CINEMATICA E DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

SI INIZIA LO STUDIO TRAMITE L'ANALISI DI UN PUNTO MATERIALE:

PUNTO MATERIALE SOLLECITATO DA FORZA DI NATURA INERZIALE

PER INERZIALE SI INTENDE UNA FORZA PROPORZIONALE ALLA MASSA TRAMITE IL VETTORE ACCELERAZIONE CHE È COSTANTE (NON VARIA NEL TEMPO) ED UNIFORME (NELLO SPAZIO)

L'EQUAZIONE ASSOCIATA A TALE FENOMENO È:

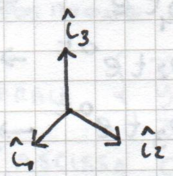
$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = m\vec{\alpha}}$$

EQ. DIFFERENZIALE, VETTORIALE, LINEARE, A COEFFICIENTI COSTANTI, ORDINARIA E NON OMOGENEA.

$$\downarrow$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{\alpha}$$

1) SCEGLIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO



2) DECOMPORRE L'EQUAZIONE VETTORIALE → IN 3 EQUAZIONI SCALARI **METODO 1**

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \alpha_1 \\ \ddot{x}_2 = \alpha_2 \\ \ddot{x}_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\ddot{x}_1 = \alpha_1 \rightarrow \int_{t_0}^{t} \ddot{x}_1(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \alpha_1\,dt \rightarrow \dot{x}_1(t) - \dot{x}_1(t_0) = \alpha_1(t - t_0)$$

E DI NUOVO:

$$\int_{t_0}^{t} [\dot{x}_1(t) - \underbrace{\dot{x}_1(t_0)}_{\text{È UNA COSTANTE}}]\,dt = \int_{t_0}^{t} \alpha_1(t - t_0)\,dt \Rightarrow x_1(t) - x_1(t_0) - (t - t_0)\dot{x}_1(t_0) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - \frac{\alpha_1}{2} t_0 (t - t_0)$$

RISCRIVENDOLO:

$$x_1(t) = x_1(t_0) - \dot{x}_1(t_0)\cdot t + \dot{x}_1(t_0)t_0 + \frac{\alpha_1}{2}t^2 - \frac{\alpha_1}{2}t_0^2 - \frac{\alpha_1}{2}t_0 t + \frac{\alpha_1}{2}t_0^2$$

SE IMPONGO $t_0 = 0$ ALLORA RIMANE

$$x_1(t) = x_1(0) + \dot{x}_1(0)t + \frac{1}{2}\alpha_1 t^2$$

SE FACESSI QUESTO RAGIONAMENTO ANCHE PER $\ddot{x}_2 = \alpha_2$ E $\ddot{x}_3 = \alpha_3$ ALLA FINE AVREI:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 + \dot{x}_1(0) + x_1(0) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}\alpha_2 t^2 + \dot{x}_2(0) + x_2(0) \\ x_3(t) = \frac{1}{2}\alpha_3 t^2 + \dot{x}_3(0) + x_3(0) \end{cases}$$

QUINDI ESSENDO $\vec{x}$ IL VETTORE SOLUZIONE, OTTENGO:

$$\vec{x} = x_1\hat{\iota}_1 + x_2\hat{\iota}_2 + x_3\hat{\iota}_3 = \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 + \dot{\vec{x}}(0) + \vec{x}(0)$$

EQUAZIONE CHE GOVERNA IL MOTO DEL PUNTO MATERIALE LIBERO NELLO SPAZIO

NELLE NOSTRE APPLICAZIONI $\boxed{\vec{\alpha} = \vec{g}}$

NELLA REALTÀ IL VETTORE $\vec{g}$ NON È COSTANTE MA VARIA.

CALCOLO LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA: **METODO 2**

$\ddot{\vec{x}} = \vec{\alpha} \rightarrow$ EQ. OMOGENEA: $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$ QUINDI $\vec{\alpha} = \vec{0}$

PIÙ PROPRIAMENTE SCRIVO, ESSENDO $\ddot{\vec{x}}$ UN VETTORE: x_{GO}

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{STUDIANDO LE RADICI DI CIASCUNA EQ. SCALARE} \rightarrow \begin{array}{l} \gamma_1^2 = 0 \rightarrow \gamma_{1\,1/2} = 0 \in \mathbb{R} \text{ CON } \nu = 2 \\ \gamma_2^2 = 0 \rightarrow \gamma_{2\,1/2} = 0 \in \mathbb{R} \text{ CON } \nu = 2 \\ \gamma_3^2 = 0 \rightarrow \gamma_{3\,1/2} = 0 \in \mathbb{R} \text{ CON } \nu = 2 \end{array}$$

QUINDI

$$x_{GO_1}(t) = a_1 e^{0t} + b_1 t e^{0t} \rightarrow a_1 + b_1 t = x_{GO_1}(t)$$
$$x_{GO_2}(t) = a_2 e^{0t} + b_2 t e^{0t} \rightarrow a_2 + b_2 t = x_{GO_2}(t)$$
$$x_{GO_3}(t) = a_3 e^{0t} + b_3 t e^{0t} \rightarrow a_3 + b_3 t = x_{GO_3}(t)$$

MA LA <u>SOLUZIONE OMOGENEA</u> CHE CERCHIAMO È UNA F. VETTORIALE:

$$\vec{x}_{GO}(t) = \vec{a} + \vec{b}t$$

QUINDI PER LA LINEARITÀ POSSO SCRIVERE

$$\vec{x}_{GO}(t) = x_{GO_1}(t)\,\hat{i}_1 + x_{GO_2}(t)\,\hat{i}_2 + x_{GO_3}\,\hat{i}_3$$

CIOÈ:

$$\vec{x}_{GO}(t) = (a_1 + b_1 t)\hat{i}_1 + (a_2 + b_2 t)\hat{i}_2 + (a_3 + b_3 t)\hat{i}_3$$

ORA STUDIO LA <u>PARTICOLARE</u>; LA SOLUZIONE DOVRÀ AVERE UNA FORMA DEL TIPO x_{PN}

$$\vec{x}_{PN}(t) = t^{\nu} e^{\beta t}\left[\vec{A}(t)\cos(\delta t) + \vec{B}(t)\sin(\delta t)\right]$$

IN QUESTO CASO ESSENDO LA PARTE NON OMOGENEA PARI AD $\vec{\alpha}$:

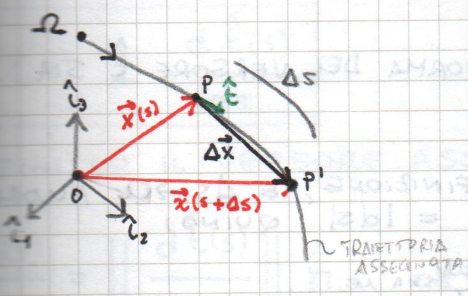
$\beta = 0$; $\delta = 0$; $\vec{A}(t) = \vec{\alpha}$; $\vec{B}(t) = 0$ MA $\nu = 2$ POICHÈ $\gamma_{1/2} = 0$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$$x_{PN}(t) = t^2 \vec{A}$$
$$\dot{x}_{PN}(t) = 2t\vec{A}$$
$$\ddot{x}_{PN}(t) = 2\vec{A} \longrightarrow \text{DA CUI SOSTITUENDO NELL'EQ. DIFF:}$$
$$2\vec{A} = \vec{\alpha} \longrightarrow \frac{\vec{\alpha}}{2} = \vec{A}$$

QUINDI LA SOLUZIONE GLOBALE: $\vec{x}(t) = \vec{a} + \vec{b}t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\,t^2$

CHE CI RICORDA: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\,t^2$ IN CUI SI SONO IMPOSTE LE C.I.

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE - LEGGE ORARIA



VETTORE POSIZIONE

- HO STABILITO UN VETTORE $\vec{x}(t)$ CHE SI PUÒ DEFINIRE ANCHE $\overrightarrow{OP}$. È QUINDI DEFINITO DA UN DATO SISTEMA DI RIFERIMENTO $R(O,\hat{\imath}_1,\hat{\imath}_2,\hat{\imath}_3)$ E STA AD INDICARE, ISTANTE PER ISTANTE, LA POSIZIONE P DI UN PUNTO

- LA TRAIETTORIA È L'INSIEME DEI LUOGHI DEI PUNTI OCCUPATI DURANTE IL TEMPO DI OSSERVAZIONE DAL PUNTO MATERIALE
POSSO ASSOCIARE ALLA TRAIETTORIA DEL PUNTO UN ORIGINE Ω ED UN'ASCISSA CURVILINEA.

- ESPRIMO LA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE AL VARIARE DEL TEMPO ATTRAVERSO LA DIPENDENZA DAL TEMPO DELLA POSIZIONE OCCUPATA LUNGO LA SUA TRAIETTORIA:

$$\vec{x}(s(t)) \rightarrow \vec{x}(s(t)) = \begin{cases} x = x(s(t)) \\ y = y(s(t)) \\ z = z(s(t)) \end{cases} \quad \text{O IN GENERALE} \quad \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

OSSIA I PUNTI OCCUPATI DAL PUNTO MATERIALE LUNGO L'ASCISSA CURVILINEA

- PER ASCISSA CURVILINEA SI INTENDE LA FUNZIONE:

$s(t)$ DEFINITA EQUAZIONE O LEGGE ORARIA

CORRISPONDE ALLA LUNGHEZZA DELL'ARCO LUNGO LA CURVA PARTENDO DALL'ORIGINE DI QUEST'ULTIMA DEFINITA Ω. È QUINDI UNA FUNZIONE SCALARE.
INVECE CON

- $\vec{x}(t)$ È DEFINITA EQUAZIONE DEL MOTO $\rightarrow \vec{x} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

CHE DEFINISCE, ISTANTE PER ISTANTE, LA POSIZIONE DEL VETTORE POSIZIONE.

- PER VETTORE SPOSTAMENTO $\Delta\vec{x}$ SI DEFINISCE IL VETTORE DIFFERENZA TRA DUE POSIZIONI CONSECUTIVE (TRA DUE ISTANTI CONSECUTIVI):

$$\Delta\vec{x} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'} \qquad \text{COMUNQUE } \Delta\vec{x} = \Delta\vec{x}(t)$$

- PER VELOCITÀ GLOBALE O VELOCITÀ MEDIA SI DEFINISCE:

$$\vec{v}_M = \frac{\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{PP'}}{t'-t} = \frac{\Delta\vec{x}}{t'-t} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

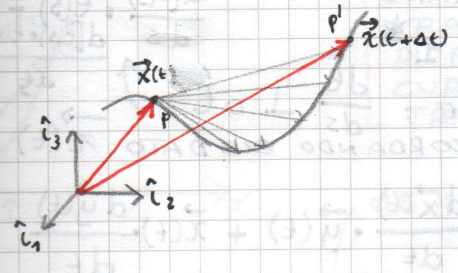
- PER VELOCITÀ ISTANTANEA SI DEFINISCE:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

LA V. IST. È ANCHE:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OP'}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OP}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OP}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$$

IL PUNTO P' TENDE A P E QUINDI LA SECANTE PP' TENDE ALLA TANGENTE IN P.



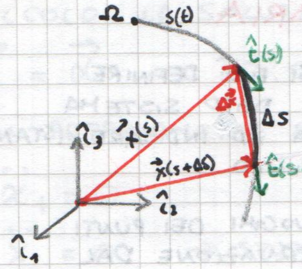
- PER ACCELERAZIONE ISTANTANEA SI DEFINISCE

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

VERSORE TANGENTE

SI DEFINISCE VERSORE TANGENTE IL VERSORE DEFINITO DAL LIMITE DELLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI $\Delta\vec{x}$ RISPETTO L'ASCISSA CURVILINEA S.

$$\hat{t} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{R\,d\theta}$$



$\hat{t}$ È QUINDI IL VERSORE (VETTORE DI MODULO UNITARIO) TANGENTE AL PUNTO INDIVIDUATO DA $s(t)$ LUNGO LA TRAIETTORIA.

VERIFICHIAMO CHE IL MODULO/NORMA DEL VERSORE $\hat{t}$ SIA UNITARIO:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\|\Delta \vec{x}\|}{|\Delta s|} \longrightarrow \text{PER DEFINIZIONE, SE } \Delta s \to 0, \text{ ALLORA } \|d\vec{x}\| = |ds| \text{ QUINDI}$$

↳ NORMA/MODULO DEL VETTORE SPOSTAMENTO

↳ VALORE ASSOLUTO ↳ POTREI PERCORRERLA NEGATIVAMENTE, OSSIA NEL VERSO OPPOSTO

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\|\Delta \vec{x}\|}{|\Delta s|} = 1 = \|\hat{t}\| \quad \text{(DIMOSTRATO)}$$

VERSORE NORMALE

SI PUÒ OTTENERE UN ALTRO VERSORE EFFETTUANDO UN ALTRO LIMITE:

$$\underset{①}{\frac{d\hat{t}}{ds}} = \frac{d}{ds}\Big(\underbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}}_{=\hat{t}}\Big) = \underset{②}{\frac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2}} \qquad \lim_{\Delta s \to 0}\left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s}\right)$$

SVILUPPANDO ①:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\hat{t}(s+\Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s}$$

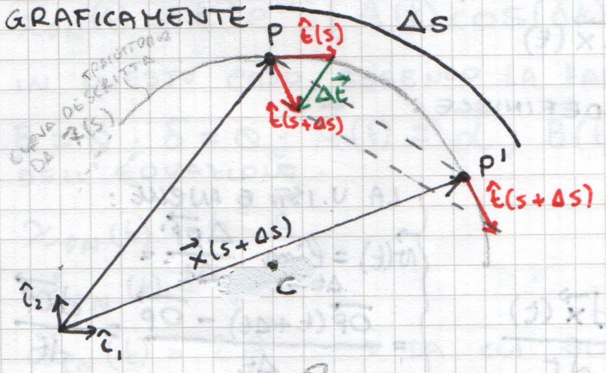
MENTRE ② (È COME SE FACESSI IL RAPP. INCR. DI $\frac{d\vec{x}}{ds}$ E POI NUOVAMENTE SUL RISULTATO)

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{x}(s+\Delta s+\Delta s) - \vec{x}(s+\Delta s)}{\Delta s^2} - \frac{\vec{x}(s+\Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s^2}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overset{\mathrm{I}}{\vec{x}(s+2\Delta s)} - 2\overset{\mathrm{II}}{\vec{x}(s+\Delta s)} + \overset{\mathrm{III}}{\vec{x}(s)}}{\Delta s^2}$$

I, II, III SONO 3 PUNTI DELLA TRAIETTORIA

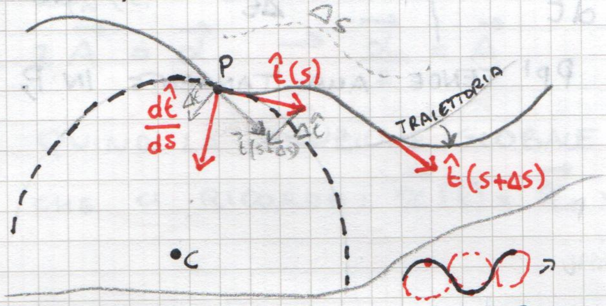
GRAFICAMENTE



- I TRE PUNTI $\vec{x}(s+2\Delta s)$; $2\vec{x}(s+\Delta s)$ E $\vec{x}(s)$ AL LIMITE $\Delta s \to 0$ DEFINISCONO IL PIANO OSCULATORE E IL CERCHIO OSCULATORE CHE HA IL CENTRO NEL CENTRO DI CURVATURA DELLA CURVA IN P CON RAGGIO r. IL VERSORE ORIENTATO DA P AL CENTRO DI CURVATURA È IL VERSORE NORMALE.

QUINDI PER $\Delta s \to 0$ SI AVRÀ $\Delta\hat{t}$ CHE TENDE AD ALLINEARSI CON LA RETTA PASSANTE TRA P E IL CENTRO DI CURVATURA.

PER DIMOSTRARE CHE $\frac{d\hat{t}}{ds}$ È $\perp$ A $\hat{t}$:



I TRE PUNTI POGGIANO SUL PROPRIO CERCHIO OSCULATORE MA PER $\Delta s \to 0$ DEGENERA IN UNO SOLO

DIMOSTRAZIONE

IO SO CHE CERTAMENTE:

① $\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s) = 1$ *

MA VOGLIO CHE: $\frac{d\hat{t}}{ds} \perp \hat{t}$ $\quad \frac{d[\hat{t}(s)\cdot\hat{t}(s)]}{ds}$

DERIVO LA ① RICORDANDO CHE DATO $\vec{x}(t)$ E $\vec{y}(t)$

$$\frac{d[\vec{x}(t)\cdot\vec{y}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\cdot\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\cdot\frac{d\vec{y}(t)}{dt}$$

IN CUI

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\hat{\imath}_1 + \frac{dx_2}{dt}\hat{\imath}_2 + \frac{dx_3}{dt}\hat{\imath}_3 \quad \text{DERIVATA DI UN VETTORE}$$

QUINDI DERIVO ①:

$$\frac{d[\hat{t}(s)\cdot\hat{t}(s)]}{ds} = \frac{d\hat{t}(s)}{ds}\cdot\hat{t}(s) + \hat{t}(s)\cdot\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = 2\left[\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\cdot\hat{t}(s)\right] = 0 =$$

CHE DEVE ESSERE UGUALE A 0 AFFINCHÉ CI SIA ORTOGONALITÀ $\perp$.

SI ESCLUDE LA TRAIETTORIA RETTILINEA OSSIA $\frac{d\hat{t}}{ds} = 0$ ←

PERTANTO SE IL PRODOTTO SCALARE DEVE ESSERE SODDISFATTO, I VERSORI DEVONO ESSERE ORTOGONALI FRA LORO.

$$\boxed{\hat{t}(s) \perp \frac{d\hat{t}(s)}{ds}}$$

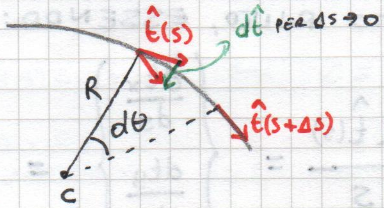
DEFINISCO IL VERSORE ASSOCIATO A $\frac{d\hat{t}(s)}{ds}$:

$$\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \left\| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right\| \hat{n}$$

→ POICHÈ $\left\| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right\|$ È LA NORMA APPLICATA ALLA DERIVATA DI UN VETTORE (CHE È UN VETTORE); DA CUI LA NORMA CI DÀ UNO SCALARE

RICORDANDO LA RELAZIONE CHE INTERCORRE TRA ARCO DI CURVA E ANGOLO.

$$\boxed{ds = R\, d\theta = \| d\hat{t} \|}$$



ALLORA

$$\left\| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\hat{t}(s)}{R\, d\theta} \right\| = \frac{1}{R} \left\| \frac{d\hat{t}(s)}{d\theta} \right\|$$

QUINDI

$$\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{\hat{n}}{R} \left\| \frac{d\hat{t}(s)}{d\theta} \right\|$$

{ $d\theta$ È L'ANGOLO TRA LE GIACITURE DEI RAGGI DI CURVATURA AL LIMITE $\Delta s \to 0$
GIACITURA: RETTA TANGENTE (DIREZIONE)

MA NEL MOMENTO IN CUI $\Delta s \to 0$ SI OTTIENE CHE $\left\| \frac{d\hat{t}(s)}{d\theta} \right\| \to 1$ ←
OSSIA $\| d\hat{t}(s) \| \approx d\theta$

QUINDI

$$\boxed{\frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \frac{\hat{n}}{R}}$$

VERSORE NORMALE →

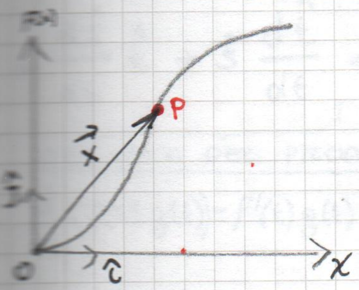
- IL MODULO DI $d\hat{t}(s)/ds$ È INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL RAGGIO DI CURVATURA.
- HA DIREZIONE/GIACITURA VERSO IL CENTRO DI CURVATURA LOCALE
- IL VERSO È "VERSO" IL CENTRO C.

