

# Meccanica Razionale

---

Università degli studi Roma3

Docente: **Umberto Iemma**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



**NOTESTOBOOK**  
ELEVATE YOUR NOTES

[notestobook.it](http://notestobook.it)

Anno Accademico 2025/2026



# Indice

1	Equilibrio e stabilità di un punto materiale a tre gradi di libertà . . . . .	5
1.1	Risoluzione dell'equazione differenziale vettoriale . . . . .	7
2	Applicazione: pendolo semplice a un grado di libertà . . . . .	9
2.1	Primo metodo: linearizzazione diretta . . . . .	9
2.2	Secondo metodo: approccio energetico . . . . .	10
3	Equilibrio e stabilità a due gradi di libertà . . . . .	10
3.1	Energia potenziale e condizioni di equilibrio . . . . .	11
3.2	Analisi di stabilità mediante matrice hessiana . . . . .	12
3.3	Punto di sella . . . . .	13
4	Meccanica dei sistemi di punti materiali . . . . .	15
4.1	Dinamica delle singole particelle . . . . .	15
4.2	Momento delle forze interne . . . . .	15
4.3	Conservazione della quantità di moto . . . . .	16
4.4	Centro di massa . . . . .	17
4.5	Momento delle forze inerziali rispetto al centro di massa . . . . .	18
4.6	Equazione del moto del centro di massa . . . . .	18
5	Momento delle forze esterne rispetto a un polo generico . . . . .	19
5.1	Momento totale delle forze . . . . .	19
5.2	Equazione di conservazione del momento della quantità di moto . . . . .	19
6	Momento della quantità di moto rispetto al centro di massa . . . . .	20
7	Bilancio energetico dei sistemi particellari . . . . .	22
7.1	Lavoro e variazione di energia cinetica . . . . .	23
8	Teorema di König . . . . .	23
9	Cinematica del corpo rigido . . . . .	25
9.1	Moto piano . . . . .	26
9.2	Velocità nel moto rotatorio piano . . . . .	28
9.3	Accelerazione nel moto rotatorio piano . . . . .	29
10	Moto generico di rototraslazione . . . . .	29

10.1	Distribuzione delle velocità . . . . .	30
10.2	Distribuzione delle accelerazioni . . . . .	30
10.3	Centro istantaneo di rotazione . . . . .	31
10.4	Posizione del CIR nel sistema di riferimento fisso . . . . .	32
11	Moto di puro rotolamento: ruota ideale . . . . .	32
11.1	Calcolo della posizione del CIR per la ruota . . . . .	33
11.2	Polari del moto: base e rulletta . . . . .	34
11.3	Condizioni di rotolamento e strisciamento . . . . .	34
12	Moto rigido di un'asta vincolata . . . . .	35
12.1	Metodo grafico per la determinazione del CIR . . . . .	35
13	Funi e pulegge . . . . .	36
13.1	Dimostrazione della polare fissa . . . . .	37
14	CIR, base e rulletta di una ruota . . . . .	38
14.1	Polare mobile e polare fissa . . . . .	39
15	Formule di Poisson tridimensionali . . . . .	39
15.1	Derivazione delle formule di Poisson 3D . . . . .	39
16	Meccanica relativa: sistemi non inerziali . . . . .	41
16.1	Cinematica relativa . . . . .	42
16.2	Accelerazione assoluta . . . . .	43
16.3	Relazione tra velocità angolari . . . . .	44
17	Dinamica relativa: le forze apparenti . . . . .	44
18	Derivata di un vettore in sistemi di riferimento mobili . . . . .	44
18.1	Derivata nel sistema assoluto . . . . .	45
18.2	Relazione fondamentale . . . . .	45

# 1 Equilibrio e stabilità di un punto materiale a tre gradi di libertà

Lo studio dell'equilibrio e della stabilità per un punto materiale con tre gradi di libertà rappresenta la naturale generalizzazione del caso unidimensionale. Dal punto di vista concettuale non vi sono elementi sostanzialmente nuovi rispetto al caso più semplice; tuttavia, anziché trattare una singola equazione scalare, ci si trova a gestire un sistema di equazioni scalari accoppiate, la cui risoluzione richiede un procedimento algebrico sistematico.

**Formulazione del problema.** Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad una risultante delle forze

$$\vec{F} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \quad (1)$$

dove  $\vec{f}$  rappresenta la risultante delle forze agenti sul punto e non una forzante esterna nel senso di un termine che impone un moto prestabilito.<sup>1</sup>

La **condizione di equilibrio** richiede che

$$\vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}, \quad (2)$$

ovvero la risultante delle forze deve annullarsi nella posizione  $\vec{x}_e$  quando la velocità è nulla, e tale condizione deve valere per ogni istante  $t \in \mathbb{R}$ . È fondamentale specificare non solo che  $\vec{x}_e$  sia un punto di equilibrio, ma anche che  $\dot{\vec{x}}_e = \vec{0}$ : in caso contrario la velocità potrebbe essere costante ma non nulla, con accelerazione  $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$ , configurando un moto rettilineo uniforme anziché un vero equilibrio.

**Perturbazione dell'equilibrio.** Per analizzare il comportamento del sistema in prossimità dell'equilibrio, si introduce una perturbazione

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_e + \vec{x}'(t), \quad (3)$$

dove  $\vec{x}'(t)$  rappresenta una piccola deviazione dalla posizione di equilibrio. Il termine “perturbabile” indica qui l’assegnazione di condizioni iniziali che collocano il sistema in un intorno del punto di equilibrio.

Nel caso unidimensionale del pendolo, ad esempio, si linearizza l’equazione del moto attorno alle posizioni di equilibrio  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . La linearizzazione è valida solo in un piccolo intorno di tali punti e permette di determinare se l’equilibrio sia stabile, instabile o indifferente. Nel punto  $\theta = 0$  si osserva un moto armonico (eventualmente smorzato), indicativo di **stabilità** o stabilità asintotica; nel punto  $\theta = \pi$  compaiono esponenziali reali divergenti, segno di **instabilità**. Si tratta dunque di uno studio rigorosamente locale.

**Linearizzazione della risultante delle forze.** Applicando l’espansione in serie di Taylor della funzione vettoriale  $\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$  attorno alle condizioni di equilibrio  $(\vec{x}_e, \vec{0}, t)$ , troncata al primo ordine, si ottiene:

$$\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \approx \vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) + \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_e} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_e) + \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{x}}} \right|_{\vec{0}} \cdot (\dot{\vec{x}} - \vec{0}) + O(\vec{x}', \dot{\vec{x}}'). \quad (4)$$

---

<sup>1</sup>Si sottolinea la distinzione terminologica:  $\vec{f}$  è la risultante delle forze che determinano la dinamica del sistema, non un termine forzante che prescrive il moto.

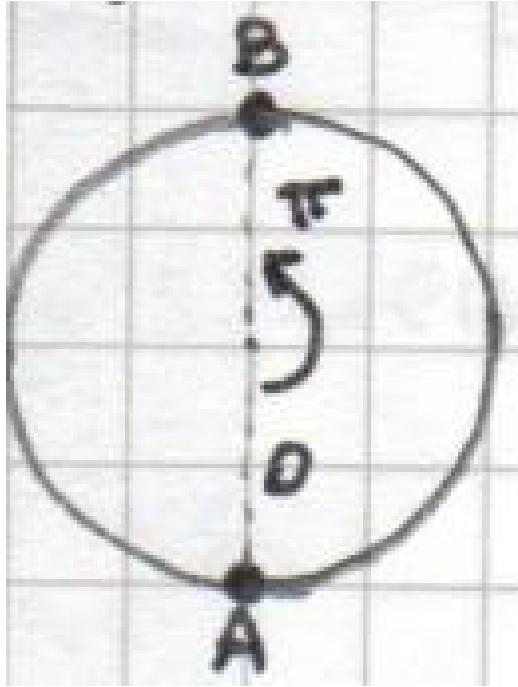


Figura 1: Schema del pendolo semplice: la massa  $m$  è sospesa ad un filo di lunghezza  $\ell$  incernierato nel punto  $A$ . L'angolo  $\theta$  misura lo scostamento dalla verticale.

Per una funzione vettoriale  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dove  $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ , l'espansione di Taylor al primo ordine attorno ad un punto  $\vec{a}$  assume la forma generale

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}), \quad (5)$$

dove  $J_f$  è la matrice jacobiana

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Tenendo conto che  $\vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}$  per definizione di equilibrio, e introducendo le notazioni  $\vec{x} - \vec{x}_e = \vec{x}'$  e  $\dot{\vec{x}} - \vec{0} = \dot{\vec{x}'}$ , l'espansione (4) si riscrive in forma indiciale come

$$m\ddot{x}'_l \approx \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \Big|_{\vec{x}_e} x'_k + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_k} \Big|_{\vec{0}} \dot{x}'_k, \quad l = 1, 2, 3. \quad (7)$$

**Introduzione delle matrici caratteristiche.** Per esprimere l'equazione in forma matriciale, si definisce la **matrice di massa** mediante il delta di Kronecker:

$$M_{lk} = m\delta_{lk}, \quad \text{ovvero} \quad \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Si introduce quindi la **matrice di smorzamento**

$$G_{lk} = - \left. \frac{\partial f_l}{\partial \dot{x}_k} \right|_{(\vec{x}_e, \vec{0})}, \quad \underline{\underline{G}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_3} \end{pmatrix} \Bigg|_{(\vec{x}_e, \vec{0})}, \quad (9)$$

e la **matrice di rigidezza**

$$K_{lk} = - \left. \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \right|_{(\vec{x}_e, \vec{0})}, \quad \underline{\underline{K}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \Bigg|_{(\vec{x}_e, \vec{0})}. \quad (10)$$

L'equazione linearizzata assume quindi la forma tensoriale

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{G}} \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{0}, \quad (11)$$

che costituisce un'equazione differenziale vettoriale del secondo ordine, equivalente ad un sistema di tre equazioni differenziali scalari accoppiate. Nel seguito si omette l'apice sulla perturbazione, intendendo che  $\underline{x}$  rappresenta lo scostamento dall'equilibrio.

**Interpretazione fisica.** La matrice  $\underline{\underline{M}}$  codifica l'inerzia del sistema; la matrice  $\underline{\underline{G}}$  descrive gli effetti dissipativi o giroscopici che dipendono dalla velocità; la matrice  $\underline{\underline{K}}$  caratterizza le forze di richiamo elastico o, più in generale, le forze posizionali linearizzate. Il segno negativo nelle definizioni di  $\underline{\underline{G}}$  e  $\underline{\underline{K}}$  è scelto affinché, per sistemi conservativi stabili, queste matrici risultino definite positive.

## 1.1 Risoluzione dell'equazione differenziale vettoriale

Per risolvere l'equazione (11) si introduce il cambio di variabili che trasforma il sistema del secondo ordine in un sistema del primo ordine di dimensione doppia. Si pone

$$\underline{y} = \dot{\underline{x}}, \quad (12)$$

e si definisce il vettore di stato

$$\underline{\underline{w}} = \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

L'equazione del moto si riscrive nella forma

$$\underline{\underline{A}} \dot{\underline{\underline{w}}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{w}}, \quad (14)$$

dove le matrici a blocchi sono definite come

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{M}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Il prodotto matriciale esplicito conferma la coerenza della formulazione:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

che restituisce  $\dot{\underline{x}} = \underline{y}$  dalla prima riga e l'equazione del moto originale dalla seconda.

Assumendo che la matrice  $\underline{\underline{A}}$  sia invertibile,<sup>2</sup> si ottiene

$$\dot{\underline{w}} = \underline{\underline{S}} \underline{w}, \quad \text{dove } \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}. \quad (17)$$

Questa è un'equazione differenziale vettoriale del primo ordine, la cui soluzione generale si cerca nella forma

$$\underline{w} = \underline{z} e^{\lambda t}, \quad (18)$$

dove  $\underline{z}$  è un vettore costante e  $\lambda$  uno scalare da determinare.

