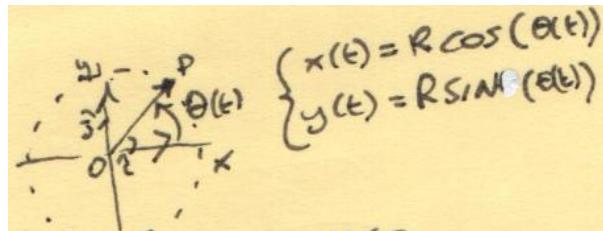


Figura 35: Punto materiale P in moto circolare di raggio R attorno al centro O . L'angolo $\theta(t)$ individua la posizione sulla circonferenza.

17.5 Moto armonico

Il **moto armonico** è descritto, nella sua forma generale, dalle leggi orarie

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t), \\ y(t) = B \sin(\omega t), \end{cases} \quad (190)$$

dove $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ è la pulsazione, f la frequenza e $T = 1/f$ il periodo. Quando $A = B = R$ il moto armonico si riduce al moto circolare uniforme; nel caso unidimensionale ($B = 0$) si ottiene l'oscillazione armonica semplice lungo l'asse x ²⁹.

²⁹Il moto armonico bidimensionale con $A \neq B$ descrive un'ellisse; il caso $A = B$ corrisponde alla circonferenza.

18 Esempi di forze conservative

Si presentano ora i principali esempi di forze conservative che ricorrono nella meccanica del punto materiale, con le corrispondenti espressioni dell'energia potenziale.

18.1 Forza peso e campo di forza uniforme

Scegliendo un sistema di riferimento con l'asse \hat{j} parallelo e opposto alla direzione della forza peso $m\vec{g}$, l'energia potenziale associata è

$$U_P(y) = -mgy + C. \quad (191)$$

Ponendo $U_P(0) = 0$ si ottiene $C = 0$. L'energia potenziale rimane costante sui piani orizzontali ($y = \text{costante}$), che rappresentano le *superfici equipotenziali* per la forza peso.

Quanto detto si generalizza immediatamente a qualsiasi **campo di forza uniforme**, ossia una forza della forma $\vec{F} = \alpha \hat{w}$ con α costante e \hat{w} versore fisso. L'energia potenziale associata è

$$U_F(y) = -\alpha y + C, \quad (192)$$

dove y è l'ascissa individuata dal versore \hat{w} . Anche in questo caso, ponendo $U_F(0) = 0$, si ha $C = 0$.

18.2 Campi di forza centrali

Si definisce **campo di forza centrale** il campo vettoriale in \mathbb{R}^3 della forma

$$\vec{F} = \psi(r) \hat{r} = \psi(r) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \quad (193)$$

dove \vec{r} è il vettore posizione che individua il punto P rispetto al centro di forza C , $r = \|\vec{r}\|$ è la distanza da C e $\psi(r)$ è una funzione scalare del solo modulo r .

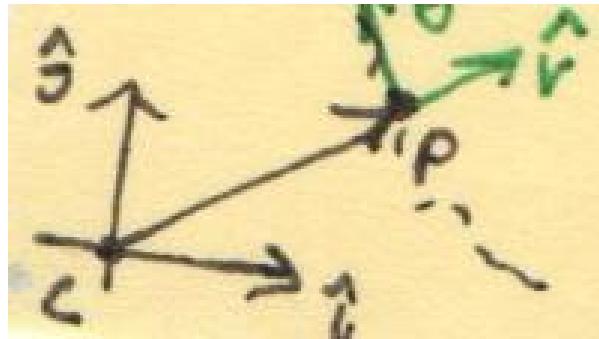


Figura 36: Sistema di riferimento tridimensionale con il vettore posizione \vec{r} dal centro di forza C (nell'origine) al punto P , e il versore radiale \hat{r} .

Tra i campi di forza centrali rivestono particolare importanza i seguenti.