CURVATURA DI UNA CURVA PIANA

UNA GENERICA CURVA NEL PIANO (CASO 2D) È DEFINITA DA $y = f(x)$

UN GENERICO PUNTO (POSIZIONE DEL NOSTRO PUNTO MATERIALE) È DEFINITO DA UN VETTORE POSIZIONE IN UN DATO SISTEMA DI RIFERIMENTO $R(O, \hat{i}, \hat{j})$

$$\boxed{\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} + f(x)\hat{j}} \quad \text{(CASO 2D)}$$

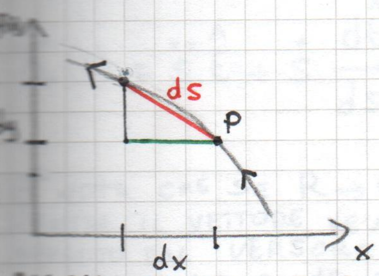


DEFINIZIONE ds

[INTRODUCO L'ASCISSA CURVILINEA $s(t)$, OTTENENDO TRAMITE IL TEOREMA DI PITAGORA E L'IPOTESI DI PICCOLI SPOSTAMENTI DI $\vec{x}$ CHE L'ARCO DI CURVA ds COINCIDE CON L'IPOTENUSA DEL TRIANGOLO COSTITUITO DAI CATETI x E $f(x)$:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x)\, dx]^2}$$

POICHÈ $\frac{dy(x)}{dx} = f'(x)$



PICCOLO SPOSTAMENTO DA P, DA CUI ds È L'IPOTENUSA DEL TRIANGOLO FORMATOSI

CHE POSSO RISCRIVERE COME:

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$ ←

QUINDI IL VERSORE TANGENTE $\hat{t}$ (NEL CASO 2D) PUÒ ESSERE RISCRITTO COME:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{dx}{ds}\hat{i} + \frac{dF(x)}{ds}\hat{j}$$

QUINDI TRAMITE IL VETTORE ALGEBRICO:

$$\underline{t} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{df(x)}{ds} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} \end{Bmatrix}$$

RICORDANDO CHE (INVERSO DI QUELLO DI PRIMA) $\rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$

ALLORA

$$\underline{t} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \\ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}} \end{Bmatrix} \begin{matrix} t_x \\ t_y \end{matrix}$$

A QUESTO PUNTO, ESSENDO:

$$\hat{n} = \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \begin{Bmatrix} \frac{dt_x}{ds} \\ \frac{dt_y}{ds} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dt_x}{dx}\frac{dx}{ds} \\ \frac{dt_y}{dx}\frac{dx}{ds} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

RICORDANDO CHE: $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$

E CHE: $t_x = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$ $\quad t_y = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}}$

ALLORA:

$$\hat{n} = \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

DOVE

1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = \left[\left(1+f'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = -\frac{1}{2}\left(1+f'^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2f''$

2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2}}\right) = \frac{f''(x)\sqrt{1+f'^2} - f'(x)\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots}{1+f'^2}$

$$= \frac{f''(x)\sqrt{1+f'^2} + \frac{1}{2}f'(x)\,f''(x)\sqrt{1+f'^2}}{1+f'^2}$$

(DIMOSTRAZIONE SULLE DISPENSE)

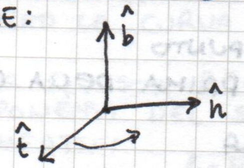
LA NORMA DI $\|\hat{n}\|$ RAPPRESENTA LA CURVATURA DELLA CURVA

$$\|\vec{n}\| = \frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

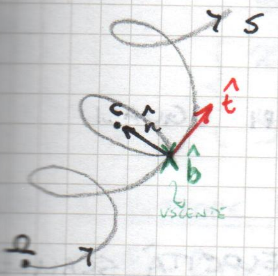
TERNA INTRINSECA DELLA TRAIETTORIA

OLTRE AL VERSORE TANGENTE $\hat{t}$ E AL VERSORE NORMALE $\hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds}$, DEFINISCO UN TERZO VERSORE, COSTITUITO IN MODO TALE CHE I TRE VERSORI COSTITUISCONO UNA TERNA DESTRA: STABILITO IL VERSO DELLE S CRESCENTI, QUINDI ANCHE L'ANGOLO θ, ANCHE IL VERSO E LA DIREZIONE (TANGENTE ALLA CURVA) DEL VERSORE $\hat{t}$. ESSENDO POI $\hat{n}$ ORTOGONALE A $\hat{t}$ CHE PUNTA AL CENTRO DELLA CURVATURA, SEGUE CHE ESISTE $\hat{b}$ TALE CHE:

$$\boxed{\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}}$$



LA TERNA INTRINSECA DIPENDE ESCLUSIVAMENTE DALLE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELLA TRAIETTORIA.



$\hat{b}$ È IL VERSORE BINORMALE

CARATTERISTICHE LOCALI DEL MOTO

SO CHE IL VETTORE POSIZIONE $\vec{x}$ PUÒ ESSERE ESPRESSO O IN DIPENDENZA DI t O DI $S = S(t)$ A SUA VOLTA DIPENDENTE DA t.

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(S(t))$$

DEFINISCO VELOCITÀ (O MEGLIO VETTORE VELOCITÀ):

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}(s(t))}{dt} = \overbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}}^{}\frac{ds}{dt} = \boxed{\dot{s}\,\hat{t}} = \vec{v}$$

(1)

- IN CUI $\dot{S}$ È L'INTENSITÀ (DERIVATA DELL'ASCISSA CURVILINEA)
- DIREZIONE E VERSO DAL VERSORE TANGENTE $\hat{t}$

DOVE SI È USATA LA DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

$$D\left[f(g(t))\right] = f'(g(t)) \cdot g'(t) \rightarrow \text{NELLA FORMA DI LEIBNITZ} \rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

REGOLA DELLA CATENA

$\dot{S} \rightarrow$ VELOCITÀ SCALARE

DEFINISCO IL VETTORE ACCELERAZIONE:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\,\hat{t}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d\dot{s}}{dt}\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{dt}}_{\text{DERIVATA DEL PRODOTTO}} = \ddot{s}\,\hat{t} + \dot{s}\,\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\hat{t} + \underbrace{\dot{s}\left(\dot{s}\,\frac{\hat{n}}{R}\right)}_{} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n}$$

DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\,g(t)\right) = f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)$$

APPLICAZIONE DELLA REGOLA DELLA CATENA O DERIVAZIONE DI FUNZIONE COMPOSTA

(2)

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}\,\hat{t} + \dot{s}\frac{d\hat{t}}{ds}\dot{s} \rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_N}$$

VETTORE ACCELERAZIONE

- SI NOTA CHE SE $R \rightarrow \infty$ POICHÉ LA TRAIETTORIA È RETTILINEA, ALLORA $\vec{a} = \vec{a}_T$. MENTRE IL VETTORE VELOCITÀ È SEMPRE TANGENTE ALLA DIREZIONE DEL MOTO ESSENDO DEFINITO DAL VERSORE TANGENTE, L'ACCELERAZIONE È COMPOSTA DA DUE VETTORI, UNO TANGENZIALE E UNO NORMALE AL MOTO, QUINDI LA SOMMA DEI DUE NON È NECESSARIAMENTE TANGENTE AL MOTO DEL PUNTO MATERIALE LUNGO LA TRAIETTORIA.
- SE $|\vec{v}(t)| = \text{COST} \Leftrightarrow \dot{S} = \text{COSTANTE} \rightarrow \ddot{S} = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_N = \frac{\dot{S}^2}{R}\hat{n}$

QUINDI $\vec{a}_T$ È RESPONSABILE DELLA VARIAZIONE DELL'INTENSITÀ, $\vec{a}_N$ DELLA DIREZIONE.

L'ACCELERAZIONE È QUINDI COMPOSTA DA:

- COMPONENTE TANGENZIALE $\vec{a}_T$ DEFINITO DA:
  1) DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO
  2) INTENSITÀ DEFINITA DALLA DERIVATA SECONDA DELLA LEGGE ORARIA $\to s(t)$
  3) LO STESSO VERSO DEL MOTO
- COMPONENTE NORMALE $\vec{a}_n$ DEFINITO DA:
  1) DIREZIONE NORMALE ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO
  2) INTENSITÀ COME QUADRATO DELLA DERIVATA PRIMA DELLA LEGGE ORARIA DIVISO IL RAGGIO DI CURVATURA R.
  3) VERSO CHE PUNTA AL CENTRO DI CURVATURA

CASI PARTICOLARI: $\vec{a}_T$

1) $\ddot{s}\,\hat{t} = 0$ → IL PUNTO PERCORRE ARCHI DI CURVA UGUALI IN TEMPI UGUALI

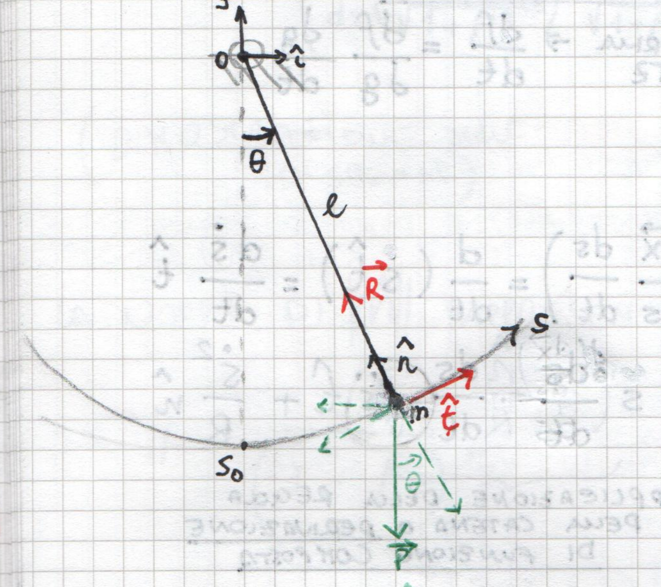
2) $\ddot{s}\,\hat{t} \neq 0$ → IL PUNTO PERCORRE ARCHI IN TEMPI DIVERSI. LA VELOCITÀ SCALARE NON È COSTANTE.

$\vec{a}_N$

1) $\dfrac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{n} = 0 \to$ $R \to \infty$ (RAGGIO DI CURVATURA CHE TENDE AD ∞). LA TRAIETTORIA È ASSIMILABILE A RETTA DA CUI "TRAIETTORIA RETTILINEA".

2) $\dfrac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{n} \neq 0 \to R \neq \infty$ E IL PUNTO SI MUOVE SU CURVA. QUINDI IL PUNTO È "ATTIRATO" VERSO IL CENTRO DI CURVATURA

PENDOLO SEMPLICE - OSCILLATORE SEMPLICE (NON FORZATO)



PROIEZIONI NEL SISTEMA CARTESIANO E NELLA TERNA INTRINSECA (SOLO INSIEME)

PER INTRODURRE IL PENDOLO SEMPLICE SI DEVONO FARE ALCUNE CONSIDERAZIONI:

- MASSA PUNTIFORME m
- PUNTO MATERIALE A CUI ASSOCIAMO m
- IL PUNTO È VINCOLATO ALL'ESTREMITÀ DI UN'ASTA IDEALE l (INESTENSIBILE, INDEFORMABILE, PRIVA DI MASSA)
- CERNIERA NEL PUNTO O CHE PERMETTE DI CAMBIARE ORIENTAMENTO DELL'ASTA.
- IL PROBLEMA È DI TIPO PIANO
  AGISCE LA FORZA PESO E LA REAZIONE VINCOLARE DELL'ASTA.
- L'UNICO SPOSTAMENTO POSSIBILE È LO SPOSTAMENTO CORRISPONDENTE AD UNA VARIAZIONE DELL'ANGOLO θ DELL'ASTA RISPETTO AD UNA DIREZIONE DI RIFERIMENTO (VERTICALE PASSANTE PER O).
  SEGUIRÀ POI CHE QUINDI ANCHE L'ACCELERAZIONE È FUNZIONE DI θ.

- CONOSCIAMO GIÀ LA TRAIETTORIA DI QUESTO MOTO. IL PUNTO m RIMARRÀ A DISTANZA l DA O IN QUALSIASI CASO QUINDI:

$l = R$

È LA TRAIETTORIA CIRCOLARE

STABILISCO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO: $R(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ POSIZIONATO IN O.

IL VETTORE POSIZIONE $\vec{x}$ DEL PUNTO MATERIALE È QUINDI:

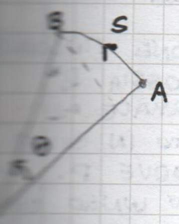
$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ MA SIAMO IN CASO PIANO QUINDI $z\hat{k} = 0 \to z = 0$

ALLORA:

$\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ①

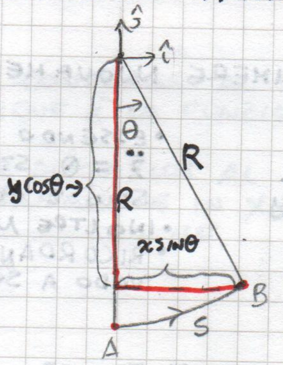
A QUESTO PUNTO VA RICORDATO CHE L'ARCO DI CURVA È ESPRIMIBILE COME:

$\boxed{s = \ell\theta}$ (PRIMA SI ERA CONSIDERATO UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO LUNGO LA CURVA s CIOÈ $ds = \ell\, d\theta$)



DATA QUESTA RELAZIONE SEGUE CHE x E y SONO LE COMPONENTI DEL SIST. DI RIF. R ESPRIMIBILI TRAMITE L'ANGOLO θ, INFATTI:

$$\begin{cases} x = \ell \sin\theta \xrightarrow{\ell = R} x = R\sin\theta \\ y = -\ell\cos\theta \rightarrow y = -R\cos\theta \end{cases}$$



QUINDI IL VETTORE POSIZIONE DIVENTA:

$\vec{x} = \ell\sin\theta\,\hat{i} - \ell\cos\theta\,\hat{j}$ ② $= \vec{x}(\theta)$

— POICHÈ IL VERSORE $\hat{j}$ PUNTA (HA IL VERSO OPPOSTO)

IN QUESTO CASO IL VETTORE POSIZIONE DIPENDE DA θ, MA PUÒ ESSERE ESPRESSO ANCHE IN DIPENDENZA DELL'ARCO DI CURVA OSSIA IN DIPENDENZA ALL'ASCISSA CURVILINEA.

$$\vec{x}(s): \begin{cases} x(s) = \ell \sin\frac{s}{\ell} & (\hat{i}) \\ y(s) = -\ell\cos\frac{s}{\ell} & (\hat{j}) \end{cases}$$

SEMPRE DA $s = \ell\theta$

ADESSO EFFETTUO IL BILANCIO DELLE FORZE AGENTI TRAMITE LA 2° LEGGE DI NEWTON:

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

$\boxed{\vec{F}^e = m\vec{a}} \rightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ ③

— FORZE ESTERNE E VINCOLARI

VA FATTA UN'ALTRA CONSIDERAZIONE: LA TRAIETTORIA ASSEGNATA È UN VINCOLO DEL TIPO UNIDIMENSIONALE CHE PROVOCA L'IMPOSSIBILITÀ ALLA PARTICELLA (PUNTO MATERIALE) DI MUOVERSI LIBERAMENTE. IL PUNTO DI MASSA m È COSTRETTO A MUOVERSI LUNGO LA TRAIETTORIA DI TIPO CIRCOLARE CON RAGGIO ℓ E CENTRO O. LA "POSSIBILITÀ" DI MUOVERSI LUNGO QUESTO UNICO VINCOLO È DEFINITO CON IL TERMINE 1 GRADO DI LIBERTÀ → HO BISOGNO DI 1 PARAMETRO PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE m.

QUINDI: $\vec{x}(s)$ o $\vec{x}(\theta)$ CONOSCENDO s O θ TROVO LA POSIZIONE DEL PUNTO

NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ: È IL NUMERO DI PARAMETRI INDIPENDENTI DEI QUALI SI HA BISOGNO PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO.

ES. UN PUNTO MATERIALE LIBERO IN UNO SPAZIO VETTORIALE DI 3 DIMENSIONI HA 3 GRADI DI LIBERTÀ.

IL PROBLEMA MECCANICO PRECEDENTE È RISOLVIBILE NEL MOMENTO IN CUI RIESCO A DETERMINARE UN'EQUAZIONE ORARIA DEL TIPO:

$s(t)$ o $\theta(t)$ QUINDI L'ANDAMENTO DEI DUE PARAMETRI NEL TEMPO

IN CUI SI È VISTO CHE:

$s(t) = \ell\,\theta(t)$

IL PROBLEMA SI LIMITA AD UNA EQ. DIFFERENZIALE SCALARE NELLA VARIABILE INCOGNITA $s(t)$ o $\theta(t)$.

QUINDI PRENDENDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO $R(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ SI AVRÀ CHE L'EQ. DIFF ③ VETTORIALE SARÀ PROIETTATA LUNGO GLI ASSI:

$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$ E $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$

SI PROIETTA L'EQ. LUNGO I TRE VERSORI $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$:

$$\begin{cases} m(\vec{a}\cdot\hat{\imath}) = \vec{P}\cdot\hat{\imath} + \vec{R}\cdot\hat{\imath} \\ m(\vec{a}\cdot\hat{\jmath}) = \vec{P}\cdot\hat{\jmath} + \vec{R}\cdot\hat{\jmath} \\ m(\vec{a}\cdot\hat{k}) = \vec{P}\cdot\hat{k} + \vec{R}\cdot\hat{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = \vec{R}^n\cdot\hat{\imath} \\ m\ddot{y} = -mg + (\vec{R}^n\cdot\hat{\jmath}) \\ 0 = R^b \end{cases}$$

↳ NON CI SONO PROIEZIONI: SOLO SU PIANO xy

3 EQ. DIFFERENZIALI SCALARI

REAZIONE VINCOLARE È R^n OSSIA R^n NORMALE AL PUNTO IN CUI SI MUOVE P. ANCHE LUNGO $\hat{b} = \hat{k}$ HO REAZIONE VINCOLARE BINORMALE MA NON C'È ALCUN MOTO QUINDI È NULLA

CHE POSSO ESPRIMERE NUOVAMENTE COME:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x \\ m\ddot{y} = -mg + R_y \end{cases}$$

- ESSENDO $\ddot{z} = 0$ STUDIO SOLO 2 EQ. SCALARI
- RICORDANDO CHE $\begin{cases} x = \ell\sin\theta \\ y = -\ell\cos\theta \end{cases}$ VADO A SOSTITUIRLI E TROVO LE EQ. SCALARI

NON È DETTO CHE LE PROIEZIONI SUL SIST. DI RIFERIMENTO CARTESIANO $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ IN O SIA LA SCELTA MIGLIORE. SI PUÒ FARE LA PROIEZIONE ANCHE SU UN ALTRO SISTEMA CHE È LA TERNA INTRINSECA.