Sostituendo nell'equazione (17):

$$\lambda \underline{z} e^{\lambda t} = \underline{\underline{S}} \underline{z} e^{\lambda t}. \quad (19)$$

Poiché  $e^{\lambda t} \neq 0$  per ogni  $t$  e ogni  $\lambda$ , si ottiene il problema agli autovalori

$$(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \underline{z} = \underline{0}. \quad (20)$$

Gli autovalori  $\lambda_k$  si determinano imponendo

$$\det(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0, \quad (21)$$

che fornisce sei autovalori (reali o complessi coniugati) per il sistema a tre gradi di libertà. Per ciascun autovalore  $\lambda_k$  si calcola l'autovettore associato  $\underline{z}^{(k)}$  risolvendo

$$(\underline{\underline{S}} - \lambda_k \underline{\underline{I}}) \underline{z}^{(k)} = \underline{0}. \quad (22)$$

La soluzione generale è quindi

$$\underline{w}(t) = \sum_{k=1}^6 c_k \underline{z}^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad (23)$$

dove le costanti  $c_k$  sono determinate dalle condizioni iniziali.

**Interpretazione fisica e criterio di stabilità.** Il comportamento asintotico del sistema dipende dalla natura degli autovalori  $\lambda_k$ :

- Se tutti gli autovalori hanno **parte reale negativa**, ogni termine esponenziale decade nel tempo e l'equilibrio è **asintoticamente stabile**.
- Se almeno un autovalore ha **parte reale positiva**, il corrispondente termine esponenziale diverge e l'equilibrio è **instabile**.
- Se tutti gli autovalori hanno parte reale non positiva, con almeno uno puramente immaginario, l'equilibrio è **semplicemente stabile** (nel caso conservativo) o richiede un'analisi più approfondita.

Dalla struttura del vettore di stato  $\underline{w}(t) = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ , le prime tre componenti forniscono direttamente l'evoluzione temporale della perturbazione di posizione.

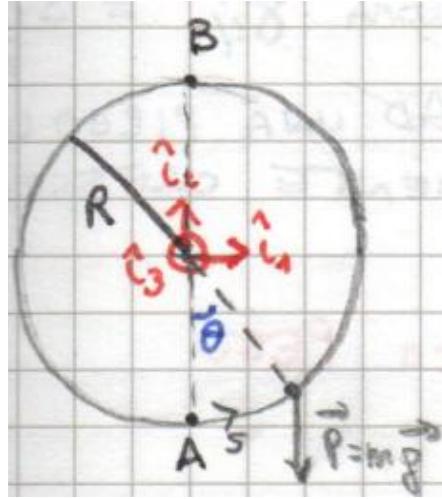


Figura 2: Pendolo semplice: la massa  $m$  è vincolata a muoversi su un arco di cerchio di raggio  $R$ . L'angolo  $\theta$  è misurato dalla verticale discendente.

## 2 Applicazione: pendolo semplice a un grado di libertà

### 2.1 Primo metodo: linearizzazione diretta

L'equazione del moto per il pendolo semplice si ricava proiettando la seconda legge di Newton lungo la direzione tangente alla traiettoria. Indicando con  $s = R\theta$  l'ascissa curvilinea e con  $\vec{F} = m\vec{g}$  la forza peso, si ha

$$m\ddot{s} = \vec{F} \cdot \hat{e}_t = -mg \sin \theta, \quad (24)$$

dove  $\hat{e}_t$  è il versore tangente orientato nel verso di  $\theta$  crescente. Sostituendo  $s = R\theta$ :

$$mR\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0, \quad \text{ovvero} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0, \quad (25)$$

avendo posto  $\ell = R$ .

Le posizioni di equilibrio si trovano imponendo  $f(\theta) = -mg \sin \theta = 0$ , da cui  $\theta_A = 0$  e  $\theta_B = \pi$ .

**Stabilità nel punto A ( $\theta_A = 0$ ).** Perturbando attorno a  $\theta_A$ , con  $\theta(t) = \theta_A + \theta'(t)$ , l'espansione di Taylor fornisce

$$f(\theta) \approx \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_0 \theta'(t) = -mg \cos(0) \cdot \theta'(t) = -mg\theta'(t). \quad (26)$$

L'equazione linearizzata diventa

$$\ddot{\theta}'(t) + \frac{g}{\ell} \theta'(t) = 0. \quad (27)$$

L'equazione caratteristica  $\chi^2 + g/\ell = 0$  ha radici  $\chi_{1,2} = \pm j\omega$ , dove  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ . Trattandosi di radici puramente immaginarie, il moto è armonico e l'equilibrio è **stabile**.

**Stabilità nel punto B ( $\theta_B = \pi$ ).** Procedendo analogamente:

$$f(\theta) \approx -mg \cos(\pi) \cdot \theta'(t) = +mg\theta'(t), \quad (28)$$

<sup>2</sup>Tale ipotesi è verificata quando la matrice di massa è non singolare, condizione sempre soddisfatta per  $m > 0$ .

da cui

$$\ddot{\theta}'(t) - \frac{g}{\ell} \theta'(t) = 0. \quad (29)$$

L'equazione caratteristica  $\chi^2 - g/\ell = 0$  ha radici reali  $\chi_{1,2} = \pm \sqrt{g/\ell}$ . La presenza di una radice positiva implica che l'equilibrio è **instabile**: una piccola perturbazione produce uno scostamento che cresce esponenzialmente nel tempo.

## 2.2 Secondo metodo: approccio energetico

Essendo  $\vec{F} = m\vec{g}$  un campo conservativo, esiste un'energia potenziale  $U$  tale che  $\vec{F} = -\nabla U$ . Scegliendo l'asse  $x_2$  verticale ascendente:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = -mg, \quad \Rightarrow \quad U = mgx_2 + \text{cost.} = mgh + \text{cost.} \quad (30)$$

In coordinate intrinseche, utilizzando  $s = R\theta$ :

$$-\frac{\partial U}{\partial s} = -mg \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR \sin \theta. \quad (31)$$

Le condizioni di equilibrio  $\partial U / \partial \theta = 0$  forniscono nuovamente  $\theta_A = 0$  e  $\theta_B = \pi$ .

**Interpretazione fisica.** L'energia potenziale ha un minimo locale in  $\theta_A = 0$  (posizione più bassa) e un massimo locale in  $\theta_B = \pi$  (posizione più alta). Il teorema di Lagrange-Dirichlet garantisce che un minimo dell'energia potenziale corrisponde ad un equilibrio stabile, mentre un massimo corrisponde ad un equilibrio instabile.<sup>3</sup>

## 3 Equilibrio e stabilità a due gradi di libertà

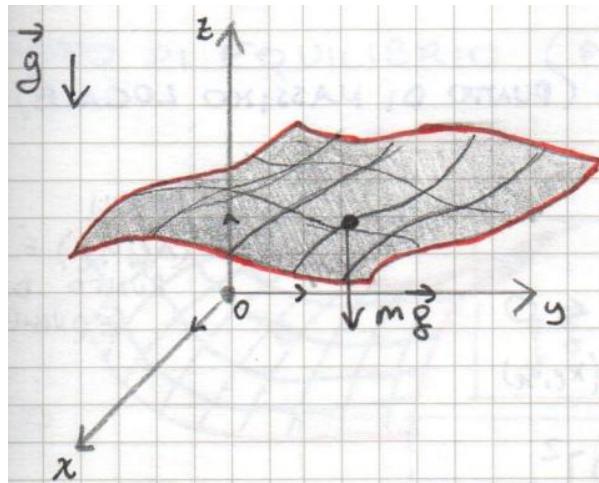


Figura 3: Rappresentazione tridimensionale di una superficie di energia potenziale. Il vettore  $\vec{g}$  indica la direzione della gravità.

<sup>3</sup>Il teorema di Lagrange-Dirichlet afferma che se l'energia potenziale ha un minimo stretto in una configurazione di equilibrio, allora tale equilibrio è stabile.

Consideriamo ora un sistema a due gradi di libertà, caratterizzato da una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  che descrive la superficie su cui il punto materiale è vincolato a muoversi:

$$z(x, y) = -\sin x \sin y. \quad (32)$$

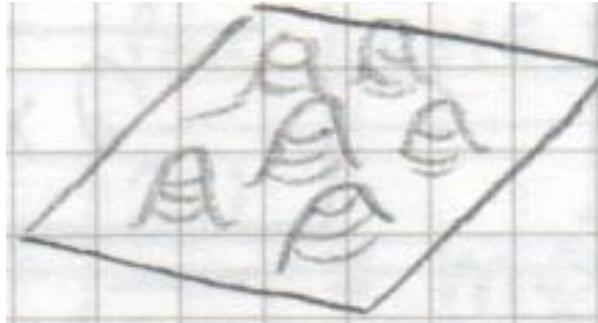


Figura 4: Andamento tridimensionale della superficie  $z(x, y) = -\sin x \sin y$ , che presenta una struttura periodica di massimi e minimi.

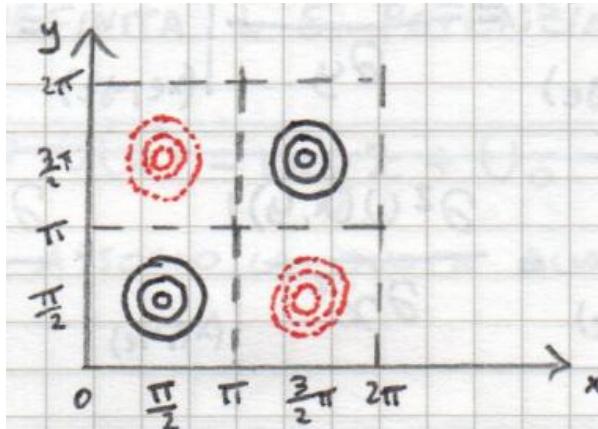


Figura 5: Vista dall'alto della superficie  $z(x, y) = -\sin x \sin y$ . I cerchi rossi tratteggiati indicano i massimi locali, i cerchi neri tratteggiati i minimi locali.

La vista dall'alto della funzione  $z(x, y) = -\sin x \sin y$  rivela una struttura periodica di massimi e minimi locali distribuiti regolarmente nel piano  $(x, y)$ .

### 3.1 Energia potenziale e condizioni di equilibrio

L'energia potenziale associata al campo gravitazionale per un punto materiale vincolato sulla superficie  $z(x, y)$  è data da

$$U(x, y) = mgz(x, y) + U_0 = -mg \sin x \sin y + C, \quad (33)$$

dove  $C$  è una costante arbitraria.<sup>4</sup>

Le derivate parziali dell'energia potenziale sono

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -mg \cos x \sin y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -mg \sin x \cos y. \quad (34)$$

---

<sup>4</sup>La scelta della costante  $C$  non influenza le condizioni di equilibrio né la stabilità, poiché solo le derivate di  $U$  intervengono nell'analisi.

I punti di equilibrio si determinano imponendo l'annullamento simultaneo di entrambe le derivate. Poiché  $m, g > 0$ , le condizioni

$$\begin{cases} \cos x \sin y = 0 \\ \sin x \cos y = 0 \end{cases} \quad (35)$$

sono soddisfatte per tutte le combinazioni di  $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  e  $y = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ . Si sono così individuate le posizioni di equilibrio, ma resta da determinare la loro natura.

### 3.2 Analisi di stabilità mediante matrice hessiana

La stabilità degli equilibri in sistemi a due gradi di libertà si studia attraverso la **matrice hessiana** dell'energia potenziale, definita come

$$H(U) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Per il teorema di Schwarz, se le derivate seconde miste sono continue, si ha  $U_{xy} = U_{yx}$ , garantendo la simmetria della matrice hessiana.

**Condizioni per l'equilibrio stabile.** Un punto di equilibrio  $(x_e, y_e)$  è **stabile** (minimo relativo dell'energia potenziale) se la matrice hessiana è **definita positiva**. Ciò richiede:

1.  $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_e, y_e)} = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{(x_e, y_e)} = 0$  (condizione di equilibrio);
2.  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_e, y_e)} > 0$ ;
3.  $\det(H) \Big|_{(x_e, y_e)} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_e, y_e)} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{(x_e, y_e)} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_e, y_e)} \right)^2 > 0$ .