18.2.1 Attrazione gravitazionale

Se nel centro C è presente una massa M , una massa m posta in P subisce una forza attrattiva verso C con

$$\psi(r) = -G \frac{Mm}{r^2}, \quad (194)$$

dove G è la costante di gravitazione universale. Il segno negativo indica che la forza è diretta verso il centro (attrattiva) quando \vec{r} punta da C verso P .

18.2.2 Attrazione coulombiana

In modo analogo alla gravitazione, la forza elettrostatica tra due cariche q e Q è descritta da

$$\psi(r) = K \frac{qQ}{r^2}, \quad (195)$$

dove K è la costante di Coulomb³⁰. Il segno positivo corrisponde alla natura repulsiva della forza per cariche dello stesso segno; per cariche di segno opposto il prodotto $qQ < 0$ rende la forza attrattiva.

18.2.3 Forza elastica

La forza elastica esercitata da una molla di costante elastica K_E e lunghezza a riposo r_0 è descritta da

$$\psi(r) = -K_E (r - r_0). \quad (196)$$

Quando $r > r_0$ la molla è estesa e la forza è diretta verso il centro C (richiamo); quando $r < r_0$ la molla è compressa e la forza è diretta in verso opposto (repulsione). In entrambi i casi la forza tende a riportare il punto verso la configurazione di equilibrio $r = r_0$.

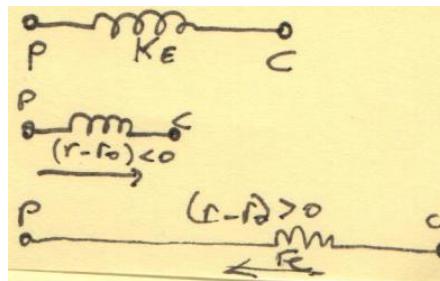


Figura 37: Forza elastica: nei tre casi illustrati si evidenzia il comportamento della forza per $r = r_0$ (equilibrio), $r < r_0$ (compressione) e $r > r_0$ (estensione).

19 Energia potenziale nei campi di forze centrali

Nei campi di forze centrali, in cui la funzione di forza ψ dipende esclusivamente dalla distanza $r = |\vec{r}|$, con $\vec{r} = \vec{CP}$ il vettore posizione del punto P rispetto al centro C , l'energia potenziale assume una forma particolarmente semplice. Poiché la forza è diretta lungo la congiungente con il centro e il suo modulo è funzione della sola distanza, l'energia potenziale si esprime come

$$U(r) = - \int \psi(r) dr. \quad (197)$$

Esempio: campo gravitazionale. Nel caso della forza gravitazionale, in cui $\psi(r) = -G Mm/r^2$, si ottiene

$$U(r) = - \int \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = - \frac{G Mm}{r}. \quad (198)$$

³⁰Nella notazione SI si ha $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, con ϵ_0 la permittività del vuoto.

La costante di integrazione può essere determinata imponendo il valore dell'energia potenziale in corrispondenza di particolari valori di r ; la convenzione più diffusa consiste nel richiedere $U(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ ³¹.

19.1 Proprietà del moto in un campo di forze centrali

Un elemento materiale soggetto ad una forza centrale possiede un moto dotato delle seguenti caratteristiche fondamentali:

1. la traiettoria, detta **orbita**, giace in un piano fisso passante per il centro di forza;
2. il raggio vettore \vec{r} spazza, durante il moto, aree uguali in tempi uguali³².

19.2 Coordinate polari

Per lo studio del moto in un campo centrale è conveniente introdurre le coordinate polari (r, θ) nel piano dell'orbita.