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \rightarrow \begin{cases} m(\vec{a}\cdot\hat{t}) = (\vec{P}\cdot\hat{t}) + (\vec{R}\cdot\hat{t}) \\ m(\vec{a}\cdot\hat{n}) = (\vec{P}\cdot\hat{n}) + (\vec{R}\cdot\hat{n}) \\ m(\vec{a}\cdot\hat{b}) = (\vec{P}\cdot\hat{b}) + (\vec{R}\cdot\hat{b}) \end{cases}$$

IL SISTEMA SI DICE DISACCOPPIATO SE IN OGNUNA DELLE EQUAZIONI COMPARE UNA SOLA DELLE FUNZIONI INCOGNITE

CHE DIVENTA:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = -mg\sin\theta \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{R} = -mg\cos\theta + R_N \\ a_b = 0 \;;\; R_b = 0 \;;\; P_b = 0 \rightarrow F_b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{s} = -mg\sin\theta \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{R} = -mg\cos\theta + R_N \end{cases} \quad (1)$$

RICORDANDO CHE $s = \ell\theta$; OTTENGO CHE LA (1) DIVENTA:

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (A) \\ m\ell\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N & (B) \end{cases}$$

MA →
- COMPARE UNA DERIVATA PRIMA CON ESPONENTE 2
- $\theta(t)$ COMPARE COME ARGOMENTO DI UNA FUNZIONE TRIGONOMETRICA
- R_N NON DIPENDE DA $\theta(t)$ E NON È NOTO

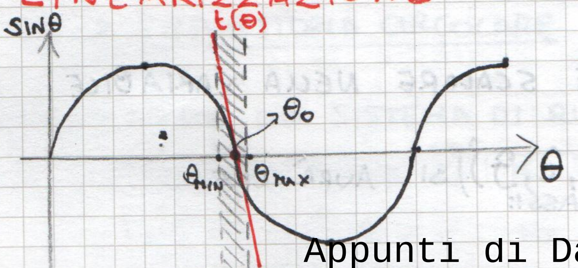
(A) EQ. DIFF. NON LINEARE OMOGENEA

(B) EQ. DIFF. NON LINEARE NON OMOGENEA

PER TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA, NECESSITIAMO DI $\theta(t)$. NON STUDIAMO L'EQ. DIFF. B MA SE PRENDIAMO LA (A), EQ. DIFF. NON LINEARE OMOGENEA, È POSSIBILE GIUNGERE ALLA SOLUZIONE

PER FARE CIÒ SI DEVE LINEARIZZARE:

LINEARIZZAZIONE



LINEARIZZARE SIGNIFICA TRASFORMARE CURVE IN TANGENTI (RETTE OSSIA FUNZIONI LINEARI). IN PRATICA "SI ALLINEA UNA CURVA". TUTTO CIÒ SI PUÒ FARE SOLO:

- SOTTO DETERMINATE IPOTESI
- SOTTO UNA CERTA CONDIZIONE
- IN UN CERTO INTERVALLO ATTORNO AL PUNTO DI LAVORO

IN PARTICOLARE:

$$\boxed{|\sin\theta - t(\theta)| \le \varepsilon} \ * \quad \text{IN CUI } \varepsilon \text{ È LA TOLLERANZA RELATIVA PER L'ERRORE}$$

MENTRE $\theta_{MIN} \le$ RANGE DI LAVORO $< \theta_{MAX}$

* LA DIFFERENZA TRA LA FUNZIONE NON LINEARE $\sin\theta$ E QUELLA LINEARE $t(\theta)$, RETTA TANGENTE, È INFERIORE AD UNA TOLLERANZA CHE POSSO ACCETTARE.
SE SI È SICURI CHE LA VARIABILE θ NON VA A RICADERE IN QUESTO INTERVALLO, POSSO SOSTITUIRE $\sin\theta$ CON $t(\theta)$

SERIE DI TAYLOR DI $f(x)$ INTORNO A x_0

$$\boxed{f(x) \cong \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^{K}(x_0)(x-x_0)^K}{K!}}$$

LA SERIE DI TAYLOR CONVERGE AL VALORE DELLA FUNZIONE, DUNQUE È LA FUNZIONE STESSA

SE SI TRONCA LA SERIE DI TAYLOR AL PRIMO ORDINE SI TROVA LA RETTA TANGENTE IN x_0, QUINDI È APPROSSIMAZIONE DELLA FUNZIONE.

x_0 È UN PUNTO SCELTO

$\downarrow$

SERIE DI TAYLOR TRONCATA AL 1° ORDINE

$$\boxed{f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

APPLICO QUESTA RELAZIONE AL PROBLEMA PRECEDENTE:

$\sin\theta \rightarrow$ È LA $f(x)$ CHE DEVO LINEARIZZARE, IN QUESTO CASO NELLA VARIABILE θ INDIPENDENTE. SCELGO COME PUNTO DI APPLICAZIONE UN GENERICO θ_0 (x_0 DI PRIMA):

$$\sin\theta \approx \sin\theta_0 + (\sin\theta_0)'(\theta-\theta_0) \rightarrow \sin\theta \cong \sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta-\theta_0)$$

OSSIA, IN CASO IN CUI $\boxed{\theta_0 = 0}$: $\sin\theta \approx \sin 0 + \cos(0)\ (\theta - 0)$.

OSSIA:

$\boxed{\sin\theta \approx \theta}$ VALIDA PER PICCOLE OSCILLAZIONI

MA SOLO IN QUESTO CASO! NON SEMPRE È POSSIBILE EFFETTUARE UN'APPROSSIMAZIONE DI QUESTO GENERE (CI SARANNO MOLTI CASI IN CUI NON È POSSIBILE). NON VA MAI LINEARIZZATO SENZA PRIMA FARE DETERMINATE IPOTESI CON PRECISE CONDIZIONI.

QUINDI L'EQUAZIONE SCALARE DI PRIMA (A) È POSSIBILE SCRIVERLA COME:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$\downarrow$ APPROSSIMAZIONE IN θ_0

$$\boxed{m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta} \longrightarrow m\ell\ddot{\theta} + mg\theta = 0$$

QUINDI:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

EQ. SCALARE PENDOLO SEMPLICE (OMOGENEA) CON LINEARIZZAZIONE

LE CUI RADICI DELLA EQ. CARATTERISTICA SONO:

$$\gamma_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{\ell}} \quad \text{IN CASO IN CUI } -\frac{g}{\ell} < 0 \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm j\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \pm j\omega$$

ω_N PULSAZIONE (FREQUENZA) DI OSCILLAZIONE DEL SISTEMA
PULSAZIONE NATURALE

IPOTIZZANDO DI ESSERE NEL CASO IN CUI $\gamma_{1/2}$ SONO CONIUGATE E COMPLESSE, SI AVRÀ UNA SOLUZIONE DEL TIPO

$$\theta_{OM}(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t}$$

CHE TRAMITE LA NOTAZIONE DI EULERO (E I PASSAGGI), APPLICANDO LE C.I. DEL TIPO $\theta(0) = \theta_0$ E $\dot\theta(0) = \dot\theta_0$:

$$\theta_{GO}(t) = \theta_{OM}(t) = \theta_0 \cos\omega t + \frac{\dot\theta_0}{\omega}\sin(\omega t) \quad (1)$$ SOLUZIONE DEL SISTEMA

AVENDO TROVATO LA SOLUZIONE, DERIVO N VOLTE (QUANTO L'ORDINE DELLA ED) COSÌ DA TROVARE ANCHE LA FORZA VINCOLARE INCOGNITA DELLA SECONDA EQUAZIONE SCALARE

$$\dot\theta(t) = \omega\left(-\theta_0 \sin(\omega t) + \frac{\dot\theta_0}{\omega}\cos(\omega t)\right)$$

QUINDI LA (B) DIVENTA:

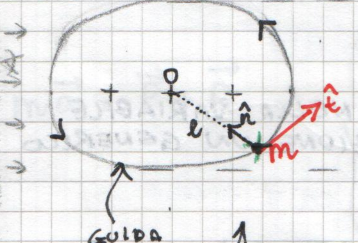
$$R_N = m\ell\dot\theta^2 + mg\cos\theta$$

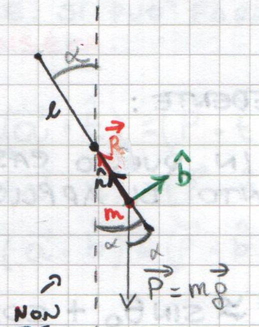
COSÌ HO TROVATO ANCHE R_N CONOSCENDO $\theta(t)$ DALLA I EQ. DIFF. SCALARE

NOTA: UN GRADO DI LIBERTÀ → CI BASTA UNA SOLA EQ. DIFF. PER TROVARE LA FUNZIONE INCOGNITA (θ).

PENDOLO SEMPLICE INCLINATO - OSCILLATORE INCLINATO

È CIRCONF. "SCHIACCIATA" CIOÈ INCLINATA





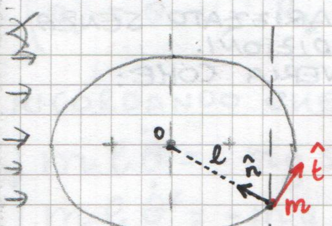
$\hat b$ È USCENTE CON UNA CERTA DIREZIONE DAL FOGLIO (NON ORTOGONALE AL FOGLIO POICHÈ NON È PIANO PARALLELO AL FOGLIO).

$\hat t$ NON SI VEDE PERCHÈ È ENTRANTE NEL PUNTO m

- LA GUIDA CIRCOLARE È INCLINATA DI UN CERTO ANGOLO α RISPETTO AL PIANO DEL FOGLIO.
- LA MASSA NON GIACE PIÙ SULLA VERTICALE MA È VINCOLATA ALLA GUIDA ED INCLINATA DI UN ANGOLO α RISPETTO ALLA VERTICALE.

TALE CONFIGURAZIONE COMPORTA CHE LA REAZIONE VINCOLARE $\vec R$ SIA IN DIREZIONE SIA DI $\hat n$ CHE DI $\hat b$ (CIOÈ È COMPOSIZIONE DI 2 VETTORI CON DIREZIONI DATE DA $\hat n$ E $\hat b$).

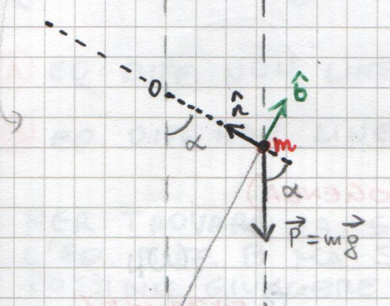
QUINDI SI PUÒ ANCHE PARLARE DI ELLISSE IN QUANTO L'ELLISSE È LA PROIEZIONE DI UNA CIRCONFERENZA, INCLINATA SU UN PIANO CHE MAN MANO DEGENERA IN UNA LINEA.



EFFETTUANDO LE PROIEZIONI SULLA TERNA INTRINSECA $\hat t, \hat n, \hat b$

$$\boxed{m\vec a = \vec P + \vec R}$$

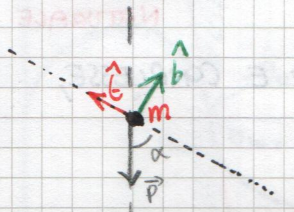
$$\begin{cases} m(\vec a \cdot \hat t) = (\vec P \cdot \hat t) + (\vec R \cdot \hat t) \\ m(\vec a \cdot \hat n) = (\vec P \cdot \hat n) + (\vec R \cdot \hat n) \\ m(\vec a \cdot \hat b) = (\vec P \cdot \hat b) + (\vec R \cdot \hat b) \end{cases}$$



$$\begin{cases} m\ddot s = (m\vec g \cdot \hat t) = 0 \\ m\frac{\dot s^2}{R} = (m\vec g \cdot \hat n) + R_N = -mg\cos\alpha + R_N \\ 0 = (m\vec g \cdot \hat b) + R_b = -mg\sin\alpha + R_b \end{cases}$$

$\hat t$ NON SI VEDE IMMAGINO CHE m SI SIA SPOSTATO UN POCHINO SULLA TRAIETTORIA

QUINDI AVRÒ NON PIÙ SOLO 1 REAZIONE VINCOLARE BENSÌ 2 REAZIONI (PRIMA ERA SOLO SU $\hat n$ ORA ANCHE SU $\hat b$) LA REAZIONE R_b SARÀ SEMPRE PIÙ GRANDE



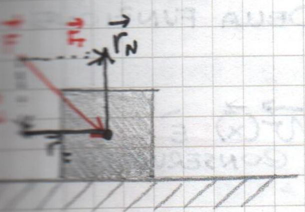
R_N E R_B SONO LE INCOGNITE AUSILIARIE DEL PROBLEMA

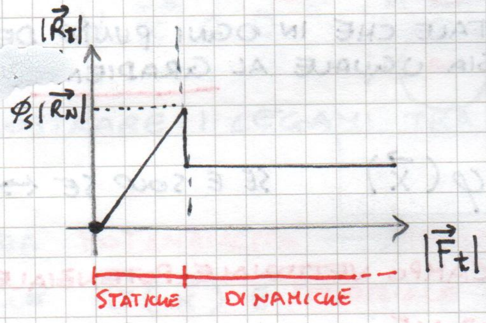
SE CI FOSSE ACCELERAZIONE LUNGO $\hat b$ AVREI UNA TRAIETTORIA DEL GENERE:

$\hat n$ NON SI VEDE; O STATTA

VINCOLI SCABRI (È TRATTAZIONE SEMPLIFICATA, VEDI IL POST-IT)

PER VINCOLO SCABRO SI INTENDE L'ATTRITO CHE È RESISTENZA ALLO SCORRIMENTO DEL PUNTO NELLA DIREZIONE CONSENTITA DAL VINCOLO, CIOÈ TANGENZIALE.





IL GRAFICO CI DICE CHE LA REAZIONE NON RIESCE PIÙ A MANTENERE LE CONDIZIONI STATICHE.

DIPENDONO DAI MATERIALI

ϕ_s COEFF. DI ATTRITO STATICO

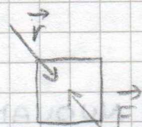
ϕ_D COEFF DI ATTRITO DINAMICO

SE QUINDI:

$|\vec{F}_t| \leq \phi_s |\vec{R}_N| \longrightarrow \boxed{\vec{R}_t = -\vec{F}_t}$ CONDIZIONI STATICHE

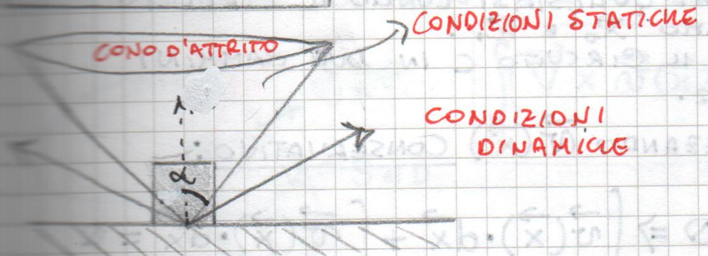
$|\vec{F}_T| > \phi_s |\vec{R}_N| \longrightarrow |\vec{R}_T| = \phi_D |\vec{R}_N|$ CONDIZIONI DINAMICHE

QUINDI $\phi_D < \phi_s$



LA REAZIONE VINCOLARE SARÀ QUINDI (CASO C. DINAMICHE):

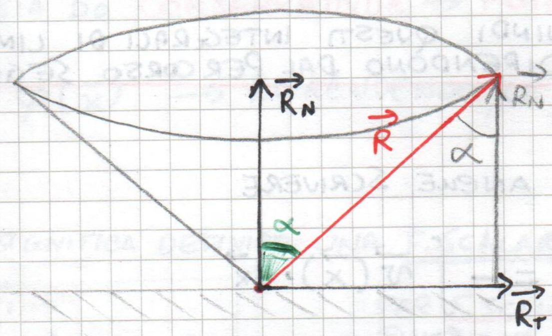
$$\boxed{\vec{R}_T = -\phi_D |\vec{R}_N| \hat{v}}$$



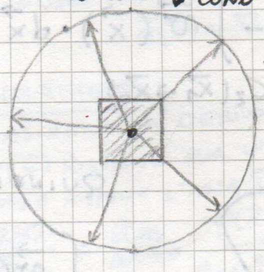
IL CONO DI ATTRITO INDICA CHE SUPERATO IL LIMITE DI INCLINAZIONE DELLA REAZIONE VINCOLARE $\vec{R}$ SI PASSA DALLE CONDIZIONI STATICHE ALLE CONDIZIONI DINAMICHE, PER CUI LA $\vec{R}_T$ VARIA.

DEFINIAMO α COME L'ANGOLO CHE IDENTIFICA IL CONO D'ATTRITO (ENTRO CUI ABBIAMO CONDIZIONI STATICHE)!, ALLORA:

$$|\vec{R}_T| \leq \phi_s |\vec{R}_N| \rightarrow \frac{|\vec{R}_T|}{|\vec{R}_N|} \leq \phi_s \rightarrow \tan\alpha \leq \phi_s \rightarrow \alpha \leq \arctan(\phi_s)$$



DALL'ALTO IL CONO



L'ATTRITO STATICO È VALIDO PER OGNI DIREZIONE

CONSERVATIVITÀ, POTENZIALITÀ E IRROTAZIONALITÀ

SI DEFINISCE UN CAMPO VETTORIALE $\vec{v}(\vec{x}) \rightarrow$ VALORE VETTORIALE IN FUNZIONE AD UN ALTRO VETTORE.

$\vec{v}(\vec{x}) \in D \subset \mathbb{R}^3$ E $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ OSSIA $\vec{x} \in D$

QUINDI LA FUNZIONE VELOCITÀ $\vec{v}(\vec{x})$ DEFINISCE UN CAMPO VETTORIALE.

DEFINIZIONE 1: CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO (A)

$\vec{v}(\vec{x})$ È UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO SE, IN D, SI HA:

$$\boxed{\oint_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall C \in D}$$

QUINDI IL C. VETTORIALE È CONSERVATIVO SE LA CIRCUITAZIONE (L'INTEGRALE DI LINEA ESTESO AD UN CIRCUITO CHIUSO COSTITUITO DA PUNTI APPARTENENTI AL DOMINIO) È NULLA

SE QUINDI IL CAMPO VETTORIALE $\vec{v}(\vec{x})$ È CONSERVATIVO, NE CONSEGUE CHE:

DEFINIZIONE 2: POTENZIALITÀ (B)

ESISTE UNA FUNZIONE SCALARE TALE CHE IN OGNI PUNTO DEL DOMINIO D IL VETTORE $\vec{v}(\vec{x})$, CAMPO VETTORIALE, SIA UGUALE AL GRADIENTE DELLA FUNZIONE SCALARE.

$$\boxed{\vec{v}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})}$$

SE E SOLO SE $\leftrightarrow$ $\vec{v}(\vec{x})$ È CONSERVATIVO

NE CONSEGUE CHE $\vec{v}(\vec{x})$ È UN CAMPO VETTORIALE POTENZIALE

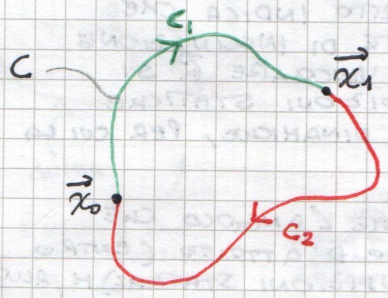
$\varphi(\vec{x})$ È LA FUNZIONE SCALARE POTENZIALE NEL DOMINIO D

IN CUI IL GRADIENTE ∇ È DEFINITO COME:

$$\boxed{\nabla \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \bullet}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \bullet}{\partial z}\hat{k}}$$

$\rightarrow$ ASSOCIA AD UNA FUNZIONE SCALARE UN VETTORE LE CUI COMPONENTI SONO LE DERIVATE DEL CAMPO SCALARE LUNGO LE TRE DIREZIONI

CONSIDERO NUOVAMENTE LA CONSERVATIVITÀ.
PRENDO UN CIRCUITO GENERICO $C \in D$, DOMINIO DI DEFINIZIONE DEL CAMPO VETTORIALE $\vec{v}(\vec{x})$:



SCELGO DUE PUNTI QUALSIASI LUNGO IL CIRCUITO CHIUSO E LI CHIAMO $\vec{x}_0$ E $\vec{x}_1$.
HO DIVISO QUINDI IL CIRCUITO C IN DUE CAMMINI DISTINTI C_1 E C_2.