**Condizioni per l'equilibrio instabile.** Un punto di equilibrio è **instabile** (massimo relativo dell'energia potenziale) se la matrice hessiana è **definita negativa**. Le condizioni sono:

1.  $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(x_e, y_e)} = \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{(x_e, y_e)} = 0$ ;
2.  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(x_e, y_e)} < 0$ ;
3.  $\det(H) \Big|_{(x_e, y_e)} > 0$ .

**Applicazione al punto  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .** Per la superficie  $z(x, y) = -\sin x \sin y$ , la matrice hessiana dell'energia potenziale  $U(x, y) = -mg \sin x \sin y$  risulta

$$H(x, y) = mg \begin{bmatrix} \sin x \sin y & -\cos x \cos y \\ -\cos x \cos y & \sin x \sin y \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Valutando nel punto  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ :

$$H\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = mg \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = mg I. \quad (38)$$

Si verifica che:

- $\det(H) = (mg)^2 > 0$ ;
- $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = mg > 0$ ;
- le derivate prime si annullano nel punto.

Poiché tutte le condizioni per la definitezza positiva sono soddisfatte, il punto  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  è un **equilibrio stabile**.<sup>5</sup>

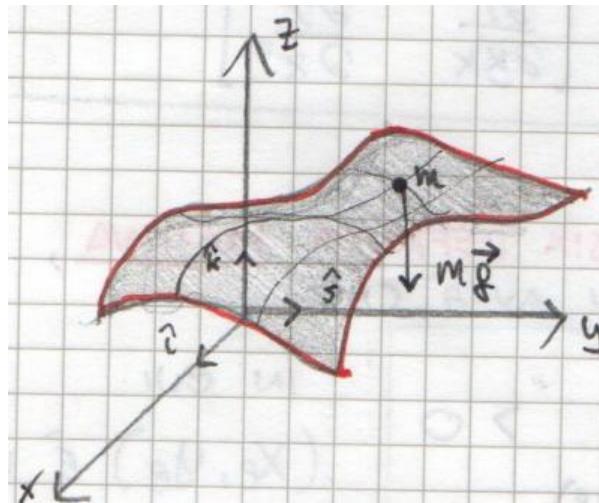


Figura 6: Rappresentazione tridimensionale della superficie  $z(x, y) = -\sin x \sin y$ . Il punto  $m$  indica una posizione di equilibrio, con la forza peso  $m\vec{g}$  diretta verso il basso.

Un ragionamento analogo si applica alla superficie  $z(x, y) = \sin x \sin y$ , con energia potenziale  $U(x, y) = mg \sin x \sin y$ , che presenta la stessa struttura di punti critici.

### 3.3 Punto di sella

Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$z(x, y) = x^2 - y^2. \quad (39)$$

L'energia potenziale associata è

$$U(x, y) = mg(x^2 - y^2) + U_0. \quad (40)$$

Le derivate prime sono

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2mgx, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2mgy. \quad (41)$$

---

<sup>5</sup>Si noti che per la superficie  $z(x, y) = -\sin x \sin y$ , questo punto corrisponde ad un minimo della quota, coerentemente con la stabilità dell'equilibrio.

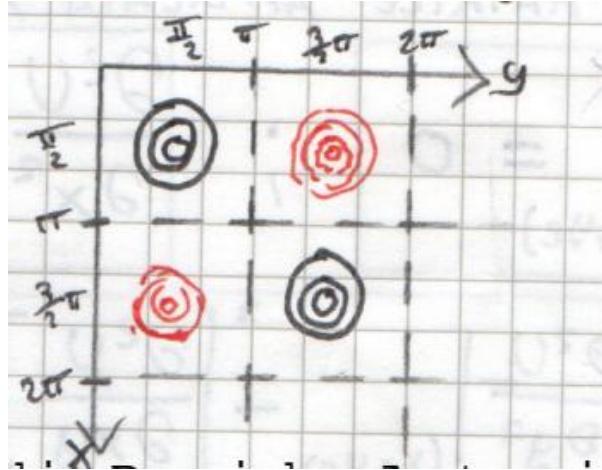


Figura 7: Curve di livello della funzione  $U(x, y) = mg \sin x \sin y$ . I cerchi neri indicano i minimi locali (equilibri stabili), i cerchi rossi i massimi locali (equilibri instabili).

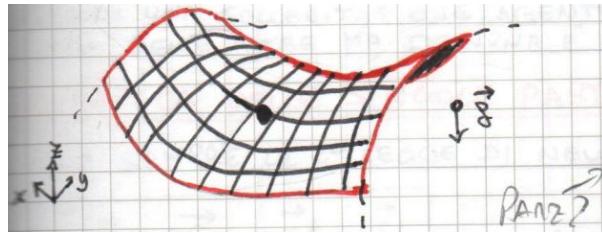


Figura 8: Superficie a sella (paraboloido iperbolico)  $z(x, y) = x^2 - y^2$ . Il punto nero indica il punto di sella nell'origine.

Imponendo l'annullamento simultaneo si ottiene l'unico punto di equilibrio

$$P_e = (0, 0). \quad (42)$$

La matrice hessiana risulta

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2mg & 0 \\ 0 & -2mg \end{bmatrix} = 2mg \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Il determinante è

$$\det(H) = (2mg)(-2mg) = -4m^2g^2 < 0. \quad (44)$$

**Interpretazione fisica.** Quando il determinante della matrice hessiana è negativo, la matrice è **indefinita** e il punto critico è un **punto di sella**. Il comportamento dipende dalla direzione della perturbazione:

- perturbando lungo il piano  $xz$  (dove la superficie è concava verso l'alto), il punto oscilla attorno a  $P_e$ : comportamento **localmente stabile**;
- perturbando lungo il piano  $yz$  (dove la superficie è concava verso il basso), il punto si allontana indefinitamente da  $P_e$ : comportamento **instabile**.

Dal punto di vista matematico rigoroso, l'equilibrio non è né stabile né instabile nel senso di Lyapunov. Tuttavia, dal punto di vista ingegneristico, poiché esiste almeno una direzione di instabilità, il sistema si considera **instabile**.

## 4 Meccanica dei sistemi di punti materiali

Per **sistema di punti materiali** si intende un insieme di  $N$  punti materiali, ciascuno libero di muoversi nello spazio, ma la cui dinamica non è indipendente da quella degli altri. I punti si scambiano forze reciproche (gravitazionali, coulombiane, elastiche, ecc.), cosicché una sollecitazione agente su uno di essi influenza l'evoluzione del moto di tutti gli altri.

### 4.1 Dinamica delle singole particelle

Per ogni particella  $k$ -esima vale la seconda legge di Newton:

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^I, \quad (45)$$

dove  $\vec{F}_k^E$  rappresenta la risultante delle forze esterne e  $\vec{F}_k^I$  la risultante delle forze interne agenti sulla particella  $k$ , con  $k = 1, \dots, N$ .

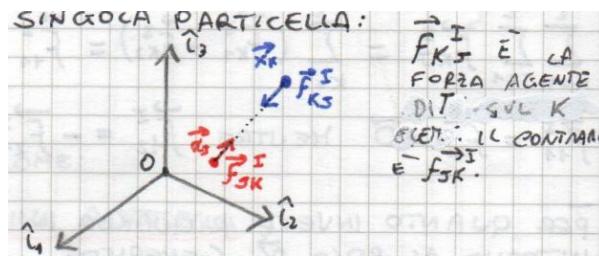


Figura 9: Sistema di riferimento con origine  $O$  e tre particelle. La forza  $\vec{F}_{kj}^I$  è la forza esercitata dalla particella  $j$  sulla particella  $k$ ; per il terzo principio,  $\vec{F}_{jk}^I = -\vec{F}_{kj}^I$ .

La forza interna sulla particella  $k$  è la somma delle forze esercitate da tutte le altre particelle:

$$\vec{F}_k^I = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj}^I, \quad (46)$$

dove per convenzione  $\vec{F}_{kk}^I = \vec{0}$  (una particella non esercita forza su se stessa).

Per la **terza legge di Newton**, le forze interne sono a coppie uguali e opposte:

$$\vec{F}_{kj}^I = -\vec{F}_{jk}^I, \quad \text{ovvero} \quad \vec{F}_{kj}^I + \vec{F}_{jk}^I = \vec{0}. \quad (47)$$

### 4.2 Momento delle forze interne

Consideriamo il momento rispetto ad un polo generico  $\vec{r}_0$  delle forze interne scambiate tra due particelle  $k$  e  $j$ :

$$(\vec{r}_k - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{kj}^I + (\vec{r}_j - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{jk}^I = \vec{0}. \quad (48)$$

**Dimostrazione.** Aggiungendo e sottraendo  $\vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^I$  e riorganizzando i termini:

$$\begin{aligned} & (\vec{r}_k - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{kj}^I + (\vec{r}_j - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{jk}^I + \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^I - \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^I \\ &= \vec{r}_k \times (\vec{F}_{kj}^I + \vec{F}_{jk}^I) - \vec{r}_0 \times (\vec{F}_{kj}^I + \vec{F}_{jk}^I) + (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{jk}^I \\ &= (\vec{r}_k - \vec{r}_0) \times \underbrace{(\vec{F}_{kj}^I + \vec{F}_{jk}^I)}_{=0} + \underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{jk}^I}_{\parallel \vec{F}_{jk}^I} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (49)$$

Il primo termine si annulla per la terza legge di Newton. Il secondo termine si annulla perché le forze interne sono dirette lungo la congiungente le due particelle, quindi  $(\vec{r}_j - \vec{r}_k)$  è parallelo a  $\vec{F}_{jk}^I$ .

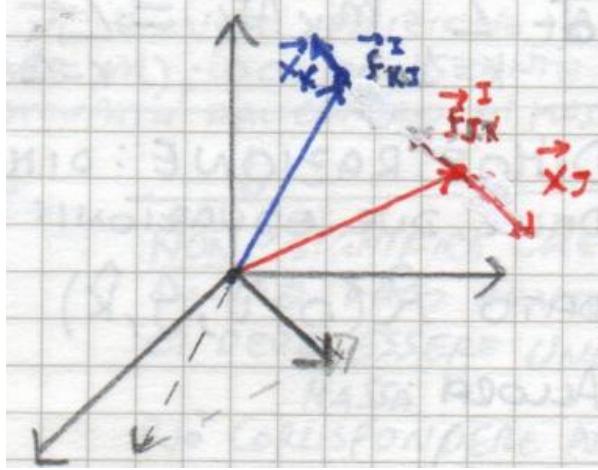


Figura 10: Illustrazione della nullità del momento delle forze interne: le forze  $\vec{F}_{kj}^I$  e  $\vec{F}_{jk}^I$  giacciono sulla retta congiungente le particelle.

**Risultante delle forze interne.** Sommando su tutte le particelle:

$$\vec{F}^I = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj}^I = \vec{0}. \quad (50)$$

La dimostrazione segue dalla terza legge di Newton: ogni coppia di termini  $\vec{F}_{kj}^I + \vec{F}_{jk}^I$  si annulla, e i termini diagonali  $\vec{F}_{kk}^I$  sono nulli per definizione.

**Momento totale delle forze interne.** Il momento totale delle forze interne rispetto ad un polo generico  $\vec{x}_0$  è

$$\vec{M}_0^I = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{F}_k^I = \vec{0}. \quad (51)$$

**Interpretazione fisica.** Ogni coppia di forze interne scambiate tra due particelle costituisce una coppia di forze uguali e opposte giacenti sulla stessa retta d'azione. Il momento di tale coppia rispetto a qualunque polo è nullo.