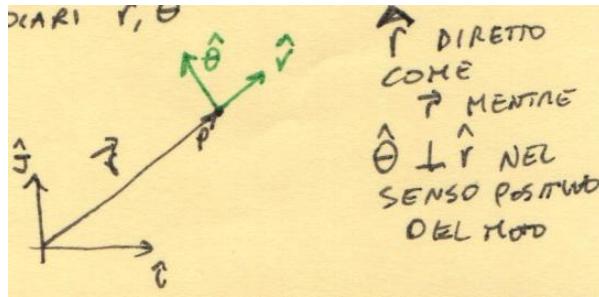


Figura 38: Sistema di coordinate polari nel piano: il versore \hat{r} è diretto lungo \vec{r} , mentre $\hat{\theta}$ è perpendicolare a \vec{r} nel senso positivo del moto. L'angolo θ è misurato a partire dall'asse x positivo.

Si definiscono due versori: \hat{r} , diretto come \vec{r} , e $\hat{\theta}$, perpendicolare a \vec{r} nel senso positivo del moto. Le loro espressioni in termini dei versori cartesiani \hat{i} , \hat{j} sono

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (199)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (200)$$

Interpretazione fisica. I versori \hat{r} e $\hat{\theta}$ costituiscono una base ortonormale *mobile*: la loro orientazione varia con θ e dunque con il tempo. Questa proprietà è alla base delle espressioni dell'accelerazione in coordinate polari, che contengono termini centripeti e di Coriolis.

20 Campo di forza peso — Applicazione semplice

Si consideri un punto materiale di massa m soggetto al solo campo di forza peso. L'obiettivo è risolvere l'equazione del moto e ricavare l'equazione oraria nelle tre direzioni dello spazio.

³¹Tale convenzione è standard in meccanica celeste e nella teoria della gravitazione; con essa l'energia potenziale risulta sempre negativa per corpi legati gravitazionalmente.

³²Questa proprietà è nota come *seconda legge di Keplero* (legge delle aree) e discende direttamente dalla conservazione del momento angolare rispetto al centro di forza.

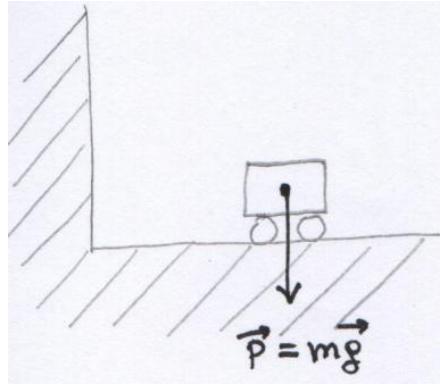


Figura 39: Punto materiale soggetto alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$.

Il campo di forza peso è $\vec{P} = m\vec{g}$. La seconda legge di Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ diventa, essendo $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{i}_2$ ³³,

$$\vec{a} = \vec{g}. \quad (201)$$

20.1 Risoluzione dell'equazione differenziale

L'equazione $\ddot{\vec{x}} = \vec{g}$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti con termine noto costante. Si procede separando la soluzione in parte omogenea e parte particolare.

Soluzione omogenea. L'equazione omogenea associata è $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$. L'equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$ ammette la radice doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, da cui

$$\vec{x}_0(t) = \vec{A} + \vec{B}t. \quad (202)$$

Soluzione particolare. Si cerca una soluzione particolare nella forma $\vec{x}_P(t) = \vec{c}t^2$. Derivando si ottiene $\dot{\vec{x}}_P = 2\vec{c}t$ e $\ddot{\vec{x}}_P = 2\vec{c}$. Sostituendo nell'equazione del moto:

$$2\vec{c} = \vec{g} \implies \vec{c} = \frac{\vec{g}}{2}. \quad (203)$$

Soluzione generale. La soluzione generale è dunque

$$\vec{x}(t) = \vec{A} + \vec{B}t + \frac{\vec{g}}{2}t^2. \quad (204)$$

Imponendo le condizioni iniziali $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ e $\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{x}}_0 \equiv \vec{v}_0$, si identifica $\vec{A} = \vec{x}_0$ e $\vec{B} = \vec{v}_0$, ottenendo l'equazione oraria

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2}t^2.$$

(205)

³³Si adotta la convenzione per cui \hat{i}_2 è diretto verso l'alto, cosicché $\vec{g} = -g\hat{i}_2$ con $g > 0$.