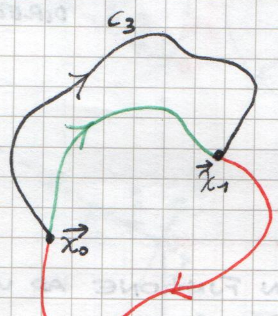
SO CHE, IPOTIZZANDO $\vec{v}(\vec{x})$ CONSERVATIVO:

$$\int_C \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \int_{\substack{C_1 \\ \vec{x}_0 \to \vec{x}_1}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} + \int_{\substack{C_2 \\ \vec{x}_1 \to \vec{x}_0}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0$$

POSSO RISCRIVERE LA RELAZIONE COME:

$$\int_{C_1(\vec{x}_0 \to \vec{x}_1)} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_{C_2(\vec{x}_1 \to \vec{x}_0)} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

$\rightarrow$ QUINDI QUESTI INTEGRALI DI LINEA NON DIPENDONO DAL PERCORSO SEGUITO:



QUINDI POSSO ANCHE SCRIVERE

$$\int_{C_1} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_{C_3} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

OPPURE

$$\int_{C_2} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = -\int_{C_3} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

DEFINIZIONE 3: CONSERVATIVITÀ (2)

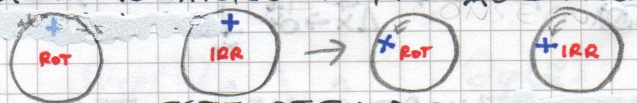
$\vec{v}(\vec{x})$ È CONSERVATIVO SE $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{v} \cdot d\vec{x}$ NON VARIA INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO SCELTO

DEFINISCO INOLTRE:

DEFINIZIONE: IRROTAZIONALITÀ (C)

$$\nabla \times \vec{v}(\vec{x}) = 0 \qquad \forall \vec{x} \in D$$

IL TERMINE ROTORE RIMANDA A "ROTAZIONE". PRENDENDO UN CORPO RIGIDO, SE ESSO SI MUOVE, IL MOTO PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME UNA COMBINAZIONE DI UN MOTO TRASLATORIO E DI UNO ROTATORIO INTORNO AL BARICENTRO.



ADESSO DEVO DIMOSTRARE I LEGAMI TRA QUESTE DEFINIZIONI

DIMOSTRAZIONI

(B) → (C) OSSIA DA POTENZIALITÀ → IRROTAZIONALITÀ

SE IL CAMPO VETTORIALE $\vec{v}(\vec{x})$ È POTENZIALE → ALLORA È ANCHE IRROTAZIONALE

SE $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) \rightarrow \nabla \times \nabla\varphi(\vec{x}) = 0 \quad \forall \varphi(\vec{x})$ DIFFERENZIABILE NEL DOMINIO D.

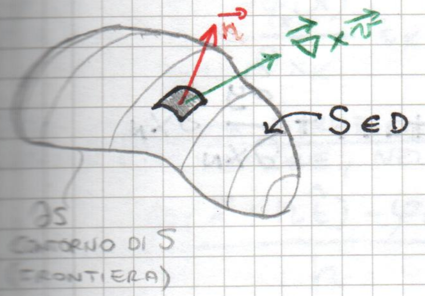
IL ROTORE DEL GRADIENTE È 0.

(C) → (A) OSSIA DA IRROTAZIONALITÀ → CONSERVATIVITÀ

PRIMA VA INTRODOTTO IL TEOREMA DI STOKES:

DATA UNA SUPERFICIE $S(\vec{x}) \in D$ (FUNZIONE $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) QUALSIASI SUPERFICIE APPARTENENTE AL DOMINIO DI DEFINIZIONE DI $\vec{v}(\vec{x})$. D È UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO (NON HA BUCHI).

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x})) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\partial S} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$$



(A) → (B) OSSIA DA CONSERVATIVITÀ → POTENZIALITÀ

$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$ → RIPRENDENDO LA DEFINIZIONE (2) DELLA CONSERVATIVITÀ

FARE:

$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{v} \cdot d\vec{x}$ SIGNIFICA DEFINIRE UNA F. SCALARE DI PUNTO, OSSIA:

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}}$$

PER F. SCALARE DI PUNTO SI INTENDE UNA FUNZIONE CHE NON DIPENDE DAL PERCORSO SEGUITO MA SOLO DA $\vec{x}_0$ E DA $\vec{x}_1$, OSSIA DIPENDE SOLO DA P.TO INIZIALE E P.TO FINALE

QUINDI SI VUOLE DIMOSTRARE CHE SE:

$\vec{v}(\vec{x})$ È CONSERVATIVO → $\vec{v}(\vec{x})$ È POTENZIALE → $\exists$ FUNZ. POTENZIALE $\varphi(\vec{x})$

DIMOSTRAZIONE: DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$

SI CONSIDERA LO SPOSTAMENTO $\Delta\vec{x} \in D$ DOMINIO DELLA F. $\varphi(\vec{x})$:

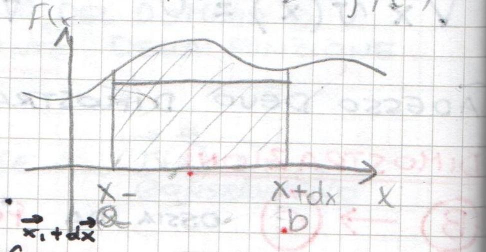
$$\Delta\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1 + \Delta\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_1 + \Delta\vec{x}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

OSSIA AD UNA VARIAZIONE $\Delta\vec{x} = (\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{x}$ CORRISPONDE UNA VARIAZIONE $\Delta\varphi(\vec{x})$

ADESSO EFFETTUO IL LIMITE DI $\Delta\varphi(\vec{x})$ FACENDO TENDERE $\Delta\vec{x}$ A $\vec{0} \rightarrow \Delta\vec{x} \rightarrow \vec{0}$

$$\lim_{\Delta\vec{x}\to\vec{0}} \Delta\varphi(\vec{x}) \Rightarrow \lim_{\Delta\vec{x}\to d\vec{x}} \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_1+\Delta\vec{x}} \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x} \Rightarrow \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_1+d\vec{x}} \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

$$f_c(b-a) = \int f(\vec{x})dx$$



PER IL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE SO CHE:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

RICORDANDO CHE $\Delta\varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}+\Delta\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_1+d\vec{x}} \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$

$$\lim_{\Delta\vec{x}\to d\vec{x}} \Delta\varphi = d\varphi(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})(\vec{x}+\Delta\vec{x}-\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

$$d\varphi(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x}$$

IL DIFFERENZIALE $d\varphi(\vec{x})$ QUANTIFICA LA VARIAZIONE INFINITESIMA DELLA FUNZIONE RISPETTO AD UNA VARIABILE INDIPENDENTE, IN PARTICOLARE IN QUESTO CASO RISPETTO AD OGNUNA DELLE VARIABILI INDIPENDENTI CHE COMPONGO $\vec{x}$. IN QUESTO CASO PARLIAMO DI DIFFERENZIALE TOTALE POICHÉ ANDIAMO A QUANTIFICARE LA VARIAZIONE SU TUTTE LE VARIABILI, ALTRIMENTI SE FOSSE SOLO UNA SI PARLEREBBE DI DIFFERENZIALE PARZIALE (CIOÈ SI QUANTIFICA RISPETTO AD UNA SOLA DELLE n VARIABILI INDIP.).

DIFF. PARZIALE DI $y = f(x_1, \dots, x_N)$ 1 $\rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) dx_i$

DIFF. TOTALE DI $y = f(x_1, \dots, x_N)$ 2 $\rightarrow$ $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_N}dx_N$

$$\downarrow$$

$$dy = \nabla y \cdot d\vec{x}$$

QUINDI $d\varphi(\vec{x}) = \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial z}dz$

CHE DIVENTA:

$$d\varphi(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \vec{v}\cdot d\vec{x}$$

SE E SOLO SE IL DOMINIO D È PRIVO DI BUCHI (SEMPLIC. CONNESSO).

FORZE CONSERVATIVE, TRAIETTORIE E CONCETTI DI EQUILIBRIO

UN PUNTO MATERIALE SOGGETTO A CAMPI DI FORZE CONSERVATIVI PUÒ CAMBIARE IL SUO STATO (LA SUA POSIZIONE) IN MODO TALE CHE QUESTE FORZE COMPIANO UN LAVORO CHE NON DIPENDE DAL PERCORSO SCELTO. QUINDI POSSIAMO ESTENDERE IL POTENZIALE PER DESCRIVERE UNA FORZA E LE SUE COMPONENTI IN FUNZIONE DI QUESTA FUNZIONE SCALARE.

QUINDI $\vec{F}$ È UN CAMPO VETTORIALE CHE DEFINISCO FORZA T.C. $\vec{F}(\vec{x})$
E SE $\vec{F}$ È CONSERVATIVA, ALLORA:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})}$$

ESISTE IL SUO POTENZIALE $\varphi(\vec{x})$ CHE È UNA FUNZIONE SCALARE.

LA FORZA È QUINDI ASSOCIATA AD UN CAMPO POTENZIALE.

IN GENERALE SI STUDIA $\vec{F}$ PROIETTATA IN UNA DIREZIONE DELLO SPAZIO (DIREZIONE GENERICA):

$\vec{F}\cdot\hat{w} = F_w = \nabla\varphi(\vec{x})\cdot\hat{w}$ DOVE $\hat{w} = \hat{i} \rightarrow$ QUALSIASI VERSORE DEL SISTEMA DI RIF. CARTESIANO

... RISCRIVO COME:

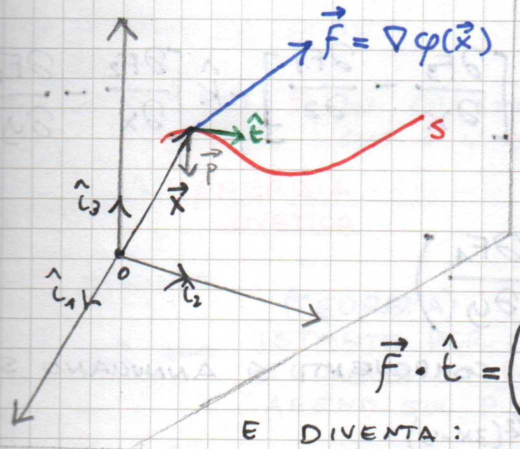
$$\vec{F}\cdot\hat{\imath}_K = (f_1\hat{\imath}_1 + f_2\hat{\imath}_2 + f_3\hat{\imath}_3)\cdot\hat{\imath}_K = f_K$$

MENTRE:

$$\nabla\varphi(\vec{x})\cdot\hat{\imath}_K = \left(\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial y}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial z}\hat{\imath}_3\right)\cdot\hat{\imath}_K = \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_K}$$

VARIABILE ASSOCIATA A QUELLA DIREZIONE

DA CUI $f_K = \dfrac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_K}$



ADESSO PROIETTO LA FORZA $\vec{F}(\vec{x})$ LUNGO IL VERSORE $\hat{t}$ CHE È DEFINITO COME (IN QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO):

$$\hat{t} = (\underbrace{t_1\hat{\imath}_1 + t_2\hat{\imath}_2 + t_3\hat{\imath}_3}_{\text{COSENI DIRETTORI DELLA DIREZIONE INDIVIDUATA DA } \hat{t}})$$

QUINDI:

$$\vec{F}\cdot\hat{t} = \left(\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_1}\hat{\imath}_1 + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_2}\hat{\imath}_2 + \frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial x_3}\hat{\imath}_3\right)\cdot(t_1\hat{\imath}_1 + t_2\hat{\imath}_2 + t_3\hat{\imath}_3)$$

E DIVENTA:

$$\vec{F}\cdot\hat{t} = \sum_{K=1}^{3}\frac{\partial\varphi_K(\vec{x})}{\partial x_K}t_K = \boxed{\left.\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial s}\right|_{\vec{x}}} = \boxed{\vec{F}\cdot\hat{t}}$$

DERIVATA DIREZIONALE DI $\varphi(\vec{x})$ LUNGO LA TRAIETTORIA (S, LUNGO L'ASCISSA CURVILINEA)

PER DERIVATA DIREZIONALE DI UNA FUNZIONE SCALARE COME $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_N)$ LUNGO UN VETTORE, NEL NOSTRO CASO $\hat{t}$, È DEFINITA DAL LIMITE:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\vec{x}+h\hat{t}) - \varphi(\vec{x})}{h}$$

RAPPRESENTA QUINDI LA VARIAZIONE DI $\varphi(\vec{x})$ LUNGO $\hat{t}$
PUÒ ESSERE RISCRITTO COME:

$\varphi(s) \rightarrow$ F. POTENZIALE CHE DIPENDE DA S:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varphi(s+\Delta s) - \varphi(s)}{\Delta s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \vec{F}\cdot\hat{t}$$

SE E SOLO SE $\vec{F}$ È CONSERVATIVA DA CUI φ È F. POTENZIALE DI $\vec{F}$.

APPROFONDIMENTI; DATO $\vec{v}(\vec{x})$ CON $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^N$ (NOSTRO CASO $\mathbb{R}^3$)

CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO

$$\oint_C \vec{v}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall c \in D$$

EQUIVALENZA IN MECCANICA

CAMPO VETTORIALE POTENZIALE

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$$

CAMPO IRROTAZIONALE

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{x}) = 0$$

EQUIVALENZA IN MECCANICA DEI FLUIDI

- SE UN CAMPO VETTORIALE È IRROTAZIONALE NON È DETTO CHE SIA CONSERVATIVO

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{x}) = 0 \not\Rightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) \quad \text{MA}$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{x}) = 0$$

ESEMPI:
VERIFICARE CHE IL CAMPO VETTORIALE $\vec{F}$ È UN CAMPO IRROTAZIONALE NEL SUO INSIEME DI DEFINIZIONE:

$$\vec{F}(x,y,z) \Rightarrow \vec{F} = \left(\frac{x-3y}{2(x-y)^{3/2}} ; \frac{3x-y}{2(x-y)^{3/2}} ; 0 \right) \quad \text{QUINDI } F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

DEFINIAMO $\underline{D}$ L'INSIEME DI DEFINIZIONE:

$\sqrt{(x-y)^3} \neq 0 \to x \neq y$

$(x-y)^3 > 0 \to x > y$

$\Rightarrow D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y ; x > y\}$ È SEMPLICEMENTE CONNESSO

APPLICO IL ROTORE DI $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \hat{\imath}\left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right] - \hat{\jmath}\left[\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]$$

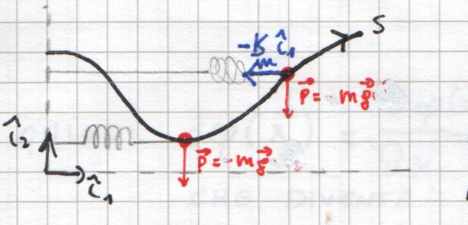
$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} ; \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} ; \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

MENTRE LE DERIVATE PARZIALI DELLE PRIME DUE COMPONENTI SI ANNULLANO SUBITO, LA TERZA È:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3x-y}{2(x-y)^{3/2}}\right] = \frac{6(x-y)^{\frac{3}{2}} - (3x-y)\cdot 3 \cdot 2 (x-y)^{\frac{1}{2}}(3x-y)}{4(x-y)^3}$$

SE LO FACCIO PURE PER $\frac{\partial}{\partial y}(F_1)$ OTTENGO LO STESSO RISULTATO; SI ANNULLANO A VICENDA.

QUINDI $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \rightsquigarrow$ IN TEORIA $\vec{0}$



LA RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI LUNGO LA DIREZIONE DEL PROFILO CHE IL PUNTO STA PERCORRENDO È QUELLA CHE CONTA (IL PROFILO DESCRIVE I SUOI GRADI DI LIBERTÀ).
SE IL PUNTO È VINCOLATO A MUOVERSI LUNGO QUESTA GUIDA ALLORA HA UN SOLO GRADO DI LIBERTÀ.
L'ASCISSA CURVILINEA S BASTA A DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DEL PUNTO.

L'INTENSITÀ DELLA RISULTANTE DELLE FORZE CAMBIA LUNGO LA TRAIETTORIA COSICCHÉ AVRÀ UN MASSIMO O PIÙ MASSIMI, MINIMI E PUNTI IN CUI LA RISULTANTE È NULLA. CIOÈ IL PUNTO MATERIALE IN UN PUNTO GENERICO DELLA TRAIETTORIA ASSUMERÀ, DA UNO STATO INIZIALE DI QUIETE, UN'ACCELERAZIONE LUNGO IL SUO GRADO DI LIBERTÀ PROPORZIONALE ALL'INTENSITÀ DELLA PROIEZIONE DELLA RISULTANTE LUNGO IL G.D.L. SE L'ACCELERAZIONE È NULLA, QUINDI LA PROIEZIONE DELLA RISULTANTE È 0, IL PUNTO RIMANE IN STATO DI QUIETE.

1) LE COMPONENTI DI UNA FORZA CONSERVATIVA SONO LEGATE ALLE DERIVATE DELLA FUNZIONE POTENZIALE ASSOCIATA.

2) LE COMPONENTI DELLA FORZA RISPETTO ALLA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA (UNICO GRADO DI LIBERTÀ PER UN PUNTO VINCOLATO ALLA TRAIETTORIA S), ESSENDO LEGATE ALLA ACCELERAZIONE CHE IL PUNTO ASSUME IN QUELLA POSIZIONE, POSSONO DAR LUOGO A PUNTI PARTICOLARI (COME POSIZIONI) IN CUI IL PUNTO MATERIALE È IN EQUILIBRIO INDEFINITIVAMENTE SE VIENE LASCIATO LÌ CON VELOCITÀ NULLA.
QUESTO È IL CONCETTO DELL'EQUILIBRIO.

LE DERIVATE DELLA F. POTENZIALE DI UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO GIOCANO UN RUOLO FONDAMENTALE NELLA DEFINIZIONE DI EQUILIBRIO IN UN CERTO PUNTO PER UN PUNTO MATERIALE.

BILANCIO ENERGETICO - LAVORO ED ENERGIA (IN MECCANICA)

DATO UN PUNTO MATERIALE, ALLORA:

TEOREMA ENERGETICO DEL PUNTO MATERIALE
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

DALLA 2° LEGGE DI NEWTON:

$$m\vec{a} = \vec{f} \longrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \xrightarrow[\text{I MEMBRI PER } \vec{v}]{\text{FACENDO IL P. SCALARE AD ENTRAMBI}} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{f}\cdot\vec{v}$$

$$m\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} \; *$$

↓ VIENE DA QUESTO

$$\frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v} \; *$$

IN CUI STABILISCO UN NUOVO VALORE, DI TIPO ENERGETICO, CHE È L'ENERGIA CINETICA.

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2}mv^2}$$ ENERGIA CINETICA

DA CUI * DIVENTA

(TEOREMA)

$$\boxed{\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}} \; * \rightarrow$$ ISTANTE PER ISTANTE LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DELL'E. CINETICA EGUAGLIA LA POTENZA RISULTANTE SVILUPPATA DA TUTTE LE FORZE AGENTI SUL PUNTO MATERIALE.