### 4.3 Conservazione della quantità di moto

Sommando le equazioni del moto per tutte le  $N$  particelle:

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^E + \vec{F}_k^I). \quad (52)$$

Poiché  $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I = \vec{0}$ , si ottiene

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E. \quad (53)$$

Assumendo che le masse siano costanti nel tempo, la derivata può essere portata fuori dalla sommatoria:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E. \quad (54)$$

Definendo la **quantità di moto** della particella  $k$ -esima come  $\vec{q}_k = m_k \vec{v}_k$  e la **quantità di moto totale** come

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^N \vec{q}_k = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k, \quad (55)$$

si ottiene l'**equazione di conservazione della quantità di moto**:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}^E, \quad (56)$$

dove  $\vec{F}^E = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E$  è la risultante delle forze esterne.

**Interpretazione fisica.** Se la risultante delle forze esterne è nulla,  $\vec{F}^E = \vec{0}$ , la quantità di moto totale si conserva:  $\vec{q} = \text{costante}$ . In generale, un sistema di  $N$  particelle libere nello spazio possiede  $3N$  gradi di libertà, richiedendo  $3N$  parametri per determinare univocamente lo stato del sistema.

#### 4.4 Centro di massa

Esiste un punto dello spazio, detto **centro di massa**, le cui coordinate sono definite come la media pesata delle coordinate delle singole particelle con pesi pari alle rispettive masse.

Definita la **massa totale** del sistema come

$$M = \sum_{k=1}^N m_k, \quad (57)$$

il vettore posizione del centro di massa è

$$\vec{x}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k. \quad (58)$$

Riscrivendo questa relazione:

$$\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) = \vec{0}. \quad (59)$$

**Interpretazione fisica.** Il centro di massa rappresenta il punto in cui si può immaginare concentrata l'intera massa del sistema. Si noti che il centro di massa può corrispondere ad una posizione dello spazio in cui non è presente alcuna massa fisica.

Derivando la (58) rispetto al tempo:

$$M \vec{v}_G = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \vec{q}. \quad (60)$$

Pertanto la quantità di moto totale del sistema coincide con la quantità di moto di una particella fittizia di massa  $M$  posta nel centro di massa e dotata della velocità  $\vec{v}_G$ .

## 4.5 Momento delle forze inerziali rispetto al centro di massa

Consideriamo un campo di forze inerziali della forma  $\vec{F}_k^E = m_k \vec{a}$ , dove  $\vec{a}$  è un'accelerazione uniforme (costante nello spazio). Il momento totale di questo campo rispetto al centro di massa è

$$\vec{M}_G^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times (m_k \vec{a}) = \left( \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \right) \times \vec{a} = \vec{0}, \quad (61)$$

dove si è sfruttata la bilinearità del prodotto vettoriale e la proprietà (59).

**Interpretazione fisica.** Qualunque sollecitazione associata ad un campo di forze inerziali uniforme (come il campo gravitazionale terrestre approssimato costante) ha momento nullo rispetto al centro di massa. In questa approssimazione, il centro di massa coincide con il **baricentro** del sistema.

## 4.6 Equazione del moto del centro di massa

Derivando ulteriormente la (60):

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_G) = M\vec{a}_G = \vec{F}^E. \quad (62)$$

Questa è l'**equazione del moto del centro di massa**: il centro di massa si muove come se fosse una particella di massa  $M$  soggetta alla risultante delle sole forze esterne. Le forze interne, per quanto complesse, non influenzano il moto del centro di massa.

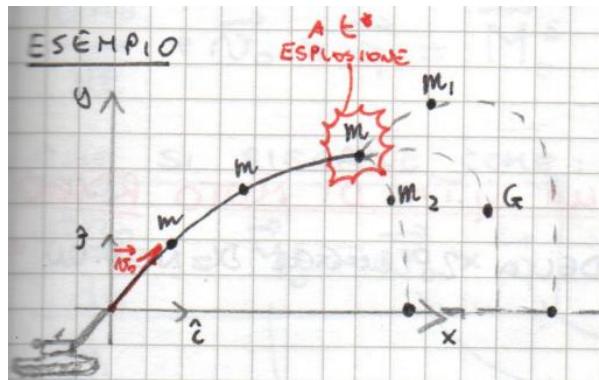


Figura 11: Esempio di esplosione: una massa  $m$  si frammenta in due parti  $m_1$  e  $m_2$ . Il centro di massa  $G$  continua a muoversi secondo la traiettoria determinata dalle sole forze esterne (in questo caso, la gravità).

Il centro di massa  $\vec{x}_G(t)$  di un sistema di  $N$  particelle è definito come

$$\vec{x}_G(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k(t), \quad (63)$$

dove  $M = \sum_{k=1}^N m_k$  rappresenta la massa totale del sistema.

**Esempio: esplosione di un corpo.** Consideriamo un corpo di massa  $m$  inizialmente in quiete su un piano orizzontale che, a seguito di un'esplosione, si frammenta in due parti di

masse  $m_1$  e  $m_2$ , con  $M = m_1 + m_2$ . L'esplosione è conseguenza della liberazione di forze interne al sistema; pertanto, il moto del centro di massa non è influenzato dall'evento.

In assenza di forze esterne orizzontali, la condizione di equilibrio verticale per ogni punto prima dell'esplosione è

$$-m\vec{g} + \vec{R}_N = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}^E = \vec{0}. \quad (64)$$

Dalla prima equazione cardinale dei sistemi di punti materiali, se la risultante delle forze esterne è nulla:

$$\frac{d\vec{q}_G}{dt} = \vec{F}^E = \vec{0} \Rightarrow \vec{q}_G = \text{costante}. \quad (65)$$

**Interpretazione fisica.** La quantità di moto del sistema si conserva prima e dopo l'esplosione. Il centro di massa, se inizialmente in quiete, rimane in quiete (nel riferimento orizzontale); se era in moto, continua con velocità costante. Indicando con  $t_f$  l'istante in cui il centro di massa  $G$  raggiunge una certa quota, la relazione cinematica del sistema è

$$M\vec{x}_G(t) = m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t). \quad (66)$$

## 5 Momento delle forze esterne rispetto a un polo generico

Per ottenere informazioni più dettagliate sulla dinamica del sistema, si considera il momento delle forze esterne rispetto a un polo generico  $\vec{x}_0$ . Per la singola particella  $k$ -esima:

$$\vec{M}_{0,k}^E = (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}. \quad (67)$$

Sommando su tutte le particelle del sistema:

$$\vec{M}_0^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}. \quad (68)$$

### 5.1 Momento totale delle forze

La risultante delle forze agenti sulla particella  $k$ -esima è  $\vec{F}_k = \vec{F}_k^I + \vec{F}_k^E$ . Il momento totale rispetto al polo  $\vec{x}_0$  risulta

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times (\vec{F}_k^I + \vec{F}_k^E). \quad (69)$$

Poiché la risultante delle forze interne è nulla,  $\vec{F}^I = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I = \vec{0}$ , e il momento delle forze interne rispetto a qualunque polo è anch'esso nullo, si ha

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{F}_k^E. \quad (70)$$

### 5.2 Equazione di conservazione del momento della quantità di moto

Partendo dalla seconda legge di Newton per la particella  $k$ -esima:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^E + \vec{F}_k^I, \quad (71)$$

si moltiplica vettorialmente per  $(\vec{x}_k - \vec{x}_0)$  e si somma su tutte le particelle:

$$\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{F}_k^E. \quad (72)$$

Assumendo che le masse  $m_k$  siano costanti nel tempo, l'operatore derivata può essere portato fuori dalla sommatoria. Si definisce il **momento della quantità di moto** del sistema rispetto al polo  $\vec{x}_0$ :

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{q}_k. \quad (73)$$

Sviluppando la derivata temporale di  $\vec{h}_0$ :

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{v}_k - \vec{v}_0) \times m_k \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}. \quad (74)$$

Il primo termine si semplifica osservando che  $\vec{v}_k \times \vec{v}_k = \vec{0}$ , mentre il secondo termine coincide con il momento delle forze.<sup>6</sup>

Si ottengono così le due **equazioni cardinali** della meccanica dei sistemi:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}^E \quad (\text{Prima equazione cardinale}), \quad (75)$$

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0^E - \vec{v}_0 \times M \vec{v}_G \quad (\text{Seconda equazione cardinale}). \quad (76)$$

**Interpretazione fisica.** La prima equazione cardinale descrive la dinamica del centro di massa  $\vec{x}_G$  del sistema: il centro di massa si muove come se fosse un punto materiale di massa  $M$  soggetto alla risultante delle sole forze esterne. La seconda equazione cardinale descrive il moto delle particelle del sistema rispetto al centro di massa.<sup>7</sup>

## 6 Momento della quantità di moto rispetto al centro di massa

Per analizzare il moto del sistema di particelle attorno al centro di massa, si riscrive  $\vec{h}_0$  aggiungendo e sottraendo opportunamente  $\vec{x}_G$  e  $\vec{v}_G$ :

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G + \vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G + \vec{v}_G). \quad (77)$$

Sviluppando il prodotto e sfruttando la proprietà fondamentale del centro di massa,  $\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) = \vec{0}$ , si dimostra che diversi termini si annullano. Dopo i calcoli si ottiene:

$$\vec{h}_0 = \vec{h}_G + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times M \vec{v}_G, \quad (78)$$

dove

$$\vec{h}_G = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_k \quad (79)$$

è il **momento della quantità di moto del sistema rispetto al centro di massa**.

<sup>6</sup>Nel caso in cui il polo  $\vec{x}_0$  sia mobile, compare un termine aggiuntivo proporzionale a  $\vec{v}_0$ .

<sup>7</sup>Nel caso particolare in cui il polo  $\vec{x}_0$  sia fisso ( $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ) o coincida con il centro di massa, il termine  $\vec{v}_0 \times M \vec{v}_G$  si annulla.

**Interpretazione fisica.** Il momento della quantità di moto rispetto a un polo generico  $\vec{x}_0$  è dato dalla somma di due contributi:

- $\vec{h}_G$ : momento della quantità di moto del sistema rispetto al proprio centro di massa, indicativo del moto di rotazione delle particelle attorno a  $G$ ;
- $(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times M\vec{v}_G$ : momento della quantità di moto del centro di massa rispetto al polo  $\vec{x}_0$ , come se l'intera massa fosse concentrata in  $G$ .

Il termine  $\vec{h}_G$  può anche essere espresso in funzione delle velocità relative:

$$\vec{h}_G = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G), \quad (80)$$

dove  $(\vec{v}_k - \vec{v}_G)$  rappresenta la velocità della particella  $k$ -esima nel sistema di riferimento solidale con il centro di massa.

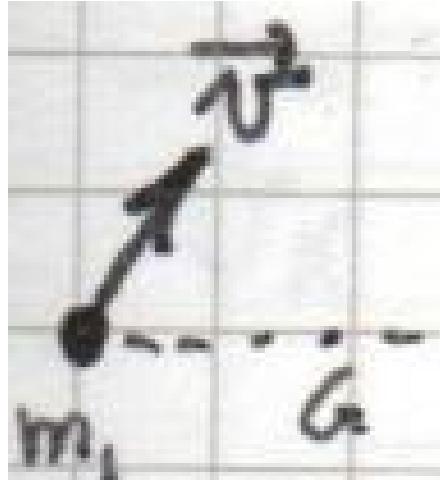


Figura 12: Due masse  $m_1$  e  $m_2$  che si muovono con velocità  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ . In questo caso  $\vec{h}_G = \vec{0}$ .

**Esempio: sistema di due particelle con velocità uguali.** Se due particelle si muovono con la stessa velocità  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$  per ogni istante  $t$ , anche il centro di massa si muove con la medesima velocità. Lo spostamento relativo delle masse rispetto a  $G$  è nullo, pertanto  $\vec{h}_G = \vec{0}$ .

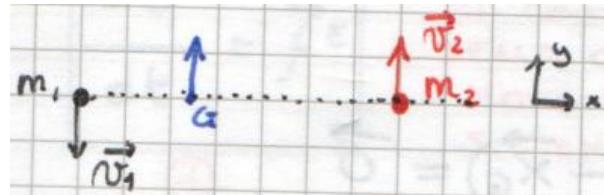


Figura 13: Due particelle con velocità  $\vec{v}_k = \alpha(\vec{x}_k - \vec{x}_G)$ . Il momento  $\vec{h}_G$  è nullo.