20.2 Proiezione sugli assi del sistema di riferimento

Stabilito un sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$, si proietta la relazione vettoriale (205) lungo ciascun asse. Poiché $\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 (\vec{x}(t) \cdot \hat{i}_k) \hat{i}_k$, si ottiene il sistema di equazioni scalari:

$$x_1(t) = v_{01} t + x_{01}, \quad (206)$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{02} t + x_{02}, \quad (207)$$

$$x_3(t) = v_{03} t + x_{03}. \quad (208)$$

Si noti che il termine $\frac{1}{2} \vec{g} t^2 \cdot \hat{i}_1 = 0$ e $\frac{1}{2} \vec{g} t^2 \cdot \hat{i}_3 = 0$ poiché $\vec{g} \perp \hat{i}_1$ e $\vec{g} \perp \hat{i}_3$, mentre $\vec{g} \cdot \hat{i}_2 = -g$ essendo \vec{g} discorde rispetto a \hat{i}_2 .

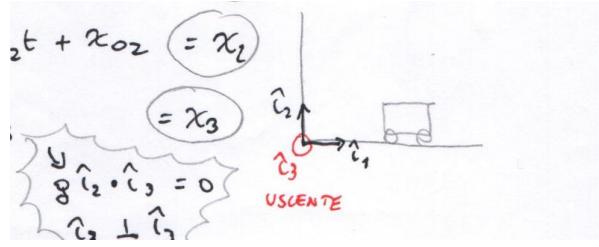


Figura 40: Sistema di riferimento tridimensionale $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ con il vettore posizione $\vec{x}(t)$ e la forza peso $m\vec{g}$ agente sul punto materiale.

20.3 Proiezione della velocità

Derivando l'equazione oraria (205) si ottiene la velocità:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} t. \quad (209)$$

Proiettando lungo \hat{i}_1 , \hat{i}_2 e \hat{i}_3 :

$$v_1(t) = v_{01}, \quad (210)$$

$$v_2(t) = v_{02} - g t, \quad (211)$$

$$v_3(t) = v_{03}. \quad (212)$$

Interpretazione fisica. Le componenti v_1 e v_3 della velocità restano costanti nel tempo: il campo gravitazionale uniforme agisce esclusivamente lungo la direzione verticale \hat{i}_2 . Si distinguono due casi notevoli:

- se $v_{01} = v_{03} = 0$, il moto avviene lungo la verticale passante per \vec{x}_0 (caduta libera o lancio verticale);
- se $v_{03} = 0$ e $v_{01} \neq 0$, il moto è piano nel piano (\hat{i}_1, \hat{i}_2) : è il caso dei **problemi balistici**.

20.4 Applicazione — Massa vincolata a una superficie

Si consideri ora un punto materiale di massa m soggetto alla forza peso e vincolato a giacere su una superficie. L'equazione del moto diventa

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}, \quad (213)$$

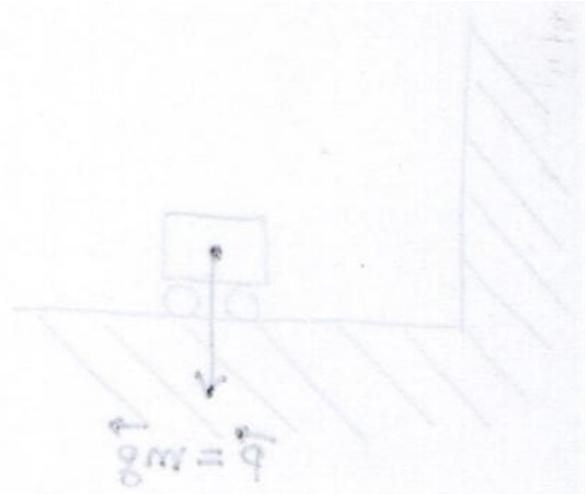


Figura 41: Punto materiale nel sistema di riferimento tridimensionale con l'accelerazione di gravità \vec{g} diretta verso il basso e la reazione vincolare \vec{R} .