— DERIVATA TEMPORALE DELL'E. CINETICA

PER INTRODURRE IL CONCETTO DI LAVORO, PRENDO L'EQ. DELLA POTENZA RISULTANTE * E MOLTIPLICO I MEMBRI PER UN INFINITESIMO DEL TEMPO t:

$$d\mathcal{T} = \frac{d\mathcal{T}}{dt}dt = (\vec{f}\cdot\vec{v})\,dt \longrightarrow \text{MA} \quad \vec{v}\,dt = d\vec{x} \quad *_1 \qquad \left(k\vec{a}\cdot\vec{b} = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})\right)$$

DA CUI:

$$\boxed{d\mathcal{T} = \vec{f}\cdot d\vec{x} = d\mathcal{L}}$$

LAVORO ELEMENTARE → Q.TÀ DI LAVORO COMPIUTO DALLA RISULTANTE DELLE FORZE NELL'INTERVALLO INFINITESIMO ASSOCIATO AD UNO SPOSTAMENTO $d\vec{x}$

PER DIMOSTRARE LA $*_1$:

$$(\vec{f}\cdot\vec{v})\,dt = [(f_1\hat{i}_1 + f_2\hat{i}_2 + f_3\hat{i}_3)\cdot(v_1\hat{i}_1 + v_2\hat{i}_2 + v_3\hat{i}_3)]\,dt =$$
$$= (f_1v_1 + f_2v_2 + f_3v_3)\,dt = (f_1v_1\,dt + f_2v_2\,dt + f_3v_3\,dt) =$$
$$= (f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3) \longrightarrow \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt = \vec{f}\cdot d\vec{x}$$

QUINDI SVOLGENDO

$$\boxed{\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} d\mathcal{T} = \int_{C\,[x(t_1)\to x(t_2)]} \vec{f}\cdot d\vec{x}}$$

→ LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA TRA DUE STATI SUCCESSIVI (MUOVENDOCI DA $\vec{x}_1$ A $\vec{x}_2$) DIPENDE DALLA TRAIETTORIA COPERTA DA $\vec{x}_1$ A $\vec{x}_2$.

(TEOREMA)

LAVORO COMPIUTO DALLE F. ESTERNE

$$\boxed{\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{C_{1\to2}}} \rightarrow$$ LAVORO COMPIUTO DA TUTTE LE FORZE ESTERNE, IN GENERALE NON CONSERVATIVE, PER SPOSTARE IL PUNTO MATERIALE DA $\vec{x}_1$ A $\vec{x}_2$ SEGUENDO LA TRAIETTORIA C.

VARIAZIONE E. CINETICA

IPOTIZZANDO LA FORZA CONSERVATIVA $\vec{f}_c$ ALLORA:

CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE AFFINCHÉ LA FORZA SIA CONSERVATIVA È CHE SIA POSIZIONALE, CIOÈ DIPENDENTE SOLO DA $\vec{x} \longrightarrow \vec{f}(\vec{x})$

$$\oint_C \vec{f}_c\cdot d\vec{x} = 0 \rightarrow \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_c\cdot d\vec{x} = \mathcal{L}_{1\to2}$$ → NON DIPENDE DAL PERCORSO

QUINDI IL CONCETTO DI CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO ASSUME UN SIGNIFICATO FISICO.

PER CAMPO VETTORIALE SI INTENDE IN QUESTO CASO NON UNA GENERICA FUNZIONE MA LA FORZA APPLICATA.
IL LAVORO CHE LA FORZA SVOLGE PER PORTARE IL SUO PUNTO DI APPLICAZIONE DA UNA POSIZIONE $\vec{x}_1$ AD UN'ALTRA $\vec{x}_2$ NON DIPENDE DAL PERCORSO SE LA FORZA È CONSERVATIVA.

SI ASSOCIA QUINDI A $\vec{f}_c$ IL CAMPO POTENZIALE φ_c (F. POTENZIALE DI $\vec{f}_c$):

$$\boxed{\vec{f}_c = \nabla \varphi_c}$$ $\vec{f}_c$ CAMPO VETTORIALE POTENZIALE

$$\mathcal{L}_{1\to 2} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_c \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \nabla\varphi_c \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\varphi_c = \varphi_{c_2} - \varphi_{c_1}$$

POICHÈ $\varphi_c = \varphi_c(\vec{x})$ ALLORA:

$$\nabla\varphi_c(\vec{x}) = \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_1}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_2}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_3}\hat{k}$$

MENTRE $d\vec{x} = (dx_1\hat{\imath} + dx_2\hat{\jmath} + dx_3\hat{k})$

QUINDI $\nabla\varphi_c(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = d\varphi_c(\vec{x})$ → DIFFERENZIALE DI $\varphi_c(\vec{x})$

$$d\varphi_c(\vec{x}) = \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi_c(\vec{x})}{\partial x_3}dx_3$$

ADESSO SI PUÒ CONSIDERARE LA FORZA COME SOMMA DI DUE CONTRIBUTI, UNO CONSERVATIVO E UNO NON CONSERVATIVO.

$$\boxed{\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_{NC}}$$ FORZA DEFINITA DA 2 CONTRIBUTI

QUINDI LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA È:

$$\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_c \cdot d\vec{x} + \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{f}_{NC} \cdot d\vec{x} \to \boxed{\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{1\to2} + \mathcal{L}_{NC_{1\to2}}}$$ VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

DEFINISCO ORA L'ENERGIA POTENZIALE:

IL SEGNO MENO DELL'E. POTENZIALE È DOVUTO AL FATTO CHE AD UN LAVORO POSITIVO CORRISPONDE UNA RIDUZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE.

$$\boxed{U(\vec{x}) = -\varphi(\vec{x})}$$ $\rightsquigarrow U(\vec{x}) = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \nabla\varphi \cdot d\vec{x}$

ENERGIA POTENZIALE → $dU(\vec{x}) = -d\varphi(\vec{x})$

È UNA FUNZIONE SCALARE DI PUNTO ASSOCIATA AD UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO PARI ALLA FUNZIONE POTENZIALE CAMBIATA DI SEGNO.

TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA (TEOREMA)

$$\boxed{\mathcal{T}_2 + U_2 - \mathcal{T}_1 - U_1 = \mathcal{L}_{NC_{1\to2}}}$$
$$\boxed{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}_{NC_{1\to2}}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_M = \mathcal{T} + U}$$ ENERGIA MECCANICA

IN CASO IN CUI $\mathcal{L}_{NC_{1\to2}} = 0$ QUINDI SI HA SOLO LAVORO CONSERVATIVO

$$\boxed{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 0} \to \boxed{\mathcal{E}_M = \text{COSTANTE}}$$

IN CASO DI FORZE CONSERVATIVE

POICHÈ È POSSIBILE FISSARE IN MODO ARBITRARIO IL LIVELLO 0 DELL'E. POTENZIALE, ESSA È DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA

EQUILIBRIO E STABILITÀ

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

LA DERIVATA DELLE FORZE È LEGATA AL CONCETTO DI EQUILIBRIO.
DEFINISCO UNO STATO DI EQUILIBRIO DI UN PUNTO MATERIALE COME:

$\vec{x}_e$ È POSIZIONE DI EQUILIBRIO ED È COSTANTE, INFATTI $\frac{d\vec{x}_e}{dt} = \vec{0} = \vec{v}$
SE $\vec{x}_e$ FOSSE $\neq$ COST ALLORA $\vec{v} \neq 0$

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \rightarrow \vec{x} = \vec{x}_e \text{ E } \vec{v} = 0 \text{ IN } \vec{x}_e \rightarrow \vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}$$

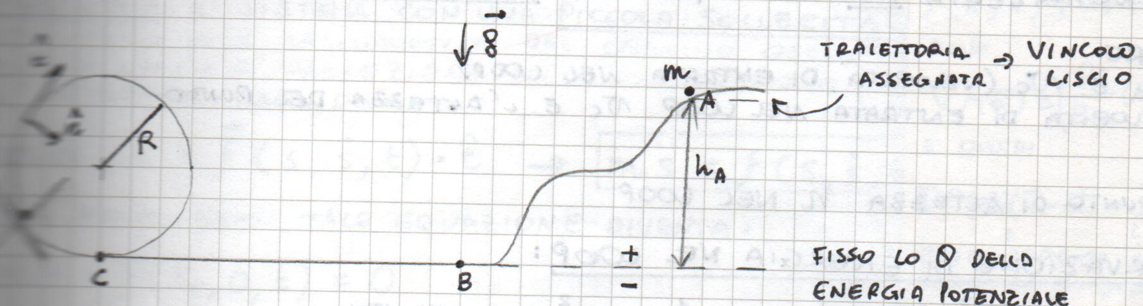
FORZE IN GIOCO (RISULTANTE) CHE DIPENDONO DALLA POSIZIONE, VELOCITÀ E TEMPO

SE IL PUNTO MATERIALE HA $\vec{v} = 0$ IN $\vec{x}_e$ AD UN DATO t LA RISULTANTE DELLE FORZE È NULLA ED IL PUNTO MATERIALE RIMANE IN QUELLA POSIZIONE INDEFINITIVAMENTE PER SEMPRE.

MA SE PERTURBO IL PUNTO MATERIALE NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO $\vec{x}_e$:

- EQUILIBRIO INSTABILE: IL PUNTO ASSUME UN MOTO ~~CHE~~ SI ALLONTANA INDEFINITIVAMENTE DA $\vec{x}_e$.
- EQUILIBRIO STABILE: IL PUNTO ASSUME UN MOTO CONFINATO IN UN INTERNO DI $\vec{x}_e$.
- ASINTOTICAMENTE STABILE: IL PUNTO ASSUME UN MOTO TALE CHE $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_e$ PER $t \rightarrow \infty$

APPLICAZIONE - LOOP



DATI R, m
$v_A = 0$
LE FORZE IN GIOCO SONO CONS.
$E_M = $ COST
$E_M = T + U = $ COST

PROBLEMA: DETERMINARE h_A T.C. NON CI SIA DISTACCO NEL LOOP

SO CHE L'ENERGIA MECCANICA E_{M_A} È: $E_{M_A} = mgh_A$ 1°

MENTRE IN B È: $E_{M_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$ 2°

NEL 1° CASO LA MASSA SI TROVA A VELOCITÀ NULLA DA CUI $T = 0$, NEL 2° CASO LA MASSA SI TROVA AD $h = 0$ DA CUI $mgh = 0$ QUINDI $U = 0$

PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA SO CHE:

$$E_{M_A} - E_{M_B} = 0 \rightarrow E_{MA} = E_{M_B} \rightarrow mgh_A = \frac{1}{2} m v_B^2$$

DA CUI $h_A = \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g}$ NEL CASO DI VINCOLO LISCIO SENZA ATTRITO

CONDIZIONE DI DISTACCO

LA CONDIZIONE DI DISTACCO AVVIENE NEL MOMENTO IN CUI LA REAZIONE VINCOLARE $R_N = 0$

L'EQUAZIONE DEL MOTO NEL LOOP È:

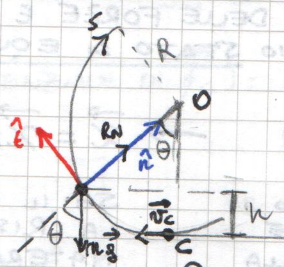
1) $m\vec{g} + \vec{R}_N = m\vec{a}$ IL LOOP È TRAIETTORIA CIRCOLARE ASSEGNATA ($R = $ COST)

$\vec{R}_N$ NON COMPIE LAVORO PURCHÉ SIA ORTOGONALE ALL'UNICO GRADO DI LIBERTÀ, CIOÈ ALLO SPOSTAMENTO CHE AVVIENE LUNGO LA TRAIETTORIA ASSEGNATA QUINDI LUNGO LA TANGENTE.

PROIETTO L'EQ. 1 SULLA TERNA INTRINSECA: $\hat{t}, \hat{n}$ (CASO BI-DIMENSIONALE)

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}^{(E)} \rightarrow m\left(\ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n}\right) = m\vec{g} + \vec{R}_N$$

RICORDANDO CHE $ds = \ell\, d\theta$ O IN GENERALE $ds = \ell(\theta)\, d\theta$
OPPURE PER SPOSTAMENTI NON INFINITESIMI $s = \ell\theta$ IN CUI $\ell = R$
AVRÒ CHE:



$$\hat{t})\quad m\ddot{\theta}R = -mg\sin\theta \quad ①$$

$$\hat{n})\quad m\dot{\theta}^2 R = -mg\cos\theta + R_N \quad ②$$

IMPONIAMO IL CASO $R_N = 0$ NELLA 2°:

$m\dot{\theta}^2 R = -mg\cos\theta$ → È VERIFICATA SE E SOLO SE $-mg\cos\theta > 0$
INFATTI $m, R > 0$ PER DEFINIZIONE MENTRE $\dot{\theta}$ È AL QUADRATO QUINDI ANCHE ESSO > 0

POICHÉ m E $g > 0$ ALLORA È $-\cos\theta > 0$ NECESSARIAMENTE
$\cos\theta < 0$

COMUNQUE SI HA LA PRESENZA DI UNA EQ. DIFF. NON LINEARE ②,
CON IL PENDOLO SI ERA RISOLTA LINEARIZZANDOLA (LÌ ERA IL $\sin\theta$, QUI IL $\cos\theta$)
TROVANDO UNA APPROSSIMAZIONE CON CUI SI RISOLVEVA L'EQUAZIONE, TROVANDO UNA SOLUZIONE; DALLA SOLUZIONE SI TROVAVA ANCHE LA INCOGNITA, REAZIONE NORMALE MA TUTTO CIÒ PER PICCOLE OSCILLAZIONI INTORNO AD UN PUNTO.
QUI L'EQUAZIONE LINEARIZZATA NON VALE POICHÉ IL PROBLEMA È DINAMICO.

VOGLIO ORA TROVARE
1) • IL LEGAME TRA h_A E v_C (VELOCITÀ DI ENTRATA NEL LOOP)
2) • IL LEGAME TRA LA VELOCITÀ DI ENTRATA NEL LOOP v_C E L'ALTEZZA DEL PUNTO MATERIALE.

$\cos\theta \approx \theta$ → NEL PUNTO DI ALTEZZA h NEL LOOP

APPLICO LA CONSERVAZIONE DI ENERGIA NEL LOOP:

$$E_M = T + U_p = mgh + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_C^2 = \text{COSTANTE}$$

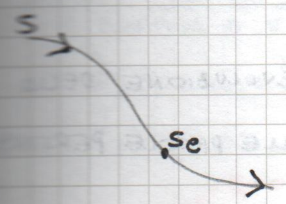
QUINDI:

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

IN CUI $h = R - R\cos\theta$
$\dot{s} = \dot{\theta}R = v$

EQUILIBRIO E STUDIO DELLA STABILITÀ - PUNTO MATERIALE CON 1 GRAD. D. L.

UNA SOLLECITAZIONE È IN GENERALE DIPENDENTE DALLA POSIZIONE, VELOCITÀ E TEMPO.
DEFINISCO UN'ASCISSA CURVILINEA S E UN PUNTO MATERIALE SU DI ESSA:



TRAIETTORIA ASSEGNATA 1 G.D.L

LA SOLLECITAZIONE $\vec{f}$ È DEFINITA DA: EQUILIBRIO STATICO $\vec{x}_E$

$$\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \longrightarrow \boxed{\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}} \quad \forall t$$

NELLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO HO $\vec{x}_e = \text{COST}$ E $\vec{v} = \vec{0}$

QUINDI LA SOLLECITAZIONE COMPLESSIVA CHE SI HA QUANDO $\vec{x}_e = \text{COST}$ A $\vec{v} = \vec{0}$ È PROPRIO $\vec{0}$.

LA SOLLECITAZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA CON 1 SOLO PARAMETRO NEL MOMENTO IN CUI IL PUNTO MATERIALE È VINCOLATO AD UNA TRAIETTORIA ASSEGNATA, QUINDI, IN QUESTO CASO, SI HA 1 SOLO G.D.L.:

$$\vec{F}(s, \dot{s}, t) \longrightarrow \boxed{\vec{f}(s_e, 0, t)} \quad \forall t$$

NELLE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SI HA $s_e = \text{COST}$ A $\dot{s} = 0$

EQUAZIO

* MANCA PEZZO VEDI POST IT

STUDIO DELLA STABILITÀ

PERTURBO IL SISTEMA CON UNA PICCOLA SOLLECITAZIONE
CONSIDERO CHE LA CURVATURA DEL CERCHIO OSCULATORE SIA TALE PER CUI $R \to \infty$
QUINDI NON C'È PROIEZIONE DELLA SOLLECITAZIONE (E QUINDI DI $\vec{a}$) LUNGO $\hat{a}$
L'EQUAZIONE ORARIA DIVENTA:

$$m\vec{a} \cdot \hat{t} = \vec{f}(s, \dot{s}, t) \cdot \hat{t} \rightarrow \boxed{m\ddot{s} = f(s, \dot{s}, t)} \quad \text{EQ. ORARIA}$$

ALL'EQUILIBRIO TALE EQUAZIONE DIVENTA:

$$m\ddot{s} = f(s_e, 0, t) = 0$$

SE APPLICO UNA PICCOLA PERTURBAZIONE ALL'EQUILIBRIO AVRÒ:

$$m\ddot{s} = f(s_e + s', \dot{s}', t) = ? \qquad \text{IN CUI } s(t) = s_e + s'(t)$$

QUELLO CHE VOGLIO SAPERE È COME VARIA LO STATO DINAMICO NELL'INTORNO DI UNO STATO MECCANICO DI EQUILIBRIO.
NEL NOSTRO CASO INTORNO A s_e A $\dot{s}_e = 0$. SI DEVE QUINDI ESPANDERE LA FUNZIONE SOLLECITAZIONE TRAMITE LA SERIE DI TAYLOR

SERIE DI TAYLOR

$f(s_e + s', \dot{s}, t)$

$$f(s, \dot{s}, t) \approx f(s_e, 0, t) + \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{EQ}(s - s_e) + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{s}}\right|_{EQ}(\dot{s} - 0) + o(s'^2, \dot{s}'^2)$$

NON C'È $\frac{\partial f}{\partial t}$ POICHÉ f DIPENDE DA s E $\dot{s}$ CHE A LORO VOLTA DIP. DAL TEMPO t. IN REALTÀ f: $f(s, \dot{s})$

CHE È POSSIBILE RISCRIVERE COME, ESSENDO:

$$s(t) = s_e + s'(t) \rightarrow s'(t) = s(t) - s_e$$

$$\boxed{f(s, \dot{s}, t) \approx f(s_e, 0, t) + \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{EQ} s' + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{s}}\right|_{EQ} \dot{s}' + \cancel{o(s'^2, \dot{s}'^2)}}$$

APPROSSIMAZIONE DELLA F. REALE A N VARIABILI REALI INTORNO A PUNTO DI EQUILIBRIO

L'APPROSSIMAZIONE È TRONCATA AL PRIMO ORDINE, QUINDI SOSTITUENDOLA NELL'EQ. ORARIA OTTENGO:

$$\boxed{m\ddot{s}' = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{EQ} s' + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{s}}\right|_{EQ} \dot{s}'}$$

IN QUANTO I TERMINI DOPO IL PRIMO ORDINE SONO STATI ELIMINATI E $f(s_e, 0, t) = 0$
IN CUI INOLTRE $s(t) = s_e + s'(t) \rightarrow \ddot{s}(t) = \ddot{s}'(t) \rightarrow \ddot{s}$ COINCIDE CON LA DERIVATA SECONDA DELLA PERTURBAZIONE $\ddot{s}'$

CHE SI RISCRIVE:

$$\boxed{m\ddot{s}' - \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{EQ} s' - \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{s}}\right|_{EQ} \dot{s}' = 0}$$

EQUAZIONE ORARIA CON APPROSSIMAZIONE PER LO STUDIO DI EQ. E STAB.

PER ANALIZZARE L'EQ. DIFF. IMPONGO:

$$\boxed{-\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{s}'}\right|_{EQ} = G} \quad \text{E} \quad \boxed{-\left.\frac{\partial f}{\partial s'}\right|_{EQ} = K}$$

CHE QUINDI DIVENTA:

$$\boxed{m\ddot{s}' + G\dot{s}' + Ks' = 0}$$

EQ. DIFF. OMOGENEA IN CUI L'INCOGNITA È L'EVOLUZIONE DELLA PERTURBAZIONE NEL TEMPO.
È EQUAZIONE CHE GOVERNA LA DINAMICA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI SEMPRE ATTORNO AL PUNTO $(s_e, 0, t)$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$s(t) = Ce^{\gamma t} \rightarrow mC\gamma^2 e^{\gamma t} + G\gamma e^{\gamma t} + Ke^{\gamma t} = 0$$

$$Ce^{\gamma t}(m\gamma^2 + G\gamma + K) = 0$$

LA CUI EQ. CARATTERISTICA HA LE RADICI: $m\gamma^2 + G\gamma + K = 0$

$$\boxed{\gamma_{1/2} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 - 4mK}}{2m}}$$

RADICI EQ. CARATTERISTICA ASSOCIATA

IN CUI G E K SONO COSTANTI (COME DEL RESTO m) E RAPPRESENTANO LE DERIVATE DELLA FUNZIONE $f(s, \dot{s}, t)$, FUNZIONE DI POSIZIONE, VELOCITÀ E TEMPO (CHE RAPPRESENTA A SUA VOLTA LA RISULTANTE DELLE FORZE PROIETTATE), VALUTATE NEL PUNTO DI EQUILIBRIO.