**Esempio: sistema di due particelle con velocità proporzionali alla distanza da  $G$ .** Se le velocità sono della forma  $\vec{v}_1 = \alpha(\vec{x}_1 - \vec{x}_G)$  e  $\vec{v}_2 = \alpha(\vec{x}_2 - \vec{x}_G)$ , il momento rispetto al centro di massa risulta:

$$\vec{h}_G = (\vec{x}_1 - \vec{x}_G) \times m_1 \alpha (\vec{x}_1 - \vec{x}_G) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_G) \times m_2 \alpha (\vec{x}_2 - \vec{x}_G) = \vec{0}, \quad (81)$$

poiché il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è nullo. In questo caso le distanze delle particelle da  $G$  non variano nel tempo.

## 7 Bilancio energetico dei sistemi particellari

Riprendendo la seconda legge di Newton per la particella  $k$ -esima e moltiplicando scalarmente per la velocità  $\vec{v}_k$ :

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k = \vec{F}_k^I \cdot \vec{v}_k + \vec{F}_k^E \cdot \vec{v}_k. \quad (82)$$

Sommando su tutte le  $N$  particelle:

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I \cdot \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E \cdot \vec{v}_k. \quad (83)$$

Si definisce l'**energia cinetica** del sistema particellare:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2, \quad \text{dove } v_k^2 = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \|\vec{v}_k\|^2. \quad (84)$$

Il primo membro dell'equazione (83) può essere riscritto come:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 \right) = \frac{d\mathcal{T}}{dt}. \quad (85)$$

Si definiscono inoltre le **potenze** sviluppate dalle forze:

$$P^I = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I \cdot \vec{v}_k \quad (\text{potenza delle forze interne}), \quad (86)$$

$$P^E = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E \cdot \vec{v}_k \quad (\text{potenza delle forze esterne}). \quad (87)$$

Il bilancio energetico diventa:

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = P^I + P^E. \quad (88)$$

**Interpretazione fisica.** La derivata temporale dell'energia cinetica di un sistema particellare è pari, istante per istante, alla potenza totale sviluppata dalle forze interne ed esterne. È fondamentale osservare che, sebbene la risultante delle forze interne sia nulla ( $\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I = \vec{0}$ ), la potenza delle forze interne **non è in generale nulla**:  $P^I \neq 0$ .

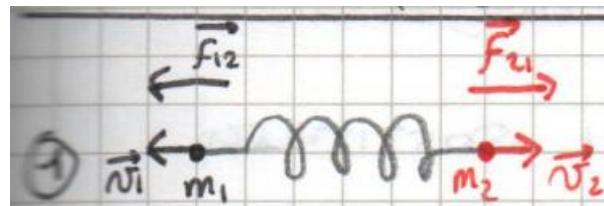


Figura 14: Due masse  $m_1$  e  $m_2$  collegate da una molla. Le forze  $\vec{F}_{12}$  e  $\vec{F}_{21}$  sono le forze elastiche interne.

**Esempio: sistema massa-molla.** Consideriamo due masse collegate da una molla. Dopo la compressione:

$$P^I = \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{12} \cdot \vec{v}_1 \neq 0. \quad (89)$$

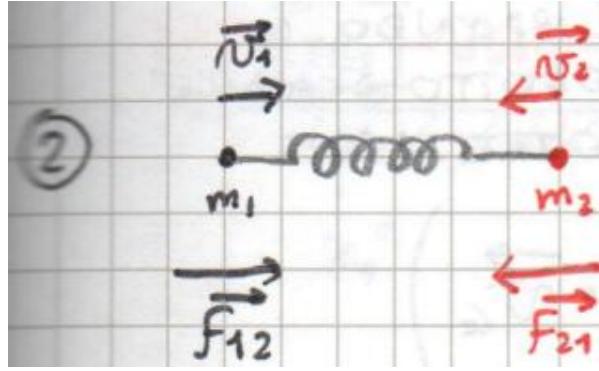


Figura 15: Sistema massa-molla dopo l'allontanamento delle masse: la potenza interna è non nulla.

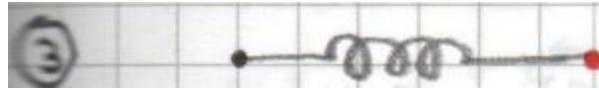


Figura 16: Sistema massa-molla all'equilibrio: velocità e forze elastiche sono nulle.

Dopo l'allontanamento delle masse, la potenza interna rimane non nulla.

Solo all'equilibrio, quando  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$  e  $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \vec{0}$ , si ha  $P^I = 0$ .

## 7.1 Lavoro e variazione di energia cinetica

Considerando uno spostamento infinitesimo  $d\vec{x}_k = \vec{v}_k dt$ , la variazione infinitesima di energia cinetica è:

$$d\mathcal{T} = d\mathcal{L}^E + d\mathcal{L}^I, \quad \text{con } \begin{cases} d\mathcal{L}^E = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^E \cdot d\vec{x}_k, \\ d\mathcal{L}^I = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^I \cdot d\vec{x}_k. \end{cases} \quad (90)$$

Integrando su un intervallo temporale finito  $[t_1, t_2]$ , durante il quale la particella  $k$ -esima percorre una traiettoria  $C_k$  dalla posizione  $\vec{x}_{1k} = \vec{x}_k(t_1)$  alla posizione  $\vec{x}_{2k} = \vec{x}_k(t_2)$ :

$$\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}^E + \mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}^I. \quad (91)$$

**Interpretazione fisica.** La variazione dell'energia cinetica di un sistema particellare in un intervallo di tempo finito è pari al lavoro complessivo compiuto da tutte le forze agenti, sia esterne che interne, durante il moto delle particelle tra le posizioni iniziali e finali.

## 8 Teorema di König

Il teorema di König fornisce una decomposizione dell'energia cinetica di un sistema particellare in due contributi distinti. Si definisce la **velocità relativa** della particella  $k$ -esima rispetto al centro di massa:

$$\vec{v}_k^r = \vec{v}_k - \vec{v}_G, \quad \text{da cui} \quad \vec{v}_k = \vec{v}_G + \vec{v}_k^r. \quad (92)$$

Sostituendo nella definizione di energia cinetica:

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k^r + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_k^r + \vec{v}_G). \quad (93)$$

Sviluppando il prodotto scalare:

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k^r)^2 + \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k^r \cdot \vec{v}_G + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_G^2. \quad (94)$$

Il termine misto si annulla per la definizione di centro di massa. Infatti:

$$\sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k^r \cdot \vec{v}_G = \vec{v}_G \cdot \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \right] = 0. \quad (95)$$

Si ottiene così il **teorema di König**:

$$\mathcal{T} = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G)^2}_{\mathcal{T}^*} + \underbrace{\frac{1}{2} M v_G^2}_{\mathcal{T}_G}. \quad (96)$$

**Interpretazione fisica.** L'energia cinetica totale di un sistema particellare si decompone in:

- $\mathcal{T}^* = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G)^2$ : energia cinetica relativa al moto delle particelle attorno al centro di massa, calcolata come se il centro di massa fosse fermo;
- $\mathcal{T}_G = \frac{1}{2} M v_G^2$ : energia cinetica associata al moto traslatorio del centro di massa, come se l'intera massa  $M$  fosse concentrata in  $G$ .

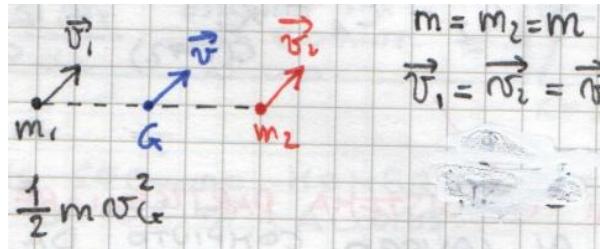


Figura 17: Due particelle con  $m_1 = m_2 = m$  e  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ . L'energia cinetica è interamente associata al moto del centro di massa.

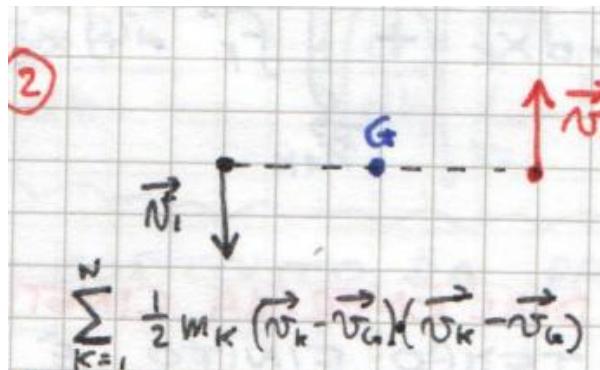


Figura 18: Due particelle con  $m_1 = m_2 = m$  e velocità opposte di uguale modulo:  $\vec{v}_G = \vec{0}$ . L'energia cinetica è interamente relativa.

**Esempi applicativi.** Lo stato cinematico di un sistema costituisce una fotografia dell'evoluzione istantanea: le posizioni e le velocità delle particelle in un dato istante, con la proprietà che la distanza tra le particelle non cambia nel tempo.

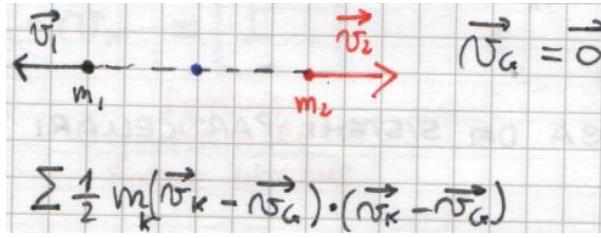
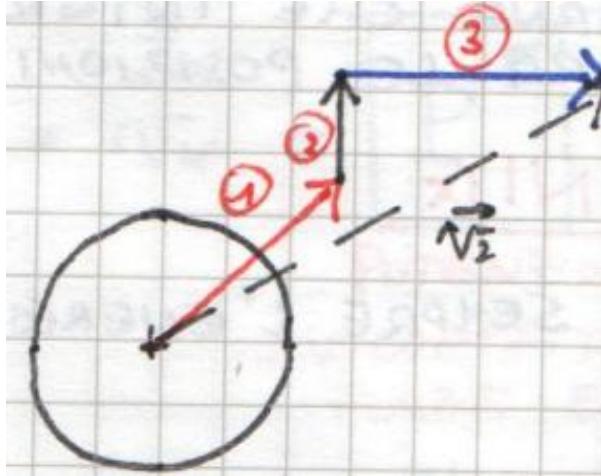
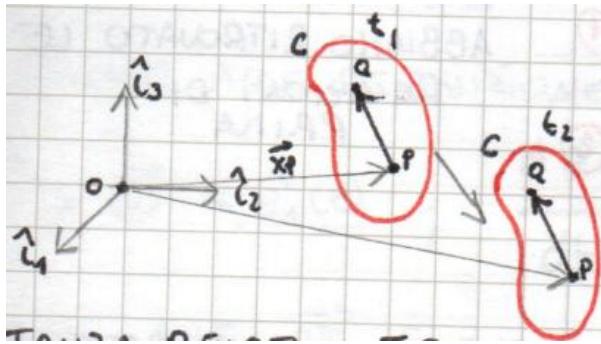
Figura 19: Caso con  $\vec{v}_G = \vec{0}$ : l'energia cinetica è data solo dal contributo relativo.

Figura 20: Ulteriore configurazione con centro di massa in quiete.

## 9 Cinematica del corpo rigido

Il **corpo rigido** è una distribuzione continua di massa costituita da punti materiali con la proprietà fondamentale che la distanza relativa tra ogni coppia di punti non varia nel tempo. Il corpo non può modificare la propria forma, ma può cambiare orientamento rispetto a un sistema di riferimento fisso nello spazio. Si parla di *sistemi rigidi* per indicare che le particelle occupano una regione dello spazio mantenendo invariate le mutue distanze. L'obiettivo è studiare l'**atto di moto rigido**.