dove \vec{R} è la reazione vincolare. Stabilendo il sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ con \hat{i}_2 diretto verso l'alto e la superficie orizzontale, la proiezione lungo i tre assi fornisce:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = (m\vec{g}) \cdot \hat{i}_1 + \vec{R} \cdot \hat{i}_1 = 0, \\ m\ddot{x}_2 = (m\vec{g}) \cdot \hat{i}_2 + \vec{R} \cdot \hat{i}_2 = -mg + R_2, \\ m\ddot{x}_3 = (m\vec{g}) \cdot \hat{i}_3 + \vec{R} \cdot \hat{i}_3 = 0, \end{cases} \quad (214)$$

avendo sfruttato il fatto che, per un vincolo liscio orizzontale, \vec{R} è diretta lungo \hat{i}_2 e dunque $\vec{R} \cdot \hat{i}_1 = \vec{R} \cdot \hat{i}_3 = 0$.

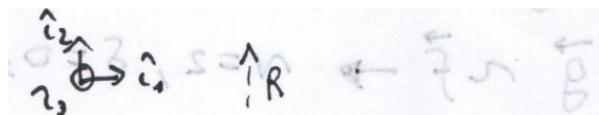


Figura 42: Punto materiale su superficie orizzontale: la forza peso $m\vec{g}$ è diretta verso il basso, la reazione vincolare \vec{R} verso l'alto.

Dalla seconda equazione del sistema (214) si ricava

$$m\ddot{x}_2 = -mg + R_2. \quad (215)$$

La reazione vincolare R_2 è un'incognita, a priori indeterminata anche nel segno. Tuttavia, se il corpo è mantenuto in quiete sulla superficie (condizione statica), l'accelerazione lungo \hat{i}_2 è nulla e si ottiene immediatamente

$$R_2 = mg \implies \vec{R} = -m\vec{g}, \quad |\vec{R}| = mg. \quad (216)$$

Interpretazione fisica. In condizioni di quiete la reazione vincolare bilancia esattamente la forza peso: il vincolo “sostiene” il corpo impedendo il moto lungo la verticale. L'accelerazione lungo \hat{i}_2 è identicamente nulla.

21 Campo di forza peso con massa-molla — Applicazione

Si consideri un punto materiale di massa m collegato ad una molla ideale e soggetto alla forza peso. L'analisi viene condotta in due sistemi di riferimento distinti, mostrando come la scelta delle coordinate semplifichi l'equazione del moto.

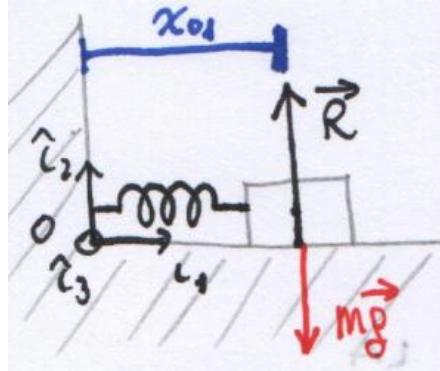


Figura 43: Primo sistema di riferimento: la massa m è sospesa alla molla nella configurazione di riferimento. L'origine è posta in modo che la posizione naturale della molla corrisponda a x_{01} .

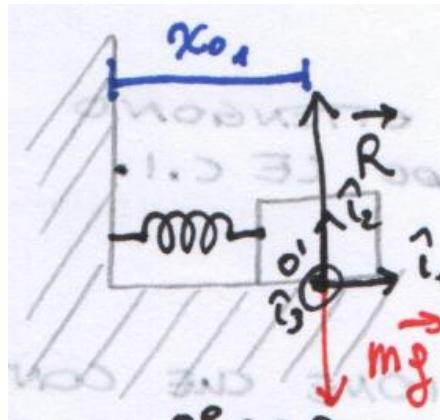


Figura 44: Secondo sistema di riferimento: l'origine è traslata nella posizione di equilibrio statico della massa, cosicché $x_{01} = 0$.