LA SOLUZIONE GLOBALE CHE CERCHIAMO È:

$$s(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$

IN BASE AI VALORI DI G E K ($m > 0$ SEMPRE) IL COMPORTAMENTO, QUINDI L'ANDAMENTO DELLA SOLUZIONE, CAMBIERÀ PER $t \to \infty$.
IN GENERALE SI HANNO 3 CASI CON RELATIVI SOTTOCASI

1 $G > 0$ — $K > 0$; $K < 0$

2 $G = 0$ — $K > 0$; $K < 0$

3 $G < 0$

E 4 $K = 0$ — $G > 0$; $G = 0$; $G < 0$

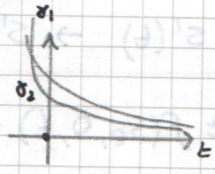
STUDIO TUTTI I VARI CASI:

1 $G > 0$ (SMORZAMENTO) E $K > 0$ EQUILIBRIO STABILE (ASINTOTICO)

POSSO AVERE, CALCOLANDO $\gamma_{1,2}$:

- 2 RADICI REALI NEGATIVE SE $G^2 - 4mK > 0$

DA CUI $s(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \rightarrow 0$ PER $t \to \infty$



PUNTO MATER. NON OSCILLA ASINTOTICAMENTE

- 2 RADICI CONIUGATE E COMPLESSE CON PARTE REALE NEGATIVA SE $G^2 - 4mK < 0$

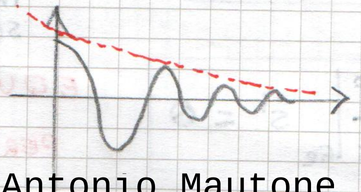
QUINDI:

$$\gamma_{1/2} = \beta \pm j\omega \rightarrow \text{IN CUI } \beta < 0 \text{ POICHÉ } G > 0 \text{ E } \beta = -\frac{G}{2m}$$

LA SOLUZIONE È: $e^{\beta t}(C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t})$ =

$$s(t) = e^{\beta t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

POICHÉ $\beta < 0 \rightarrow s(t) \rightarrow 0$ PER $t \to \infty$



PUNTO MATERIALE OSCILLA ASINTOTICAMENTE

$G>0$ $\boxed{K<0}$ EQUILIBRIO INSTABILE

CALCOLANDO $\gamma_{1/2}$ AVRÒ:

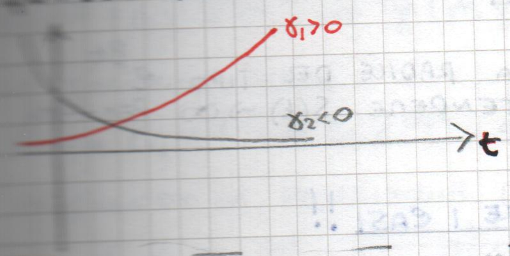
- 2 RADICI REALI E DISTINTE CON $G^2-4mK>0$
  DI CUI 1 POSITIVA E 1 NEGATIVA

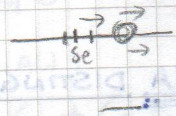
DA CUI $s(t)=C_1e^{\gamma_1 t}+C_2e^{\gamma_2 t}$ MA $\gamma_1>\gamma_2$ DOVE $\gamma_1>0$ MENTRE $\gamma_2<0$

QUINDI $s(t)\to\infty$ PER $t\to\infty$ CIOÈ:

PUNTO MAT NON OSCILLA ASINTOTICAMENTE MA SI ALLONTANA

LA SOLUZIONE SARÀ DATA SOLO DA γ_1 DOPO UN CERTO t CHE TENDE A ∞.





$G=0$ $\boxed{K>0}$ EQUILIBRIO STABILE $(m\ddot{s}'+Ks'=0)\rightarrow\gamma^2=-\frac{K}{m}\rightarrow\gamma_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$

NO SMORZAMENTO

CALCOLANDO $\gamma_{1/2}$ AVRÒ:

- 2 RADICI COMPLESSE E CONIUGATE AVENDO $\gamma_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$ IN CUI $K,m>0$

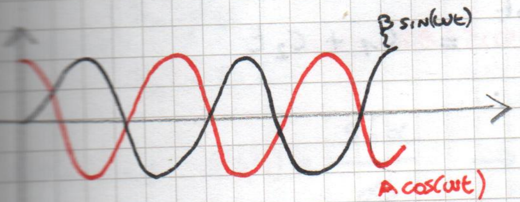
QUINDI $\gamma_{1/2}=\pm J\omega$

LA SOLUZIONE SARÀ:

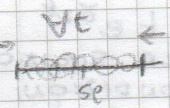
$s(t)=C_1e^{J\omega t}+C_2e^{-J\omega t}=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$

$\boxed{G=0}$ SIGNIFICA CHE LA FORZA f (PROIETTATA) NON DIPENDE DALLA VELOCITÀ OSSIA DA $\dot{s}$ MA LA $\vec{F}$ DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE INFATTI:

$-\frac{\partial F}{\partial \dot{s}}\Big|_{EQ}=0=G$



IL PUNTO ASSUME MOTO OSCILLATORIO CONFINATO INTORNO AD Se



$G=0$ $\boxed{K<0}$ EQUILIBRIO INSTABILE $(m\ddot{s}'+Ks'=0)$

NO SMORZAMENTO

CALCOLANDO $\gamma_{1/2}$ AVRÒ:

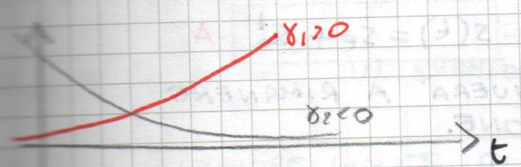
- 2 RADICI REALI E DISTINTE AVENDO $\gamma_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$ IN CUI $K<0$ E $m>0$
  DI CUI 1 POS. E 1 NEGATIVA

LA SOLUZIONE SARÀ:

$s(t)=C_1e^{\gamma_1 t}+C_2e^{\gamma_2 t}$ MA POICHÈ $\gamma_1>\gamma_2$ IN QUANTO $\gamma_1>0$ E $\gamma_2<0$

ALLORA PER $t\to\infty$ $s(t)\to\infty$ POICHÈ SARÀ $C_1e^{\gamma_1 t}$ A PREVALERE:

$s(t)=C_1e^{\gamma_1 t}+C_2e^{\gamma_2 t}\to\infty$ PER $t\to\infty$

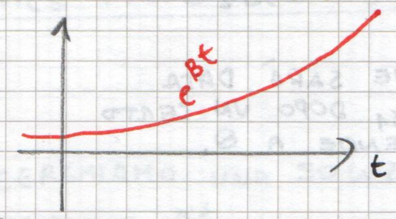


③ $\boxed{G<0}$ CON $K \lessgtr 0$ (È INDIFFERENTE) **EQUILIBRIO INSTABILE**

AMPLIFICAZIONE (QUINDI $\forall K$)

RIPRENDENDO LA RISOLUZIONE GENERICHE PER LE RADICI:

$$\gamma_{1/2} = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 - 4mK}}{2m}$$



NEL MOMENTO IN CUI IL Δ È $>, < o = 0$ AVRÒ SEMPRE LA PARTE REALE DELLE RADICI CHE SARÀ NEGATIVA QUINDI LA SOLUZIONE, OSCILLANTE O MENO, TENDE A DIVERGERE E QUINDI IL PUNTO MATERIALE AD ALLONTANARSI INDEFINITIVAMENTE PER $t \to \infty$ DA S_e.

IN PRATICA CI SARÀ UNA RADICE DEL TIPO $e^{\beta t}$ IN CUI $\beta > 0$ CHE FARÀ TENDERE $S(t) \to \infty$ PER $t \to \infty$

④ $\boxed{K=0}$ **EQUILIBRIO INDIFFERENTE MA DISTINGUERE I CASI !!**

NO SMORZAMENTO

↳ I) $\boxed{G=0}$ → NE CONSEGUE CHE LA EQ. DIFF. SARÀ $\boxed{m\ddot{s}' = 0}$

- RADICI REALI E COINCIDENTI

SIAMO NEL CASO IN CUI LA FORZA $\vec{F}$, PROIETTATA f, NON DIPENDE DA POSIZIONE NÉ DALLA VELOCITÀ, INFATTI:

$$-\frac{\partial f}{\partial s}\bigg|_{EQ} = 0 = K \quad \text{E} \quad -\frac{\partial f}{\partial \dot{s}}\bigg|_{EQ} = 0 = G$$

RISOLVENDO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA A $m\ddot{s}' = 0$:

$$m\gamma^2 = 0 \to \gamma^2 = 0 \to \gamma_{1/2} = 0$$

QUINDI:

$$s(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 t e^{\gamma_2 t} \to C_1 e^{0t} + C_2 t e^{0t} = C_1 + C_2 t$$

HO QUINDI TROVATO LA SOLUZIONE GLOBALE.
IMPONENDO DELLE CONDIZIONI INIZIALI GENERICHE:

$$CI \begin{cases} s'(0) = s'_0 \\ \dot{s}'(0) = \dot{s}'_0 \end{cases}$$

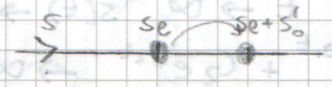
OTTERREI: $s'(0) = C_1 + C_2(0) = s'_0$ DA CUI

$\dot{s}'(t) = C_2 = \dot{s}'_0$ → $\boxed{s'(t) = s'_0 + \dot{s}'_0 t}$

QUINDI PER $t \to \infty$ SI AVRANNO 2 CASI:

Ⓐ SE LE CONDIZIONI INIZIALI SONO DEL TIPO:

$$CI \begin{cases} s'_0 \neq 0 \\ \dot{s}'_0 = 0 \end{cases}$$ PERTURBAZIONE IN POSIZIONE



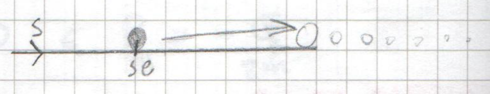
$s(t) = S_e + s'(t)$

SI AVRÀ CHE $s'(t) = s'_0 \to s(t) - S_e = s'_0 \to \boxed{s(t) = S_e + s'_0}$ A

SIGNIFICA CHE IL PUNTO MATERIALE, PER $t \to \infty$, CONTINUERÀ A RIMANERE IN QUIETE A SEGUITO DI UNA PICCOLA PERTURBAZIONE.

Ⓑ SE LE CONDIZIONI INIZIALI SONO DEL TIPO:

$$CI \begin{cases} s'_0 = 0 \\ \dot{s}'_0 \neq 0 \end{cases}$$ PERTURBAZIONE IN VELOCITÀ



SI AVRÀ CHE $s'(t) = \dot{s}'_0 t \to s(t) - S_e = \dot{s}'_0 t \to \boxed{s(t) = S_e + \dot{s}'_0 t}$ B

QUINDI PER $t \to \infty$ SI AVRÀ CHE IL PUNTO MATERIALE SI ALLONTANA INDEFINITIVAMENTE DAL PUNTO DI EQUILIBRIO SE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME.

II $G>0$ → NE CONSEGUE CHE LA EQ. DIFF. SARÀ $m\ddot{s}' + G\dot{s}' = 0$

SMORZAMENTO

- RADICI REALI E DISTINTE

DI CUI 1 NULLA

$$-\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{EQ} = 0 = K$$

RISOLVENDO L'EQ. CARATTERISTICA ASSOCIATA:

$$m\gamma^2 + G\gamma = 0 \rightarrow \gamma(m\gamma + G) = 0 \rightarrow \gamma_1 = 0 \quad e \quad \gamma_2 = -\frac{G}{m} = -\alpha$$

LA SOLUZIONE SARÀ:

$$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-\alpha t} = C_1 + C_2 e^{-\alpha t}$$

IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$CI: \begin{cases} s'(0) = s'_0 \\ \dot{s}'(0) = \dot{s}'_0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} s'(0) = C_1 + C_2 e^{-\alpha 0} = s'_0 \\ \dot{s}(0) = C_2(-\alpha)e^{-\alpha t} = \dot{s}'_0 \end{array} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = s'_0 \\ C_2 = -\frac{\dot{s}'_0}{\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\alpha s'_0 + \dot{s}'_0}{\alpha} \\ C_2 = -\frac{\dot{s}'_0}{\alpha} \end{cases}$$

SOSTITUENDO C_1 E C_2 IN $s(t) = C_1 + C_2 e^{-\alpha t}$

OTTENGO:

$$\boxed{s(t) = \frac{s'_0\alpha + \dot{s}'_0}{\alpha} - \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{-\alpha t}}$$

ANCHE QUI SI DISTINGUONO **2 CASI**:

① $CI: \begin{cases} s'_0 \neq 0 \\ \dot{s}'_0 = 0 \end{cases}$ PERTURBAZIONE IN POSIZIONE

SI AVRÀ CHE $s'(t) = \frac{s'_0\alpha}{\alpha} \rightarrow s(t) - s_e = \frac{s'_0\alpha}{\alpha} \rightarrow \boxed{s(t) = s_e + \frac{s'_0\alpha}{\alpha}}$ A

SIGNIFICA CHE IL PUNTO MATERIALE, SE PERTURBATO, RIMANE IN QUIETE INDEFINITIVAMENTE PER $t \rightarrow \infty$

$s(t) = s_e + s'_0$ A

② $CI: \begin{cases} s'_0 = 0 \\ \dot{s}'_0 \neq 0 \end{cases}$ PERTURBAZIONE IN VELOCITÀ

SI AVRÀ CHE $s'(t) = \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} - \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \rightarrow \overbrace{s(t) - s_e}^{s'} = \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} - \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{-\alpha t} \rightarrow \boxed{s(t) = s_e + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})}$ B

SIGNIFICA CHE IL PUNTO MATERIALE, PERTURBATO IN VELOCITÀ, ASSUME UN MOTO ESPONENZIALMENTE DECELERATO CHE LO PORTERÀ AL VALOR LIMITE:

$$s_\infty = s_e + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} \quad \text{IN QUANTO } e^{-\alpha t} \rightarrow 0 \text{ PER } t \rightarrow \infty$$

QUINDI IL VALORE LIMITE DI $s(t)$ PER $t \rightarrow \infty$ È:

$$s_\infty = \frac{s_e \cdot \alpha + \dot{s}'_0}{\alpha}$$

$\boxed{G<0}$ → NE CONSEGUE CHE LA EQ. DIFF. SARÀ: $\boxed{m\ddot{s}' + G\dot{s}' = 0}$

AMPLIFICAZIONE

- RADICI REALI E DISTINTE
  DI CUI 1 NULLA

COME PRIMA SI FA $-\left.\dfrac{\partial f}{\partial s}\right|_{EQ} = 0 = K$

RISOLVENDO L'EQ. CARATTERISTICA ASSOCIATA ALL'OMOGENEA:

$m\gamma^2 + G\gamma = 0 \rightarrow \gamma\left(\gamma + \frac{G}{m}\right) = 0$ MA $G<0$ QUINDI

$\gamma\left(\gamma - \frac{G}{m}\right) = 0$ IN CUI HO SOSTITUITO A $G \rightarrow (-G)$ ← È VALORE UNICO, NON CONSIDERO PIÙ CHE G È <0 SENNÒ SBAGLIO.

$\gamma_1 = 0$ E $\gamma_2 = \frac{G}{m} = \alpha$ DA CUI

$s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} = C_1 + C_2 e^{\alpha t}$

IMPONENDO LE C.I.:

$\begin{cases} s'(0) = s'_0 \\ \dot{s}'(0) = \dot{s}'_0 \end{cases}$ OTTENGO ⟶ GUARDA SVOLGIMENTO SU POST-IT

METODI ENERGETICI PER LO STUDIO DELLA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

SE LA FORZA DIPENDE ESCLUSIVAMENTE DALLA POSIZIONE (FORZA POSIZIONALE CONSERVATIVA), OVVERO È UNA FORZA CONSERVATIVA, ESISTERÀ LA SUA FUNZIONE POTENZIALE (ESSENDO LA FORZA UNA FUNZIONE VETTORIALE CONSERVATIVA).

$\boxed{\vec{f} = \nabla\varphi = -\nabla U}$ DOVE $\vec{f} = \vec{f}(s)$ NON $\vec{f}(s, \dot{s}, \dots)$

PROIETTANDO L'EQUAZIONE LUNGO L'UNICO GRADO DI LIBERTÀ (IPOTIZZANDO SEMPRE PUNTO MATERIALE VINCOLATO AD UNA TRAIETTORIA ASSEGNATA E CHE R DI CURVATURA → ∞ DA CUI PROIEZIONI NULLA SU $\hat{n}$) ALLORA:

$\boxed{\vec{f} \cdot \hat{t} = (-\nabla U) \cdot \hat{t} = -\dfrac{\partial U}{\partial s}} = f(s)$ IN CUI, $U = U(\vec{x}) = U(x, y, z)$

DIMOSTRAZIONE

$$-\nabla U(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial s}\hat{t} + \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial n}\hat{n} + \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial b}\hat{b}\right)$$

$$-\nabla U(\vec{x}) \cdot \hat{t} = -\left(\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial s}\hat{t} + \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial n}\hat{n} + \frac{\partial U(\vec{x})}{\partial b}\hat{b}\right) \cdot \hat{t} = -\frac{\partial U(\vec{x})}{\partial s}$$

…CHÉ L'EN. POTENZIALE U DIPENDE DALLA POSIZIONE DEFINITA DALL'ASCISSA …LINEA, ALLORA:

$f(s,\dot{s},t)$ SARÀ COME STUDIARE SOLO $f(s)$

SE IMPONIAMO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO $(s_e, 0, t)$ SI AVRÀ CHE:

$f(s_e, 0, t) = 0$ MA A NOI IMPORTA SOLO $f(s_e) = 0$ QUINDI, ESSENDO:

$$f(s) = -\frac{\partial U}{\partial s} \rightarrow \boxed{\text{SE } f(s)\Big|_{EQ} = 0} \text{ ALLORA } \boxed{-\frac{\partial U}{\partial s}\Big|_{EQ} = 0}$$

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

STUDIO DELLA STABILITÀ

$$m\ddot{s} = f(s)$$

DATA QUESTA EQ. DIFF. SCALARE, SI VUOLE STUDIARE COSA SUCCEDE SE PERTURBO IL SISTEMA NEL PUNTO DI EQUILIBRIO $(s_e, 0, t)$; QUINDI:

$$s(t) = s_e + s'(t) \rightarrow s'(t) = s(t) - s_e$$

LINEARIZZO $f(s)$ INTORNO A:

$$f(s) \approx f(s_e) + \frac{df(s)}{ds}\Big|_{s_e} s' + o(s'^2)$$

TRASCURANDO I TERMINI DI 2° ORDINE E SAPENDO CHE $f(s_e) = 0$, ALLORA:

$$m\ddot{s}' = \frac{df(s)}{ds}\Big|_{EQ} s'$$

MA ESSENDO $f(s) = -\frac{\partial U}{\partial s} \rightarrow \frac{df(s)}{ds} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right) = \boxed{-\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}}$

QUINDI:

$$\boxed{m\ddot{s}' = -\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Big|_{EQ} s'} \rightarrow \text{IN CUI DEFINISCO } \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Big|_{EQ} s' = K$$

CHE DIVENTA:

$$m\ddot{s}' + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Big|_{EQ} s' = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{m\ddot{s}' + K s' = 0}$$

ANCHE QUI SI POSSONO DISTINGUERE VARI CASI:

$\boxed{G=0}$ → $\boxed{K=0}$ I

→ $\boxed{K>0}$ II

→ $\boxed{K<0}$ III

I $\boxed{G=0}$ $\boxed{K=0}$ EQUILIBRIO INDIFFERENTE (MA DISTINGUERE I CASI)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\Big|_{EQ} = 0$$

- RADICI REALI E COINCIDENTI

$m\ddot{s}' = 0 \rightarrow \gamma_{1/2} = 0$ CON $\nu = 2 \rightarrow s'(t) = C_1 + t\, C_2$

$m\gamma^2 = 0$

IMPONENDO LE C.I.:

$s(0) = s_0'$

$\dot{s}(0) = \dot{s}_0'$

$$s'(t) = C_1 + C_2 t \qquad \dot{s}'(t) = C_2 \rightarrow \begin{cases} C_1 = s_0' \\ C_2 = \dot{s}_0' \end{cases} \rightarrow s'(t) = s_0' + \dot{s}_0' t$$

CI SONO 2 CASI:

$$\begin{cases} s_0' \neq 0 \\ \dot{s}_0' = 0 \end{cases}$$ PERTURBAZIONE IN POSIZIONE

ESSENDO $s(t) = s_e + s'(t)$

$$s'(t) = s_0' \rightarrow s(t) = s_e + s_0'$$

AD UNA PICCOLA PERTURBAZIONE, IL PUNTO MATERIALE RIMANE IN QUIETE.