Figura 21: Due configurazioni di un corpo rigido  $C$  agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ . Il sistema di riferimento fisso  $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  è mostrato insieme ai punti  $P$  e  $Q$  del corpo. La distanza  $|PQ|$  rimane costante nel tempo.

Considerato un sistema di riferimento fisso  $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ , all'istante  $t_1$  il corpo rigido  $C$  si trova in una data configurazione. All'istante successivo  $t_2$  il corpo occupa un'altra posizione, ma il vettore congiungente due punti qualsiasi  $P$  e  $Q$  mantiene lo stesso modulo e rimane parallelo a

se stesso. Si può scrivere:

$$\vec{x}_Q = \vec{x}_P + \vec{PQ}, \quad \text{con } \vec{x}_Q = \vec{x}_Q(t) \text{ e } \vec{x}_P = \vec{x}_P(t). \quad (97)$$

Derivando rispetto al tempo e osservando che  $\frac{d\vec{PQ}}{dt} = \vec{0}$  per la rigidità del corpo:

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{x}_Q(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}_P(t)}{dt} = \vec{v}_P, \quad \text{e analogamente} \quad \vec{a}_Q = \vec{a}_P. \quad (98)$$

**Interpretazione fisica.** Nel caso in cui tutti i punti del corpo abbiano istante per istante la stessa velocità, si parla di **moto di pura traslazione**. In questo atto di moto, ogni segmento del corpo rigido si sposta parallelamente a se stesso.

## 9.1 Moto piano

Si consideri ora un moto in cui il corpo ruota attorno a un asse perpendicolare al piano del moto. Si definiscono due sistemi di riferimento:

- $R_1(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ : sistema fisso;
- $R_2(\Omega, \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$ : sistema solidale al corpo, con origine coincidente con quella del sistema fisso,  $O \equiv \Omega$ .

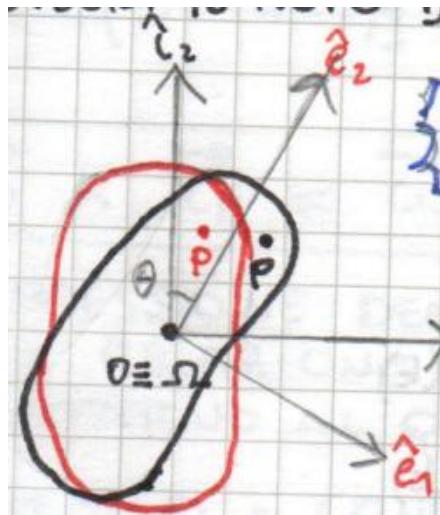


Figura 22: Corpo rigido in moto piano rotatorio. Il sistema fisso  $R_1$  e il sistema mobile  $R_2$  hanno origine comune. L'angolo  $\theta(t)$  descrive la rotazione.

In questo caso di **pura rotazione**, il sistema mobile  $R_2$  è reso solidale al corpo. La posizione di un punto  $P$  può essere espressa in entrambi i sistemi di riferimento:

$$\vec{x}_P(t) = x_1(t)\hat{i}_1 + x_2(t)\hat{i}_2 = \sum_{k=1}^2 x_k(t)\hat{i}_k, \quad (99)$$

$$\vec{y}_P(t) = y_1\hat{e}_1(t) + y_2\hat{e}_2(t) = \sum_{k=1}^2 y_k\hat{e}_k(t). \quad (100)$$

Nel primo caso le componenti  $x_k(t)$  variano nel tempo mentre i versori  $\hat{i}_k$  sono fissi. Nel secondo caso le componenti  $y_k$  sono costanti (il punto non si muove rispetto al corpo), mentre i versori  $\hat{e}_k(t)$  variano nel tempo insieme al corpo.<sup>8</sup>

La velocità del punto  $P$  si esprime come:

$$\vec{v}_P(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{dx_k(t)}{dt} \hat{i}_k = \sum_{k=1}^2 y_k \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt}. \quad (101)$$

### 9.1.1 Primo metodo: derivazione dei versori mobili

I versori del sistema mobile si esprimono nel sistema fisso come:

$$\begin{cases} \hat{e}_1(t) = \cos \theta(t) \hat{i}_1 + \sin \theta(t) \hat{i}_2, \\ \hat{e}_2(t) = -\sin \theta(t) \hat{i}_1 + \cos \theta(t) \hat{i}_2, \end{cases} \quad (102)$$

dove  $\theta(t)$  è l'angolo di rotazione.

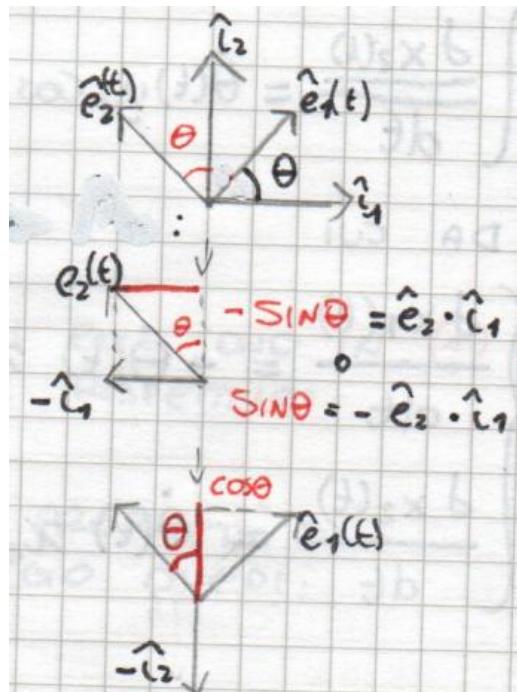


Figura 23: Rotazione del versore  $\hat{e}_1(t)$  attorno all'asse  $\hat{i}_3$ . Le componenti sono  $\cos \theta$  lungo  $\hat{i}_1$  e  $\sin \theta$  lungo  $\hat{i}_2$ .

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \left( -\sin \theta(t) \hat{i}_1 + \cos \theta(t) \hat{i}_2 \right) = \dot{\theta}(t) \hat{e}_2(t), \\ \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) \left( -\cos \theta(t) \hat{i}_1 - \sin \theta(t) \hat{i}_2 \right) = -\dot{\theta}(t) \hat{e}_1(t). \end{cases} \quad (103)$$

Si introduce il **vettore velocità angolare**, diretto lungo l'asse di rotazione con modulo pari alla derivata temporale dell'angolo:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{i}_3. \quad (104)$$

<sup>8</sup>Questa distinzione è fondamentale: nel sistema fisso variano le coordinate, nel sistema solidale variano i versori.

Si verifica immediatamente che:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_2 = \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt}, \\ \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\dot{\theta} \hat{e}_1 = \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt}, \\ \vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \vec{0}. \end{cases} \quad (105)$$

In generale, le **formule di Poisson** esprimono la derivata temporale dei versori mobili:

$$\frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k(t). \quad (106)$$

**Interpretazione fisica.** Le formule di Poisson affermano che la derivata temporale di ogni versore del sistema mobile è data dal prodotto vettoriale tra la velocità angolare e il versore stesso. Questo risultato è fondamentale per esprimere le velocità in un sistema rotante.

### 9.1.2 Secondo metodo: trasformazione di coordinate

Moltiplicando scalarmente l'equazione  $\vec{x}_P = \vec{y}_P$  per i versori  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$ , si ottengono le relazioni tra le coordinate:

$$x_1(t) = y_1 \cos \theta(t) - y_2 \sin \theta(t), \quad (107)$$

$$x_2(t) = y_1 \sin \theta(t) + y_2 \cos \theta(t). \quad (108)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) [y_1 \sin \theta(t) + y_2 \cos \theta(t)] = -\dot{\theta}(t) x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) [y_1 \cos \theta(t) - y_2 \sin \theta(t)] = \dot{\theta}(t) x_1(t). \end{cases} \quad (109)$$

## 9.2 Velocità nel moto rotatorio piano

Utilizzando le formule di Poisson nella (101):

$$\vec{v}_P = y_1 \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} + y_2 \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = y_1 (\vec{\omega} \times \hat{e}_1) + y_2 (\vec{\omega} \times \hat{e}_2). \quad (110)$$

Applicando la proprietà distributiva del prodotto vettoriale e portando fuori  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (y_1 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2) = \vec{\omega} \times \vec{y}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P. \quad (111)$$

**Interpretazione fisica.** L'espressione  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P$  è valida per un atto di moto rigido rotatorio piano quando l'origine del sistema di riferimento fisso coincide con il centro di rotazione. La velocità è perpendicolare al raggio vettore e ha modulo  $|\vec{v}_P| = \omega |\vec{x}_P|$ .

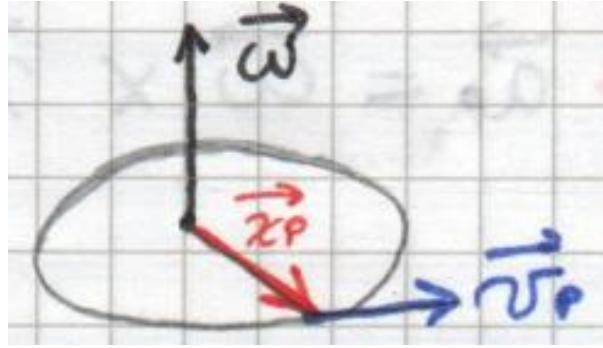


Figura 24: Velocità  $\vec{v}_P$  di un punto  $P$  in moto rotatorio piano. Il vettore velocità è perpendicolare sia a  $\vec{\omega}$  che a  $\vec{x}_P$ .

### 9.3 Accelerazione nel moto rotatorio piano

Derivando la velocità  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P$  rispetto al tempo:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times \vec{v}_P. \quad (112)$$

Sostituendo  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P$ :

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P). \quad (113)$$

Utilizzando la formula del doppio prodotto vettoriale,  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ :

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{x}_P) - \vec{x}_P(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}). \quad (114)$$

Nel moto piano,  $\vec{\omega} \perp \vec{x}_P$ , quindi  $\vec{\omega} \cdot \vec{x}_P = 0$  e:

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_P - \omega^2 \vec{x}_P. \quad (115)$$

**Interpretazione fisica.** L'accelerazione si decompone in due contributi:

- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_P$ : **accelerazione tangenziale**, dovuta alla variazione del modulo della velocità angolare;
- $-\omega^2 \vec{x}_P$ : **accelerazione normale centripeta**, diretta verso il centro di rotazione, con modulo proporzionale alla distanza dal centro e al quadrato della velocità angolare.

## 10 Moto generico di rototraslazione

Nel caso generale, un corpo rigido  $C$  si muove nello spazio con un **moto rototraslatorio**, combinazione di rotazione e traslazione. Si definiscono:

- $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ : sistema di riferimento fisso;
- $R'(\Omega, \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$ : sistema solidale al corpo rigido.

La posizione di un generico punto  $P$  del corpo è:

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t), \quad (116)$$

dove  $\vec{r}_\Omega(t)$  è la posizione dell'origine del sistema mobile (che varia nel tempo) e  $\vec{y}_P(t)$  è la posizione di  $P$  rispetto al sistema mobile (le cui componenti sono costanti, ma la cui direzione varia con la rotazione del corpo).

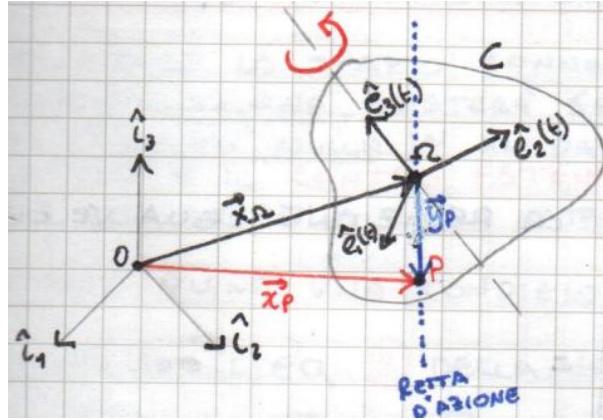


Figura 25: Moto di rototraslazione di un corpo rigido  $C$ . Sistema fisso  $R(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  e sistema mobile  $R'(\Omega, \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$  solidale al corpo.