21.1 Modello della molla ideale

Per una molla ideale a risposta lineare, la forza elastica è data da

$$\vec{F}_e = -K(l - l_0) \widehat{AB}, \quad (217)$$

dove $K > 0$ è la costante elastica, l_0 la lunghezza di riferimento, l la lunghezza attuale e \widehat{AB} il versore che definisce la direzione tra i due estremi della molla.

21.2 Equazione del moto nel primo sistema di riferimento

Le forze agenti sulla massa sono la forza peso $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{i}_2$, la reazione vincolare $\vec{R} = R\hat{i}_2$ e la forza elastica. L'equazione vettoriale del moto è

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_e = m\vec{g} + \vec{R} - K(x_1 - x_{01})\hat{i}_1. \quad (218)$$

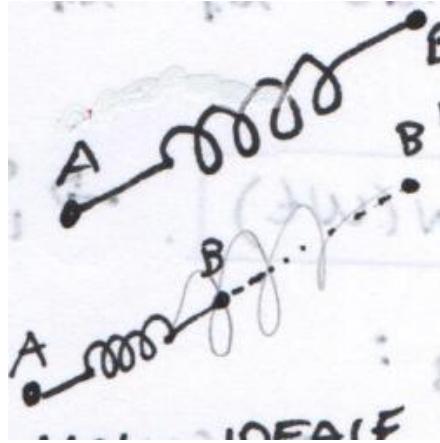


Figura 45: Molla ideale: $AB = l_0$ è la lunghezza di riferimento (a riposo), $AB' = l$ è la lunghezza nella configurazione deformata.

Proiettando lungo \hat{i}_1 , \hat{i}_2 e \hat{i}_3 :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -K(x_1 - x_{01}), \\ m\ddot{x}_2 = -mg + R_2, \\ m\ddot{x}_3 = 0. \end{cases} \quad (219)$$

Si osservi che nella prima equazione il termine x_{01} è una costante (la posizione naturale della molla), non una funzione del tempo. Il sistema si riscrive come

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + Kx_1 = Kx_{01} & \text{(equazione non omogenea),} \\ m\ddot{x}_2 = -mg + R_2 & \text{(equazione algebrica se il vincolo impedisce il moto),} \\ m\ddot{x}_3 = 0 & \text{(componente nulla).} \end{cases} \quad (220)$$

21.3 Equazione del moto nel secondo sistema di riferimento

Se si sceglie un secondo sistema di riferimento con origine nella posizione di equilibrio statico della molla, si ha $x_{01} = 0$. La forza elastica diventa semplicemente $\vec{F}_e = -Kx'_1\hat{i}_1$, e la prima equazione del sistema (220) si semplifica in

$$m\ddot{x}'_1 + Kx'_1 = 0 \implies \ddot{x}'_1 + \frac{K}{m}x'_1 = 0. \quad (221)$$

La natura fisica del sistema non è stata modificata: si è semplicemente scelto un sistema di coordinate che rende omogenea l'equazione differenziale³⁴.

21.4 Soluzione dell'equazione dell'oscillatore armonico

Poiché $K > 0$ e $m > 0$, si definisce la **pulsazione naturale**

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \implies \omega^2 = \frac{K}{m}. \quad (222)$$

³⁴Questa tecnica è del tutto generale: traslando l'origine nella posizione di equilibrio statico, il termine forzante costante (dovuto alla gravità) viene assorbito nella nuova variabile, e l'equazione del moto assume la forma canonica dell'oscillatore armonico.

L'equazione (221) diventa

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0, \quad (223)$$

la cui soluzione generale è

$$x_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (224)$$

dove le costanti A e B si determinano imponendo le condizioni iniziali sulla posizione e sulla velocità.