INVECE:

$$\begin{cases} s_0' = 0 \\ \dot{s}_0' \neq 0 \end{cases}$$ PERTURBAZIONE IN VELOCITÀ

$$s'(t) = \dot{s}_0' t \rightarrow s(t) = s_e + \dot{s}_0' t$$

AD UNA PICCOLA PERTURBAZIONE, IL PUNTO SI ALLONTANA INDEFINITIVAMENTE DI MOTO RETTILINEO PER $t \rightarrow \infty$

II $\boxed{G = 0}$ $\boxed{K > 0}$ EQUILIBRIO STABILE

• 2 RADICI CONIUGATE E COMPLESSE CON $Re = 0$

$$m\ddot{s}' + Ks' = 0 \rightarrow \gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\frac{K}{m} \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$$

$$\Updownarrow$$

$$m\ddot{s}' + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right|_{EQ} s' = 0$$

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right|_{EQ} > 0$

QUINDI ESSENDO $K > 0$

$\gamma_{1/2} = \pm j\omega$ IN CUI $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

QUINDI $s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}$

$\Rightarrow s'(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \rightarrow s(t) = s_e + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

A PRESCINDERE DA C_1 E C_2 (A E B SONO LEGATI A C_1 E C_2), A MENO CHE NON SIANO C.I. TUTTE NULLE, AD UNA PICCOLA PERTURBAZIONE, IL PUNTO MATERIALE OSCILLA INTORNO AD s_e DI MOTO ARMONICO.

III $\boxed{G = 0}$ $\boxed{K < 0}$ • RADICI REALI E DISTINTE EQUILIBRIO INSTABILE

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right|_{EQ} < 0$

$$m\ddot{s}' + Ks' = 0 \rightarrow \gamma^2 + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\frac{K}{m} \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{K}{m}}$$

$$\parallel$$

$$m\ddot{s}' - \left.\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right|_{EQ} s' = 0$$

HO GIÀ MESSO IL MENO QUI

MA $K < 0 \rightarrow \gamma_{1/2} = \pm\omega$ IN CUI $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

QUINDI $s'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$

ALLORA $s(t) = s_e + C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$

QUINDI AD UNA PICCOLA PERTURBAZIONE CORRISPONDE UN ALLONTANAMENTO DAL PUNTO DI EQUILIBRIO s_e IN MODO ESPONENZIALE.

METODO ENERGETICO 2 GDL

IL RISULTATO PRECEDENTE PUÒ ESSERE ESTESO A PIÙ G.D.L, SI AVRÀ IN TAL CASO $U(x,y)$ CHE VA VALUTATA NON SU 1 GDL MA SU 2 GDL.

↑ STA SUL QUAD. 2

QUINDI IN SINTESI: IL PUNTO MATERIALE P SE SOGGETTO A FORZE CONSERVATIVE, AVRÀ LE POSIZIONI DI EQUILIBRIO STABILE NEI PUNTI DI MINIMO DELLA F. ENERGIA POTENZIALE, I PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILE NEI PUNTI DI MASSIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE. SI HANNO POSIZIONI DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE IN CORRISPONDENZA DELLE ZONE IN CUI $U = \text{COST.}$

APPROSSIMAZIONE LINEARE $f = f(x_1, \dots, x_n)$

FUNZIONE REALE A n VAR. REALI:

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN Ω APERTO

$x_1, x_2, \dots, x_N$

LO SVILUPPO AL 1° ORDINE DI f ATTORNO AD $\vec{a}$ È:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \underbrace{\cdot}_{\text{PRODOTTO SCALARE}} (\vec{x} - \vec{a})$$

DOVE

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\vec{a}) \right)$$

E QUINDI

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i)$$

QUESTO PRODOTTO SCALARE DEFINISCE UN IPERPIANO n-DIMENSIONALE TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE NEL PUNTO (VETTORE) $\vec{a}$.

FUNZIONE VETTORIALE A n VAR. VETTORIALI:

$\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(f_1(\vec{x}); \dots; f_m(\vec{x}))$

DIFFERENZIABILI UNA VOLTA IN Ω APERTO, È POSSIBILE APPROSSIMARE LINEARMENTE LA FUNZIONE VETTORIALE, COMPONENTE PER COMPONENTE, IN UN PUNTO (VETTORE) $\vec{a} \in \Omega$.

$$f_i(\vec{x}) \approx f_i(\vec{a}) + \nabla f_i(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

EFFETTUANDO QUESTO RAGIONAMENTO PER TUTTI LE COMPONENTI:

$$\vec{F}(\vec{x}) \approx \vec{F}(\vec{a}) + \vec{\vec{J}}_F(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

DOVE $\vec{\vec{J}}$ È LA MATRICE JACOBIANA DELLE FUNZIONI $\vec{F}$ CALCOLATE NEL PUNTO $\vec{a}$ CHE CONTIENE TUTTI I GRADIENTI DELLE m COMPONENTI DI $\vec{F}$.

$$\vec{\vec{J}}_F(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

DEFINITA QUINDI UNA GENERICA EQ. DEL MOTO CHE GOVERNA LA DINAMICA DEL P.TO MATERIALE:

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}$$

ESPANDENDO IN SERIE DI TAYLOR LA $\vec{F}$ INTORNO AL P.TO DI EQUILIBRIO STATICO $\vec{x}_E$, AVENDO PERTURBATO IL SISTEMA CON UNA SOLLECITAZIONE TALE CHE LA POSIZIONE $\vec{x}$ È:

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}_E + \vec{x}'(t)}$$

SCRIVO:

$$\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{F}(\vec{x}_E, 0, t) + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\right|_{EQ} x' + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\right|_{EQ} y' + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right|_{EQ} z' + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{x}}\right|_{EQ} \dot{x}' + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{y}}\right|_{EQ} \dot{y}' + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{z}}\right|_{EQ} \dot{z}' + O(x'^2; \dot{x}'^2)$$

TRASCURANDO I TERMINI DI ORDINE MAGGIORE O UGUALE AL SECONDO SOSTITUENDO NELL'EQ. DEL MOTO:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \sum_{K=1}^{3} \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial x_K}\right|_{EQ} x'_K + \sum_{K=1}^{3} \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{x}_K}\right|_{EQ} \dot{x}'_K$$

DOVE $\vec{x} = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$

RAPPRESENTA QUINDI UN SISTEMA DI 3 EQ. SCALARI OMOGENEE, A COEFF. COST. CHE GOVERNANO LE PICCOLE PERTURBAZIONI ATTORNO ALLA POSIZ. DI EQ. STATICO. L'ANDAMENTO DELLA SOL → INDICA STABILITÀ O MENO

CERNIERA: PERMETTE ROTAZIONE SOLO ATTORNO ALL'ASSE DI ROTAZIONE (SOTTRAE 5 GDL).

COLLARE: UN SEGMENTO MATERIALE APPARTENENTE AL CORPO È VINCOLATO AD UNA RETTA NELLO SPAZIO. SOTTRAE UNA TRASLAZIONE E ROTAZIONE.

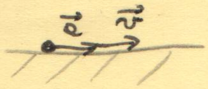
COLLARE SOTTILE: COME SOPRA MA NON INIBISCE LA ROTAZIONE

APPOGGIO: VINCOLO UNILATERALE CON REAZIONE CHE VA DAL VINCOLO AL CORPO

MOTI PARTICOLARI

- **MOTO RETTILINEO**

$\boxed{\vec{a} \times \vec{v} = \vec{0}}$ IN OGNI ISTANTE



$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n}$

$\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$

SI HA CHE $\hat{t} \times \hat{t} = \vec{0}$ SEMPRE MA $\hat{t} \times \hat{n}$ NO. AFFINCHÉ SIAMO IN MOTO RETTILINEO $\vec{a} \parallel \vec{v}$ QUINDI $R \to \infty$

- **MOTO PIANO**

PIANO

$\boxed{\vec{a} \times \vec{v}}$ HA DIREZIONE COSTANTE

SE LA DIREZIONE VARIASSE SIGNIFICA CHE SI AVREBBE TRAIETTORIA 3D E NON 2D

INTENSITÀ VARIA MA NON LA DIREZIONE

- **MOTO CENTRALE**

DATO CENTRO CON PUNTO C, SI DEFINISCE MOTO CENTRALE

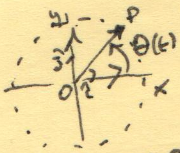
$\boxed{\vec{a} \times \vec{CP} = \vec{0}}$ CON P PUNTO GENERICO NELLO SPAZIO

SEGUE CHE:

$\vec{a} \parallel \vec{CP}$ QUINDI NON PUÒ AVERE COMPONENTE TANGENZIALE $\ddot{s}$ LUNGO $\hat{t}$

- **MOTO CIRCOLARE**

È MOTO LUNGO TRAIETTORIA CIRCOLARE DI CENTRO O



$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta(t)) \\ y(t) = R\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

- **MOTO ARMONICO**

È EQUIVALENTE AL MOTO CIRCOLARE LA FORMA GENERALE È INFATTI:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = B\sin(\omega t) \end{cases}$$

CON $\omega = 2\pi f$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$T = \frac{1}{f}$ $\left[\frac{1}{T}\right]$

$s'(t) = C_1 + C_2 e^{\alpha t}$

$\dot{s}'(t) = \alpha C_2 e^{\alpha t}$

↓ IMPONGO C.I.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{\alpha 0} = s'_0 = s'(0) \\ \alpha C_2 e^{\alpha 0} = \dot{s}'_0 = \dot{s}'(0) \end{cases}$$

↓

$C_2 = \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}$, E

$C_1 + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} = s'_0 \rightarrow C_1 = \frac{s'_0\alpha - \dot{s}'_0}{\alpha}$

SOSTITUENDO IN $s'(t)$:

$s'(t) = \frac{s'_0\alpha - \dot{s}'_0}{\alpha} + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{\alpha t}$ ← SOL. GLOBALE DI $m\ddot{s}' + G\dot{s}' = 0$

ADESSO HO 2 CASI:

A $\begin{cases} s'_0 \neq 0 \\ \dot{s}'_0 = 0 \end{cases}$ PERTURBAZIONE IN POSIZIONE

SOSTITUENDO NELLA SOL. GLOBALE:

$s'(t) = \frac{s'_0\alpha}{\alpha} = s'_0$

QUINDI ESSENDO $s(t) = s_e + s'(t)$ ALLORA:

$s(t) = s_e + s'_0$

PERTANTO AD UNA PERTURBAZIONE IN POSIZIONE CORRISPONDE, IL SISTEMA RIMANE IN QUIETE

B $\begin{cases} s'_0 = 0 \\ \dot{s}'_0 \neq 0 \end{cases}$ PERTURBAZIONE IN VELOCITÀ

SOSTITUENDO NELLA SOL. GLOBALE:

$s'(t) = -\frac{\dot{s}'_0}{\alpha} + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha} e^{\alpha t} = \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$

RICORDANDO CHE $s(t) = s_e + s'(t)$

$s(t) = s_e + \frac{\dot{s}'_0}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)$

A PRESCINDERE DA s_e, SE PERTURBO IN VELOCITÀ OTTENGO UN ANDAMENTO CRESCENTE DI $s(t)$ CHE PORTA IL PUNTO AD ALLONTANARSI INDEFINITIVAMENTE.

ESEMPI DI FORZE CONSERVATIVE $\vec{F}_c$

FORZA PESO

$m\vec{g}$: SCEGLIENDO UN SDR CON UN ASSE PARALLELO ALLA DIREZIONE DELLA F. PESO, ES. $\hat{J}$ SI HA CHE

$$\boxed{U_P(y) = -mgy + c}$$

PONENDO $U_P(0)=0 \rightarrow c=0$

QUINDI U_P RIMANE COSTANTE SUI PIANI ORIZZONTALI (y = COSTANTE) CHE RAPPRESENTANO LE SUPERFICI **EQUIPOTENZIALI** PER LA FORZA PESO.

CAMPO DI FORZA UNIFORME

QUANTO AFFERMATO PER LA F. PESO VALE PER OGNI CAMPO DI FORZA UNIFORME, CIOÈ:

$$\boxed{\vec{F} = \alpha \hat{w}}$$

DIRETTO COME $\hat{w}$ E CON α = COST

A CUI SI ASSOCIA PER L'ENERGIA POTENZIALE L'ESPRESSIONE:

$$\boxed{U_F(\xi) = -\alpha \xi + c}$$

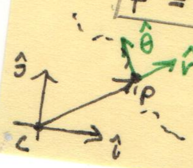
IN CUI ξ È L'ASCISSA INDIVIDUATA DAL VERSORE $\hat{w}$.

ANCHE QUI PONENDO $U(0)=0 \rightarrow c=0$

CAMPI DI FORZA CENTRALI

SI DEFINISCE CAMPO DI F. CENTRALE: IL CAMPO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\vec{F} = \psi(r)\hat{r} = \psi(r)\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}}$$



DOVE $\vec{r} = \overrightarrow{CP}$

FUNZIONE ψ DIP. DA r

$\vec{r}$ È QUINDI IL VETTORE POSIZIONE CHE INDIVIDUA P RISPETTO AL CENTRO DI SOLLECITAZIONE C.

TRA I CAMPI DI FORZA CENTRALI SONO IMPORTANTI:

- **ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE**

SE IN C (CENTRO DI SOLL.) È PRESENTE UNA MASSA M, LA MASSA m SUBISCE IN P UNA FORZA CHE LA ATTRAE VERSO C.

$$\boxed{\psi(r) = -G\frac{Mm}{r^2}}$$

DOVE G È LA COSTANTE GRAVITAZIONALE UNIVERSALE E IL SEGNO DIPENDE DAL VERSO SCELTO DI $\hat{r}$

- **ATTRAZIONE COULOMBIANA**

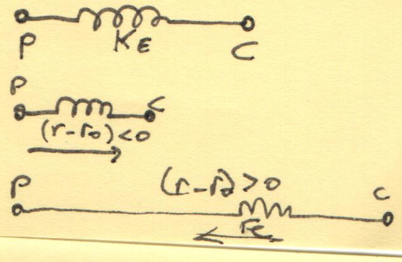
ANALOGA ALLA PRECEDENTE

$$\boxed{\psi(r) = K_E\frac{qQ}{r^2}}$$

K_E È LA COSTANTE DI ATTRAZIONE COULOMBIANA E IL SEGNO POSITIVO DERIVA DALLA NATURA REPULSIVA DELLA FORZA PER CARICHE DELLO STESSO SEGNO.

- **FORZA ELASTICA**

$$\boxed{\psi(r) = -K_E(r - r_0)}$$



NEL CASO DI CAMPO DI FORZE CENTRALI, L'ESPRESSIONE DELLA **ENERGIA POTENZIALE** SARÀ:

$$\boxed{U(r) = -\int \psi(r)\,dr}$$

ES. F. GRAVITAZIONALE

$$U(r) = -\left(-\int G\frac{Mm}{r^2}\,dr\right) = -\frac{GMm}{r}$$

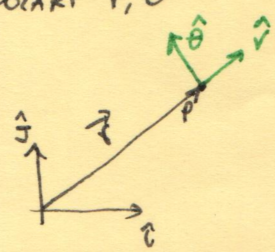
$+ C$ LA COSTANTE DI INTEGRAZIONE PUÒ ESSERE DETERMINATA IMPONENDO IL VALORE DELLA U

In corrispondenza a particolari valori di r.
es. $U(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$

Un elemento materiale soggetto ad una forza centrale assume un moto dotato delle seguenti caratt:

1. la traiettoria chiamata ORBITA
2. il raggio vettore $\vec{r}$ spazza durante il moto aree uguali in tempi uguali

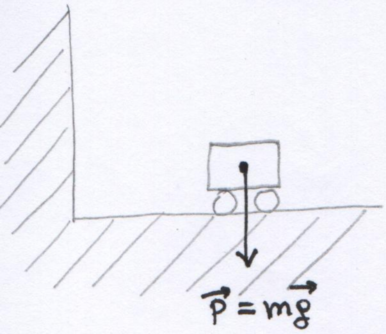
Si può introdurre anche un nuovo sistema di riferimento introducendo le coordinate polari $\hat{r}, \hat{\theta}$



$\hat{r}$ diretto come $\vec{r}$ mentre $\hat{\theta} \perp \hat{r}$ nel senso positivo del moto

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

CAMPO DI FORZA PESO - APPLICAZIONE SEMPLICE



$\vec P = m\vec g$ È IL CAMPO DI FORZA PESO

IN QUESTO CASO LA 2° LEGGE DI NEWTON:

$m\vec a = \vec f$ DIVENTA: IN CUI $\vec g = g\hat\iota_2$

↓

$m\vec a = m\vec g \rightarrow \boxed{\vec a = \vec g}$

RISOLVIAMO L'EQ. DIFFERENZIALE:

• EQ. OMOGENEA

$\vec a = \vec 0 \rightarrow \ddot{\vec x}(t) = \vec 0$ * $\rightarrow \gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma_{1/2} = 0$ CON $\nu = 2$

QUINDI

$$\vec x_O(t) = \vec A e^{\gamma_1 t} + \vec B \cdot t \cdot e^{\gamma_2 t} = \vec A + \vec B t = \vec x_o(t)$$

• EQ. PARTICOLARE

$\vec g \sim \vec f \rightarrow \nu = 2,\ \delta = 0,\ P_M = \vec C,\ P_N = \vec 0,\ \eta = 0$

QUINDI

$\vec x_{PN}(t) = \vec C t^2 \rightarrow \dot{\vec x}_{PN}(t) = 2\vec C t$ E $\ddot{\vec x}_{PN}(t) = 2\vec C$