## 10.1 Distribuzione delle velocità

Derivando la (116) e applicando le formule di Poisson:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 y_k \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times \vec{y}_P. \quad (117)$$

Poiché  $\vec{y}_P = \vec{r}_P - \vec{r}_\Omega$ , l'espressione generale della distribuzione di velocità è:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega). \quad (118)$$

Il punto  $\Omega$  è detto **polo cinematico** e può essere scelto arbitrariamente.

## 10.2 Distribuzione delle accelerazioni

Derivando la (118):

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_\Omega). \quad (119)$$

Sostituendo  $\vec{v}_P - \vec{v}_\Omega = \vec{\omega} \times \vec{y}_P$ :

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_P). \quad (120)$$

Utilizzando il doppio prodotto vettoriale e decomponendo  $\vec{y}_P = \vec{y}_P^{(N)} + \vec{y}_P^{(P)}$  nelle componenti normale e parallela a  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}_P - \omega^2 \vec{y}_P^{(N)}. \quad (121)$$

Nel caso piano,  $\vec{y}_P^{(P)} = \vec{0}$  e  $\vec{y}_P^{(N)} \equiv \vec{y}_P$ .

**Interpretazione fisica.** La configurazione di un corpo rigido nello spazio tridimensionale richiede la conoscenza di sei parametri: tre per la posizione di un punto (ad esempio il polo  $\Omega$ ) e tre per l'orientamento (ad esempio gli angoli di Eulero). Il corpo rigido ha quindi **sei gradi di libertà**.

### 10.3 Centro istantaneo di rotazione

Nello spazio connesso a un corpo rigido in moto rototraslatorio, esiste sempre un punto caratterizzato dall'aver velocità nulla in un dato istante. Tale punto è il **centro istantaneo di rotazione** (CIR) e può trovarsi a distanza finita o infinita dal corpo; la sua posizione varia istante per istante.

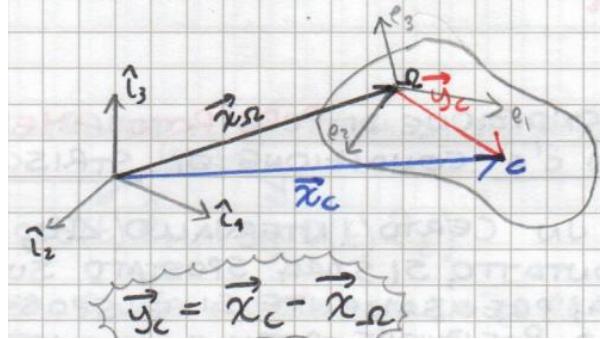


Figura 26: Centro istantaneo di rotazione (CIR). Il punto  $C$  ha velocità nulla:  $\vec{v}_C = \vec{0}$ .

Indicando con  $\vec{x}_C$  la posizione del CIR, la condizione  $\vec{v}_C = \vec{0}$  impone:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{x}_C - \vec{x}_\Omega) = \vec{0}. \quad (122)$$

Nel caso di moto piano, si riscrive l'equazione della velocità del centro istantaneo di rotazione (CIR) moltiplicando vettorialmente per  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_C(t) = \vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{x}_C(t) - \vec{x}_\Omega(t))] = \vec{0}. \quad (123)$$

Posto  $\vec{y}_C = \vec{x}_C - \vec{x}_\Omega$ , il termine  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_C)$  rappresenta un doppio prodotto vettoriale che si sviluppa come:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_C) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{y}_C) - \vec{y}_C(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{y}_C) - \omega^2 \vec{y}_C. \quad (124)$$

Si esprime  $\vec{y}_C$  nelle sue componenti parallela e normale rispetto a  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{y}_C(t) = \vec{y}_C^{(P)}(t) + \vec{y}_C^{(N)}(t). \quad (125)$$

Nel caso piano, la componente parallela è nulla,  $\vec{y}_C^{(P)} = \vec{0}$ , poiché  $\vec{\omega}$  è perpendicolare al piano del moto. Sostituendo e osservando che  $\vec{\omega} \cdot \vec{y}_C^{(N)} = 0$ :

$$\vec{\omega}[\vec{\omega} \cdot (\vec{y}_C^{(P)} + \vec{y}_C^{(N)})] - \omega^2(\vec{y}_C^{(P)} + \vec{y}_C^{(N)}) = \omega^2 \vec{y}_C^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_C^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_C^{(N)} = -\omega^2 \vec{y}_C^{(N)}. \quad (126)$$

Definendo  $\Omega \vec{C}^{(N)} = \vec{y}_C^{(N)}$ , l'equazione (123) diventa:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega(t) - \omega^2 \Omega \vec{C}^{(N)} = \vec{0}, \quad (127)$$

da cui si ricava l'**espressione generale per la posizione del CIR** rispetto al polo cinematico:

$$\Omega \vec{C}^{(N)} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega(t)}{\omega^2}. \quad (128)$$

Nel caso di moto piano si ha  $\Omega \vec{C}^{(N)} = \Omega \vec{C}$ , poiché il vettore giace interamente nel piano del moto.

**Interpretazione fisica.** Il CIR rappresenta, istante per istante, il punto attorno al quale il corpo rigido sta ruotando. In questa espressione:  $\Omega$  è il polo cinematico (scelto arbitrariamente),  $\vec{v}_\Omega$  è la velocità del polo cinematico, e  $\vec{\Omega}C$  è il vettore che congiunge il polo  $\Omega$  al CIR.

## 10.4 Posizione del CIR nel sistema di riferimento fisso

Si può esprimere la posizione del CIR direttamente nel sistema di riferimento fisso:

$$\vec{x}_C(t) = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2}, \quad (129)$$

dove  $O$  indica l'origine del sistema fisso (o un punto di riferimento noto).

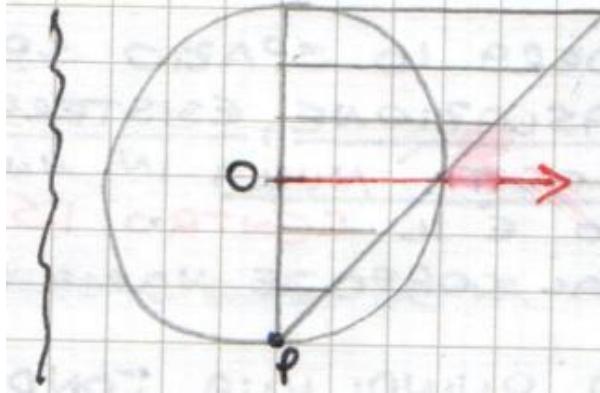


Figura 27: Ruota in rotolamento su piano orizzontale. Il punto di contatto  $P$  è il CIR: la ruota non ruota attorno al centro geometrico  $O$ , bensì attorno al punto di contatto.

## 11 Moto di puro rotolamento: ruota ideale

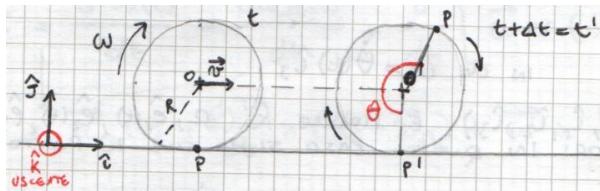


Figura 28: Ruota ideale agli istanti  $t$  e  $t' = t + \Delta t$ . Il punto di contatto  $P$  si sposta in  $P'$ , e l'arco  $PP'$  sulla circonferenza eguaglia lo spostamento lineare del centro.

La **ruota ideale** è caratterizzata dalle seguenti proprietà: è indeformabile, inestensibile, e il contatto con il piano orizzontale avviene in un unico punto. La **condizione di puro rotolamento** è un caso particolare di moto rototraslatorio in cui non vi è strisciamento tra la ruota e il piano di appoggio.

Dopo un intervallo  $\Delta t$ , il punto materiale che nell'istante  $t$  era il punto di contatto si è spostato su un'altra posizione. L'arco di cerchio percorso sulla circonferenza eguaglia lo spostamento lineare del centro:

$$\|OO'\| = \widehat{PP'} = \theta R. \quad (130)$$

Ipotizzando  $\vec{v}_O = \text{costante}$  (moto stazionario):

$$v_O \Delta t = \omega R \Delta t \Rightarrow v_O = \omega R. \quad (131)$$

### 11.1 Calcolo della posizione del CIR per la ruota

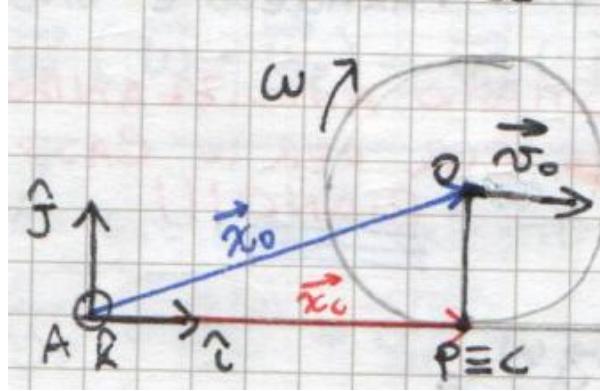


Figura 29: Schema per il calcolo del CIR della ruota. Il polo cinematico è scelto nel centro geometrico  $O$ .

Dato il sistema di riferimento  $R(A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , si sceglie come polo cinematico il centro geometrico della ruota,  $\Omega \equiv O$ . Applicando la formula (128):

$$\vec{OC} = \frac{1}{\omega^2} (-\omega \hat{k} \times v_O \hat{i}) = -\frac{v_O}{\omega} \hat{j}. \quad (132)$$

Poiché  $v_O = \omega R$ , si ottiene  $\vec{OC} = -R \hat{j}$ , confermando che il CIR si trova nel punto di contatto con il suolo.

Utilizzando la formula (129) nel sistema di riferimento fisso, con  $\vec{x}_O = v_O t \hat{i} + R \hat{j}$ :

$$\vec{x}_C = v_O t \hat{i} + R \hat{j} - R \hat{j} = v_O t \hat{i}. \quad (133)$$

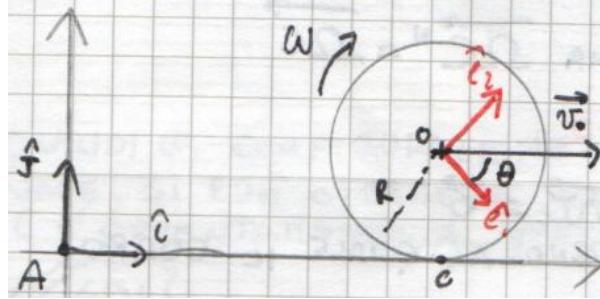


Figura 30: Posizione del CIR nel sistema di riferimento mobile solidale alla ruota.

Nel sistema di riferimento mobile  $R'(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  solidale alla ruota:

$$\vec{x}_C = \frac{v_O}{\omega} (\sin \theta(t) \hat{e}_1 - \cos \theta(t) \hat{e}_2) = R (\sin \theta(t) \hat{e}_1 - \cos \theta(t) \hat{e}_2). \quad (134)$$

**Interpretazione fisica.** Nonostante la posizione del CIR nello spazio sia invariante (il punto di contatto con il suolo), la sua rappresentazione in sistemi di riferimento diversi permette di determinare il **luogo dei punti** occupati dal CIR durante il moto.

## 11.2 Polari del moto: base e rulletta

**Polare fissa (base).** Il luogo dei punti occupati dal CIR, espresso nel sistema di riferimento fisso, è la **polare fissa o base**:

$$\vec{x}_C = v_O t \hat{i}. \quad (135)$$

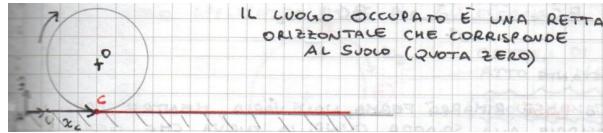


Figura 31: Polare fissa (base): retta orizzontale corrispondente al suolo.