Interpretazione fisica. Il moto lungo \hat{i}_1 è un **moto armonico semplice** di pulsazione ω : la massa oscilla attorno alla posizione di equilibrio con periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/K}$. Maggiore è la rigidezza K della molla, più rapida è l'oscillazione; maggiore è la massa m , più lenta.

21.5 Analisi delle componenti residue

Per quanto riguarda la direzione \hat{i}_2 , l'equazione $m\ddot{x}_2 = -mg + R_2$ è l'unica che contiene la reazione vincolare, che è un'incognita di tipo algebrico. Se il vincolo impedisce il moto lungo \hat{i}_2 (cioè $\ddot{x}_2 = 0$), l'equazione diventa algebrica e non differenziale, fornendo direttamente il valore di R_2 .

Nel caso in cui sia presente anche una forza esterna $\vec{F} = F\hat{i}_2$ applicata alla massa, l'equazione lungo \hat{i}_2 diventa

$$m\ddot{x}_2 = -mg + F + R_2. \quad (225)$$

In condizioni statiche ($\ddot{x}_2 = 0$) si ricava

$$R_2 = mg - F. \quad (226)$$

Affinché il vincolo di appoggio sia attivo (il corpo rimanga a contatto con la superficie), deve risultare $R_2 > 0$, il che richiede $F < mg$ ³⁵.

Lungo \hat{i}_3 si ha semplicemente $m\ddot{x}_3 = 0$, che conferma l'assenza di moto in tale direzione.

22 Esempio di cinematica del punto materiale

Si consideri un punto materiale di massa m nel sistema di riferimento $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$, soggetto al campo di forza peso. L'equazione oraria che specifica il moto è

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0, \quad (227)$$

dove $\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 (\vec{x}(t) \cdot \hat{i}_k) \hat{i}_k$.

Si tratta in generale di un moto nello spazio tridimensionale. Dall'equazione vettoriale (227) si passa al sistema di equazioni scalari proiettando lungo i versori \hat{i}_k :

$$\begin{cases} x_1(t) = v_{01} t + x_{01}, \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{02} t + x_{02}, \\ x_3(t) = v_{03} t + x_{03}, \end{cases} \quad (228)$$

³⁵Se $F \geq mg$ la reazione vincolare si annullerebbe o diventerebbe negativa, il che per un vincolo di appoggio (unilaterale) significa che il corpo si stacca dalla superficie e l'equazione del moto cambia natura.

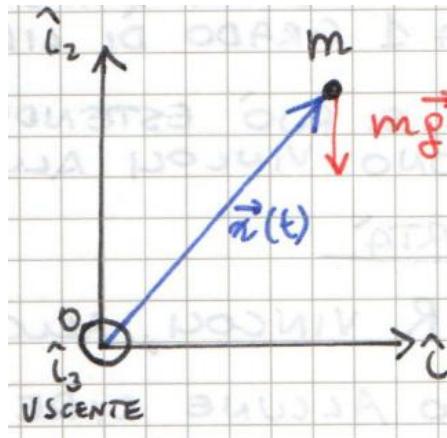


Figura 46: Sistema di riferimento tridimensionale con il vettore posizione $\vec{x}(t)$ del punto materiale e l'accelerazione di gravità \vec{g} diretta verso il basso.

dove si è utilizzato $\vec{g} \cdot \hat{i}_1 = 0$ (poiché $\vec{g} \perp \hat{i}_1$), $\vec{g} \cdot \hat{i}_2 = -g$ (poiché \vec{g} è discorde rispetto a \hat{i}_2) e $\vec{g} \cdot \hat{i}_3 = 0$ (poiché $\vec{g} \perp \hat{i}_3$).

Considerando anche la velocità, si ha $\vec{v}(t) = d\vec{x}(t)/dt$, e derivando le espressioni (228):

$$\begin{cases} v_1(t) = v_{01}, \\ v_2(t) = -gt + v_{02}, \\ v_3(t) = v_{03}. \end{cases} \quad (229)$$

Anche in questo caso si distinguono i medesimi casi notevoli: se $v_{01} = v_{03} = 0$ il moto è verticale; se $v_{03} = 0$ e $v_{01} \neq 0$ il moto è piano nel piano (\hat{i}_1, \hat{i}_2) , configurando il caso dei problemi balistici.