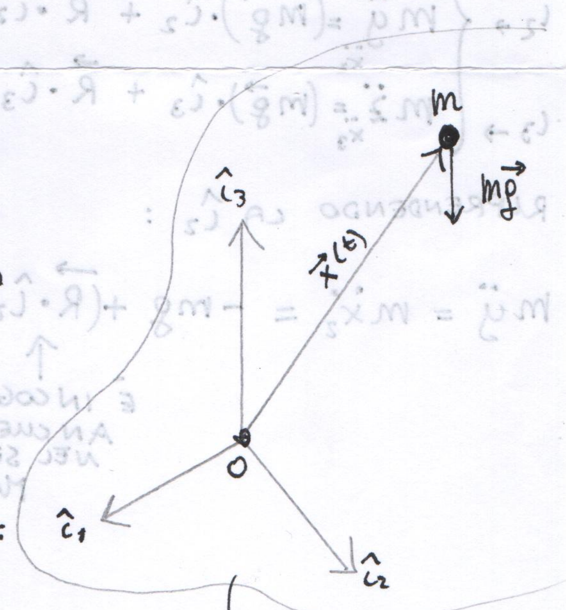
SOSTITUENDO IN: *

$2\vec C = \vec g \rightarrow \vec C = \frac{\vec g}{2}$ QUINDI

$$\vec x(t) = \vec A + \vec B t + \frac{\vec g}{2}t^2$$

SE PONGO $\vec x_o = \vec A$ E $\dot{\vec x}_o = \vec B$ ALLORA

$$\vec x(t) = \vec x_o + \dot{\vec x}_o t + \frac{\vec g}{2}t^2$$



STABILITO ORA UN SDR, POSSO PROIETTARE LA RELAZIONE $\vec x(t)$ SUGLI ASSI DI $\mathcal{R}(O, \hat\iota_1, \hat\iota_2, \hat\iota_3)$:

ESSENDO:

$$\vec x(t) = \sum_{k=1}^{3} (\vec x(t) \cdot \hat\iota_k)\hat\iota_k$$ ALLORA

$g\hat\iota_2 \cdot \hat\iota_1 = 0$
$\hat\iota_2 \perp \hat\iota_1$

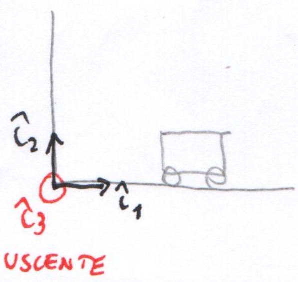
$\iota_1)\ \left(\frac{1}{2}\vec g t^2 + \dot{\vec x}_o t + \vec x_o\right) \cdot \hat\iota_1 = v_{o1}t + x_{o1} = x_1$

$\iota_2)\ \left(\frac{1}{2}\vec g t^2 + \dot{\vec x}_o t + \vec x_o\right) \cdot \hat\iota_2 = -\frac{1}{2}g t^2 + v_{o2}t + x_{o2} = x_2$

$\iota_3)\ \left(\frac{1}{2}\vec g t^2 + \dot{\vec x}_o t + \vec x_o\right) \cdot \hat\iota_3 = v_{o3}t + x_{o3} = x_3$

$g\hat\iota_2 \cdot \hat\iota_3 = 0$
$\hat\iota_2 \perp \hat\iota_3$

IPOTIZZANDO CHE SIA UN SDR POSIZIONATO IN



SE INVECE VOLESSI PROIETTARE LA VELOCITÀ $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

PERTANTO PROIETTANDO LUNGO $\hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2$ E $\hat{\imath}_3$:

$$\hat{\imath}_1)\ (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\cdot\hat{\imath}_1 = v_{01} \ \boxed{= v_1(t)}$$

$$\hat{\imath}_2)\ (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\cdot\hat{\imath}_2 = v_{02} - gt \ \boxed{= v_2(t)}$$

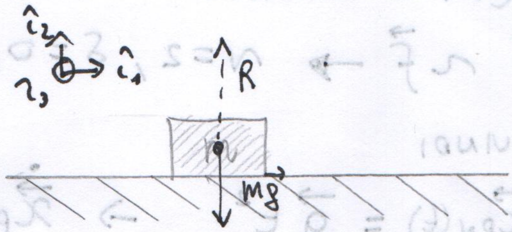
$$\hat{\imath}_3)\ (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\cdot\hat{\imath}_3 = v_{03} \ \boxed{= v_3(t)}$$

- SE v_1 E v_3 SONO NULLI ALLORA IL MOTO SARÀ LUNGO LA VERTICALE PASSANTE PER x_0 (PUNTO).
- SE $v_3 = 0$ E NON HO VINCOLI SU v_1 CIOÈ $v_1 \neq 0$ ALLORA SI HA MOTO PIANO $(\hat{\imath}_1; \hat{\imath}_2) \Rightarrow$ CASO DEI PROBLEMI BALISTICI.

APPLICAZIONE - CASO DI MASSA VINCOLATA A SUPERFICIE

COME NEL CASO PRECEDENTE, SI HA CHE:

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$ QUINDI È SISTEMA DI 3 EQUAZIONI (STABILENDO SDR $R(0, \hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \hat{\imath}_3)$)



$$\begin{cases} \imath_1 \to m\underset{\ddot{x}_1}{\ddot{x}} = (m\vec{g})\cdot\hat{\imath}_1 + \vec{R}\cdot\hat{\imath}_1 = 0 + 0 \ \to \hat{\imath}_2 \perp \hat{\imath}_1 \\ \imath_2 \to m\underset{\ddot{x}_2}{\ddot{y}} = (m\vec{g})\cdot\hat{\imath}_2 + \vec{R}\cdot\hat{\imath}_2 = -mg + (\vec{R}\cdot\hat{\imath}_2) \\ \imath_3 \to m\underset{\ddot{x}_3}{\ddot{z}} = (m\vec{g})\cdot\hat{\imath}_3 + \vec{R}\cdot\hat{\imath}_3 = 0 + 0 \ \to \hat{\imath}_2 \perp \hat{\imath}_3 \end{cases}$$

RIPRENDENDO LA $\hat{\imath}_2$:

$$m\ddot{y} = m\ddot{x}_2 = -mg + (\vec{R}\cdot\hat{\imath}_2)$$

↑ È INCOGNITA ANCHE NEL SEGNO MA →

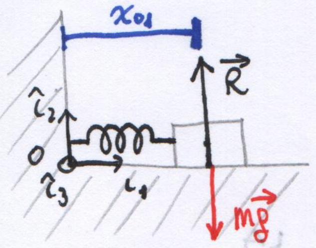
→ SE IL CORPO È TENUTO IN QUIETE (FERMO) SULLA SUPERFICIE ALLORA CONOSCIAMO $\vec{R}$ SIA IN MODULO CHE IN SEGNO POICHÉ

$\vec{R} = -m\vec{g} \to |\vec{R}| = |-m\vec{g}|$

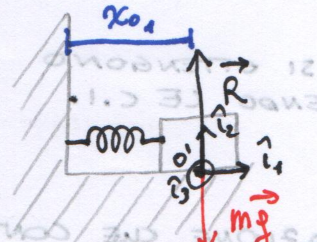
CIOÈ $\boxed{R = mg}$

L'ACCELERAZIONE DI M È NULLA LUNGO $\hat{\imath}_2$

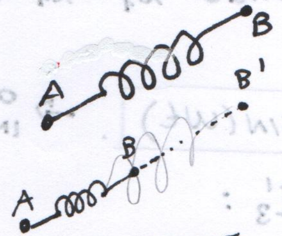
CAMPO DI FORZA PESO CON MASSA - MOLLA - APPLICAZIONE



1° SDR
$R(O, \hat{\iota}_1, \hat{\iota}_2, \hat{\iota}_3)$



2° SDR
$R(O', \hat{\iota}'_1, \hat{\iota}'_2, \hat{\iota}'_3)$



$AB = \ell_0 =$ LUNGHEZZA DI RIFERIMENTO

$AB' = \ell$

MOLLA IDEALE
RISPOSTA SEMPLICE LINEARE

$$\boxed{\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_0)\,\hat{AB}}$$

$K =$ COSTANTE ELASTICA

$\hat{AB} =$ VERSORE CHE DEFINISCE LA DIREZIONE TRA I DUE ESTREMI

$\ell - \ell_0 =$ ALLUNGAMENTO

$$\boxed{OO' = x_{01}}$$

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{\iota}_2 = -mg\,\hat{\iota}'_2$$

$$\vec{R} = R\,\hat{\iota}_2$$

L'EQUAZIONE CHE DEFINISCE TALE SISTEMA È: 1° SDR

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_e}$$

OSSIA

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - K(x_1 - x_{01})\hat{\iota}_1}$$

PROIETTANDO QUESTA EQUAZIONE LUNGO $\hat{\iota}_1, \hat{\iota}_2, \hat{\iota}_3$:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = m(g\hat{\iota}_2)\cdot\hat{\iota}_1 + \vec{R}\cdot\hat{\iota}_1 - [K(x_1 - x_{01})]\hat{\iota}_1\cdot\hat{\iota}_1 = -K(x_1 - x_{01}) \\ m\ddot{x}_2 = m(-g\hat{\iota}_2)\cdot\hat{\iota}_2 + \vec{R}\cdot\hat{\iota}_2 - [K(x_1 - x_{01})]\hat{\iota}_1\cdot\hat{\iota}_2 = -mg + R_2 \\ m\ddot{x}_3 = m(-g\hat{\iota}_2)\cdot\hat{\iota}_3 + \vec{R}\cdot\hat{\iota}_3 - [K(x_1 - x_{01})]\hat{\iota}_1\cdot\hat{\iota}_3 = 0 \end{cases}$$

RISCRITTA

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - \overbrace{Kx_{01}}^{\text{VALORE COSTANTE NON FUNZIONE}} & \rightarrow \text{EQUAZIONE OMOGENEA (1)} \\ m\ddot{x}_2 = -mg + R_2 & \rightarrow \text{EQUAZIONE NON OMOGENEA (2)} \\ m\ddot{x}_3 = 0 & \rightarrow \text{COMPONENTI NULLE, EQUAZIONE OMOGENEA (3)} \end{cases}$$

RIPRENDENDO LA (1) LA SI POTREBBE RISCRIVERE CON IL 2° SDR (SI DOVREBBE RIPROIETTARE L'INTERA EQUAZIONE VETTORIALE MA IL RISULTATO SAREBBE IDENTICO PER (2) E (3), MENTRE LA (1)):

$$\hat{\iota}'_1 \rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - K(x_1 - x_{01})\hat{\iota}_1$$ CHE VA PROIETTATA

IN QUESTO CASO PERÒ $x_{01} = 0$ QUINDI $\vec{F}_e = -Kx_1\hat{\iota}_1$ ALLORA:

$$m\ddot{x}'_1 = -Kx'_1 \rightarrow m\ddot{x}'_1 + Kx'_1 = 0$$ QUINDI L'EQ. DIVENTA:

$$\boxed{\ddot{x}'_1 + \frac{K}{m}x'_1 = 0}$$

NON È STATA MODIFICATA LA NATURA DEL SISTEMA

A QUESTO PUNTO SI PUÒ RISOLVERE L'EQUAZIONE:

$K > 0$ E $m > 0$ $\rightarrow \frac{K}{m} > 0$ QUINDI SOSTITUENDO $\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega \rightarrow \frac{K}{m} = \omega^2$

ALLORA:

$\ddot{x}_1' + \omega^2 x_1' = 0$ (PONGO $x_1 = x_1'$ E $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_1'$)

RISOLVENDO SI OTTIENE

$$\boxed{x_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

→ a, b, SI OTTENGONO IMPONENDO LE C.I.

RIGUARDO INVECE $\hat{i}_2'$ E $\hat{i}_3'$:

$\hat{i}_2'$) $m\ddot{x}_2 = -mg + R_2$

È L'UNICA EQUAZIONE CHE CONTIENE LA REAZIONE VINCOLARE, INCOGNITA DI TIPO ALGEBRICO. SE CONOSCIAMO $\ddot{x}_2$, L'EQUAZIONE DIVENTA ALGEBRICA E NON DIFFERENZIALE POICHÈ IL VINCOLO IMPEDISCE IL MOTO.

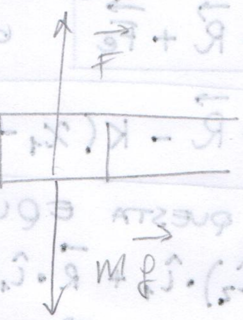
$\hat{i}_3'$) $m\ddot{x}_3 = 0$

VINCOLO LISCIO → VINCOLO DI APPARTENENZA

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}$ $\qquad \vec{F} = F\hat{i}_2$

CON

$|\vec{F}| > |m\vec{g}|$



$m\ddot{x}_2 = -mg + F + R\cdot\hat{i}_2$ → $R_2 = -F + mg + 0$

a È NULLA CASO STATICO

IL SEGNO SEMPRE + ALL'INIZIO POICHÈ È CON LA PROIEZIONE CHE SI CAPISCE IL VERSO

NELLA CONDIZIONE INIZIALE (CORPO FERMO E APPOGGIATO) POSSO DIRE CHE $m\ddot{x}_2$ SIA NULLO OVVERO CHE L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO LUNGO i_2 SIA NULLA QUINDI POSSO DIRE CHE

$R_2 = \cancel{m\ddot{x}_2} + mg + F > 0$ VERIFICATA SE $F < mg$

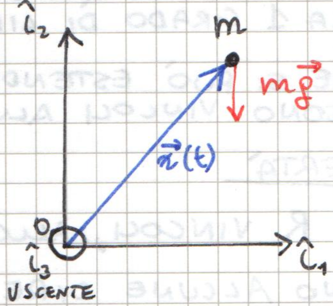
⇓

$\boxed{R_2 > 0}$

SE C'È UNA v_0 INIZIALE, IL PUNTO SI STACCA IMMEDIATAMENTE E L'EQ. DEL MOTO NON È PIÙ QUELLA DESCRITTA INDIPENDENTEMENTE DALLO STATO DI SOLLECITAZIONE DEL CORPO

ESEMPIO CINEMATICA DEL P.TO MATERIALE $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2, \hat{\imath}_3)$

DATA L'EQ. ORARIA CHE SPECIFICA IL MOTO IN QUESTIONE, DEL TIPO:



NON È MOTO PIANO MA MASSA IN SPAZIO TRIDIMENSION.

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0 \quad (1)$$

DOVE

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3} (\vec{x}(t) \cdot \hat{\imath}_k)\hat{\imath}_k$$

ALLORA DALL'EQ. VETTORIALE PASSO AL SISTEMA DI EQ. SCALARI, PROIETTANDO (1) LUNGO $\hat{\imath}_k$ VERSORI.

$$\begin{cases} \hat{\imath}_1)\ (\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0) \cdot \hat{\imath}_1 = \vec{x}(t) \cdot \hat{\imath}_1 \\ \hat{\imath}_2)\ (\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0) \cdot \hat{\imath}_2 = \vec{x}(t) \cdot \hat{\imath}_2 \\ \hat{\imath}_3)\ (\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0) \cdot \hat{\imath}_3 = \vec{x}(t) \cdot \hat{\imath}_3 \end{cases}$$

SISTEMA SONO LE EQ. SCALARI OSSIA LE EQUAZIONI OTTENUTE PROIETTANDO LUNGO I VERSORI DEL SISTEMA DI RIF. CONSIDERATO

$\vec{x}(t)$

$$\begin{cases} x_1(t) = v_{01} t + x_{01} & \rightarrow \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \cdot \hat{\imath}_1 = 0 \quad \text{POICHÉ } \vec{g} \perp \hat{\imath}_1 \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{02}t + x_{02} & \rightarrow \vec{g} \text{ È DISCORDE A } \hat{\imath}_2 \\ x_3(t) = v_{03} t + x_{03} & \rightarrow \vec{g} \text{ È } \perp \text{ A } \hat{\imath}_3 \end{cases}$$

SE A QUESTO PUNTO SI CONSIDERA ANCHE LA VELOCITÀ DI $\vec{x}(t)$:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \qquad \text{QUINDI ESSENDO} \quad \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\hat{\imath}_1 + \frac{dx_2}{dt}\hat{\imath}_2 + \frac{dx_3}{dt}\hat{\imath}_3$$

DERIVANDO LE ESPRESSIONI DI SOPRA:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_{01} \\ v_2(t) = -gt + v_{02} \\ v_3(t) = v_{03} \end{cases}$$

SISTEMA DI EQ. SCALARI DELLA VELOCITÀ DEL PUNTO $\vec{x}(t)$

$\vec{v}(t)$

SE IN QUESTO PROBLEMA SI CONSIDERA:

- $v_1 = v_3 = 0 \rightarrow$ IL MOTO SARÀ LUNGO LA VERTICALE PASSANTE PER x_0
- $v_3 \neq 0$ MA NON HO VINCOLI SU v_1 SI AVRÀ UN $(\hat{\imath}_1, \hat{\imath}_2)$ (CASO DEI PROBLEMI BALISTICI).

GRADI DI LIBERTÀ — DEGREE OF FREEDOM → DOF

GDL RESIDUI SONO DATI DALLA RELAZIONE:

$$\boxed{P = N - M}$$

- M: GRADI DI LIBERTÀ SOTTRATTI DAI VINCOLI
- N: GRADI DI LIBERTÀ DEL SISTEMA LIBERO
- P: È IL NUMERO DI INCOGNITE AUSILIARIE

IL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ È (PARLANDO DI UN PUNTO MATERIALE) IL NUMERO DI VARIABILI INDIPENDENTI NECESSARIE PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA SUA POSIZIONE NELLO SPAZIO ... IN UNO SPAZIO A

3 DIMENSIONI HA QUINDI 3 GRADI DI LIBERTÀ. SE IL PUNTO DEVE MUOVERSI SU UN PIANO O UNA SUPERFICIE HA QUINDI 2 GRADI DI LIBERTÀ; SE DEVE MUOVERSI LUNGO UNA CURVA HA 1 GRADO DI LIBERTÀ.

QUESTA TRATTAZIONE SI PUÒ ESTENDERE AD UN SISTEMA PARTICELLARE DI n PUNTI. SE NON CI SONO VINCOLI ALLORA IL SISTEMA HA:

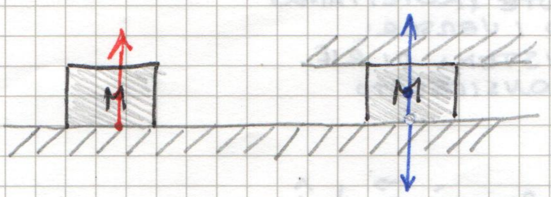
$3n$ GRADI DI LIBERTÀ

SE SONO PRESENTI R VINCOLI, ALLORA AURÀ GDL: $3n - R$

I VINCOLI INIBISCONO ALCUNE DIREZIONI DEL MOTO

PER VINCOLO SI INTENDE QUALSIASI CONDIZIONE CHE LIMITA IL MOTO; SI TRATTANO DI FORZE DETTE FORZE VINCOLARI O REAZIONI VINCOLARI

IL CORPO RIGIDO NON HA n GRADI DI LIBERTÀ BENSÌ 6 DOF IN QUANTO TRASLA + RUOTA DA CUI 3 + 3 GDL.



CONSIDERANDO IL VINCOLO IDEALE:

1) VINCOLO DI APPOGGIO: È VINCOLO CHE NON DIMINUISCE I GDL MA RENDE INACCESSIBILE UN SEMISPAZIO AL P.TO MATERIALE. TUTTAVIA NEGLI INTERVALLI DI TEMPO IN CUI IL P.TO RIMANE IN CONTATTO CON LA SUPERFICIE DEL VINCOLO SONO NECESSARI SOLO 2 PARAMETRI PER DEFINIRE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE E L'UNICA INCOGNITA AUSILIARIA È LA $\vec{R}_N$ CHE COME VERSO HA QUELLO CHE VA DALLA SUPERFICIE ALL'ELEMENTO.

2) VINCOLO DI APPARTENENZA: ESERCITA LA $\vec{R}_N$ REAZIONE NORMALE IN ENTRAMBI I VERSI (POSSIBILMENTE) RISPETTO AL P.TO MATERIALE, ORTOGONALI ALLA SUPERFICIE.

VINCOLO LISCIO È IDEALE POICHÉ PRIVO DI ATTRITO. ESERCITA REAZIONI CHE SONO PUNTO PER PUNTO ORTOGONALI ALLA GEOMETRIA DEL VINCOLO STESSO