23 Gradi di libertà

Il concetto di **grado di libertà** (*degree of freedom, DOF*) è fondamentale per la descrizione dei sistemi meccanici vincolati. Per **grado di libertà** si intende il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la posizione di un sistema nello spazio.

Un punto materiale in uno spazio a tre dimensioni possiede 3 gradi di libertà. Se il punto è vincolato a muoversi su una superficie, i gradi di libertà si riducono a 2; se deve muoversi lungo una curva, il grado di libertà è 1.

Sistemi di n punti. La trattazione si estende naturalmente a un sistema particellare di n punti. In assenza di vincoli il sistema possiede

$$3n \text{ gradi di libertà.} \quad (230)$$

In presenza di R vincoli indipendenti, i gradi di libertà residui sono

$$P = 3n - R, \quad (231)$$

dove P rappresenta anche il numero di incognite ausiliarie³⁶ necessarie per descrivere il sistema.

³⁶Più precisamente, P è il numero di coordinate generalizzate (o parametri lagrangiani) necessarie per descrivere la configurazione del sistema. Le R equazioni di vincolo eliminano altrettante variabili.

Corpo rigido. Un **corpo rigido** non possiede $3n$ gradi di libertà (dove n è il numero di punti che lo compongono), bensì soltanto 6 gradi di libertà: 3 di traslazione e 3 di rotazione.

Interpretazione fisica. I vincoli “inibiscono” alcune direzioni del moto, riducendo il numero di parametri indipendenti necessari a descrivere la configurazione. Per **vincolo** si intende qualsiasi condizione che limita il moto; le forze associate sono dette **forze vincolari** o **reazioni vincolari**.

23.1 Vincoli ideali

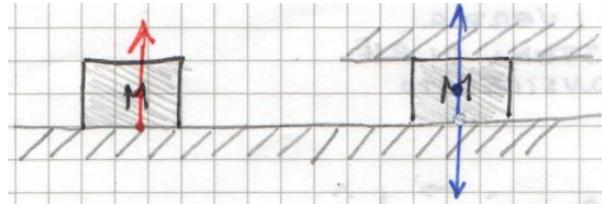


Figura 47: Rappresentazione schematica dei due tipi di vincolo ideale: vincolo di appoggio (a sinistra) e vincolo di appartenenza (a destra).

Un **vincolo liscio** è un vincolo ideale, privo di attrito, che esercita reazioni punto per punto ortogonali alla geometria del vincolo stesso. Si distinguono due tipologie fondamentali.

Vincolo di appoggio. Il vincolo di appoggio non riduce formalmente i gradi di libertà del sistema, ma rende inaccessibile un semispazio al punto materiale. Negli intervalli di tempo in cui il punto rimane in contatto con la superficie del vincolo, sono necessari soltanto 2 parametri per definire univocamente la posizione. L'unica incognita ausiliaria è la reazione normale \vec{R}_N , il cui verso è diretto dalla superficie verso l'elemento³⁷.

Vincolo di appartenenza. Il vincolo di appartenenza esercita la reazione normale \vec{R}_N in entrambi i versi rispetto al punto materiale, sempre ortogonalmente alla superficie. A differenza del vincolo di appoggio, il punto materiale è costretto a rimanere sulla superficie in ogni istante³⁸.

³⁷Il vincolo di appoggio è *unilaterale*: la reazione vincolare può agire in un solo verso. Se le condizioni dinamiche richiedessero una reazione nel verso opposto, il contatto si interrompe e il vincolo cessa di essere attivo.

³⁸Il vincolo di appartenenza è *bilaterale*: la reazione vincolare può assumere qualsiasi segno, impedendo al punto di allontanarsi dalla superficie sia in un verso che nell'altro.