Il luogo è una retta orizzontale coincidente con il piano di appoggio (quota zero).

**Polare mobile (rulletta).** Il luogo dei punti occupati dal CIR, espresso nel sistema di riferimento mobile, è la **polare mobile o rulletta**:

$$\vec{x}_C = R (\sin \theta(t) \hat{e}_1 - \cos \theta(t) \hat{e}_2). \quad (136)$$

La curva descritta è una circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $O$ .<sup>9</sup>

## 11.3 Condizioni di rotolamento e strisciamento

Si distinguono tre casi in base al rapporto tra  $v_O$  e  $\omega R$ :

**Caso  $v_O = \omega R$ : puro rotolamento.** La ruota ruota attorno al punto di contatto, che è istantaneamente fermo. Il CIR coincide con il punto di contatto.

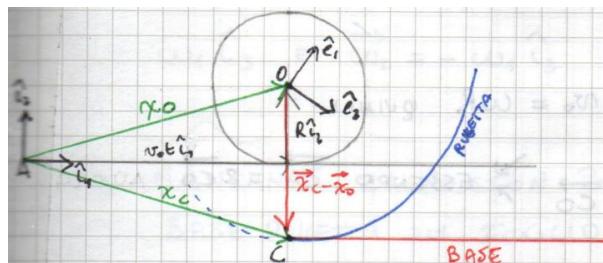


Figura 32: Caso di strisciamento ( $v_O > \omega R$ ): il CIR si trova al di sotto del punto di contatto.

**Caso  $v_O > \omega R$ : strisciamento (acquaplaning).** Il CIR si trova al di sotto del sistema (sotto il piano di appoggio). Non vi è puro rotolamento: la ruota scivola sul piano. Nel sistema fisso:

$$\vec{x}_C(t) = v_O t \hat{i} + \left( R - \frac{v_O}{\omega} \right) \hat{j}. \quad (137)$$

**Caso  $v_O < \omega R$ : strisciamento inverso.** Il CIR si trova al di sopra del centro della ruota. Anche in questo caso non vi è puro rotolamento.

<sup>9</sup>È possibile riprodurre qualsiasi moto rigido piano facendo rotolare la rulletta sulla base, proprietà nota come *teorema di Moysi* per i moti piani.

## 12 Moto rigido di un'asta vincolata

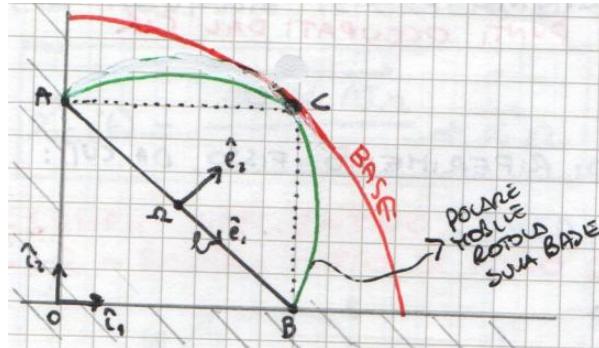


Figura 33: Asta rigida  $AB$  vincolata a scorrere su due guide. Il CIR si trova all'intersezione delle perpendicolari alle velocità dei punti  $A$  e  $B$ .

Conoscendo la velocità di due punti  $A$  e  $B$  del corpo rigido, si può calcolare il CIR usando entrambi come polo:

$$\vec{AC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}, \quad \vec{BC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_B}{\omega^2}. \quad (138)$$

Geometricamente,  $\vec{AC} \perp \vec{v}_A$  e  $\vec{BC} \perp \vec{v}_B$ .

### 12.1 Metodo grafico per la determinazione del CIR

Un metodo più semplice rispetto al calcolo analitico è il **metodo grafico**:

1. Si conoscono le direzioni delle velocità di almeno due punti del corpo.
2. Si tracciano le rette perpendicolari a tali velocità.
3. L'intersezione delle perpendicolari individua il CIR.

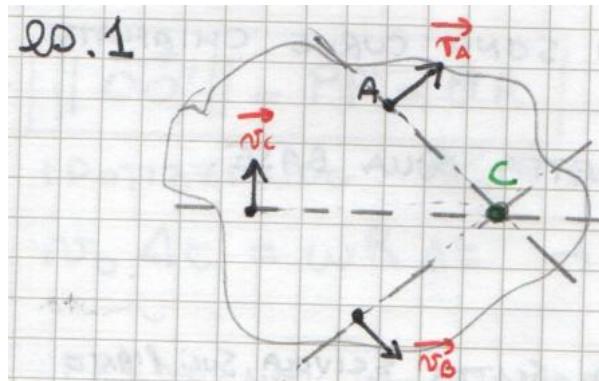


Figura 34: Caso generale: le perpendicolari alle velocità si intersecano in un punto  $C$  a distanza finita.

**Esempio applicativo.** Per una ruota in puro rotolamento con CIR nel punto di contatto  $C$ :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{CA}. \quad (139)$$

Essendo  $\vec{CA} = 2\vec{CO}$  (per un punto  $A$  sul diametro opposto al contatto):

$$\vec{v}_A = 2\vec{v}_O. \quad (140)$$

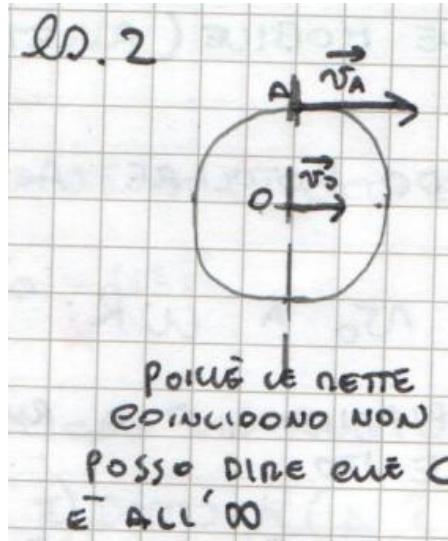


Figura 35: Caso degenere: le perpendicolari coincidono. Non è possibile concludere che il CIR sia all'infinito senza ulteriori informazioni.

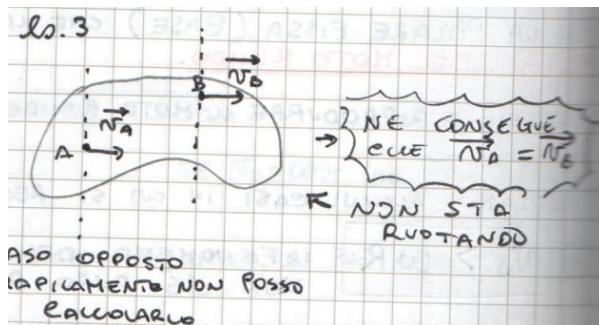


Figura 36: Caso di pura traslazione: le perpendicolari sono parallele, quindi  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$  e il corpo non sta ruotando.

### 13 Funi e pulegge

Una **fune ideale** avvolta su una **ruota ideale** è caratterizzata da inestensibilità e assenza di strisciamento. La velocità tangenziale è costante lungo la fune:

$$\dot{s}_P = \text{costante} \Rightarrow \dot{\theta} = \text{costante}. \quad (141)$$

Un punto qualsiasi percorre tratti uguali della traiettoria in tempi uguali.

**Sistema di pulegge collegate.** Per due ruote collegate da una cinghia inestensibile, la velocità del punto di contatto sulla prima ruota è:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = -\omega_1 \hat{k} \times R \hat{j} = \omega_1 R \hat{i}. \quad (142)$$

Sulla seconda ruota, con CIR in  $B$ :

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_2 \times \vec{BC} = \omega_2 \hat{k} \times R \hat{j} = -\omega_2 R \hat{i}. \quad (143)$$

L'onestensibilità della cinghia impone  $\vec{v}_A = \vec{v}_C$ , da cui:

$$\omega_1 R = -\omega_2 R \Rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \quad (\text{in modulo}). \quad (144)$$

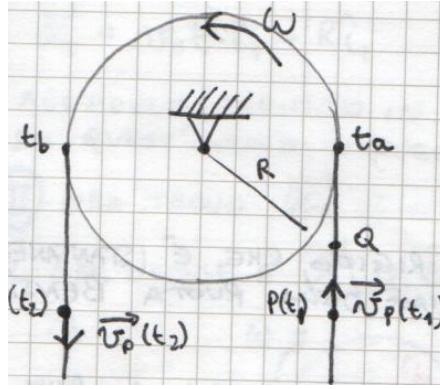


Figura 37: Puleggia di raggio  $R$  con fune avvolta. La condizione di inestensibilità implica velocità tangenziale costante lungo la fune.

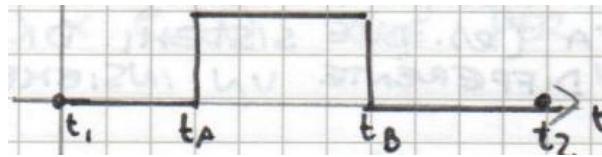


Figura 38: Diagramma dell'accelerazione: nei tratti rettilinei ( $t_1, t_2$ ) l'accelerazione è nulla; nei tratti curvi ( $t_A, t_B$ ) compare l'accelerazione centripeta.

Le due ruote hanno quindi velocità angolari uguali in modulo ma di verso opposto.<sup>10</sup>

### 13.1 Dimostrazione della polare fissa

Nel sistema di riferimento fisso, con  $\vec{x}_O = x_O \hat{i} + R \hat{j}$  e  $\vec{\omega} = -\omega \hat{k}$ :

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \vec{CO} = -\omega \hat{k} \times R \hat{j} = \omega R \hat{i}. \quad (145)$$

Applicando la formula del CIR:

$$\vec{x}_C = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} = x_O \hat{i} + R \hat{j} + \frac{-\omega^2 R \hat{j}}{\omega^2} = x_O \hat{i}. \quad (146)$$

La polare fissa è quindi la retta  $\vec{x}_C = x_O(t) \hat{i}$ , coincidente con il piano di appoggio.

Nel sistema di riferimento solidale alla ruota, la posizione del CIR si esprime come:

$$\vec{x}_C = \vec{x}_O + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2}, \quad (147)$$

dove tutti i termini vanno espressi nel sistema di riferimento solidale. Con  $\vec{x}_O = \vec{0}$  (origine nel centro della ruota),  $\vec{\omega} = -\dot{\theta} \hat{e}_3 = -\omega \hat{e}_3$ , e  $\vec{v}_O = v_O \cos \theta \hat{e}_1 + v_O \sin \theta \hat{e}_2$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \vec{x}_C &= \frac{1}{\omega^2} [-\omega \hat{e}_3 \times (v_O \cos \theta \hat{e}_1 + v_O \sin \theta \hat{e}_2)] \\ &= \frac{1}{\omega^2} [-v_O \omega \cos \theta \hat{e}_2 + v_O \omega \sin \theta \hat{e}_1] \\ &= -\frac{v_O}{\omega} [\cos \theta \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_1] = -R [\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2]. \end{aligned} \quad (148)$$

Il luogo dei punti è una circonferenza di raggio  $R$  centrata nell'origine del sistema mobile. Il segno negativo indica che la rotazione avviene in senso orario.

<sup>10</sup>Il segno negativo indica che le ruote ruotano in versi opposti, come atteso per una cinghia non incrociata.

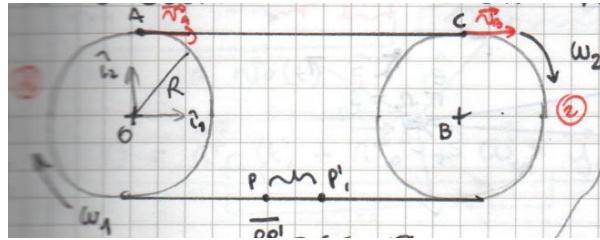


Figura 39: Due ruote collegate da una cinghia. Il tratto di cinghia tra le ruote costituisce un corpo rigido con  $\vec{P}P' = \text{costante}$ .

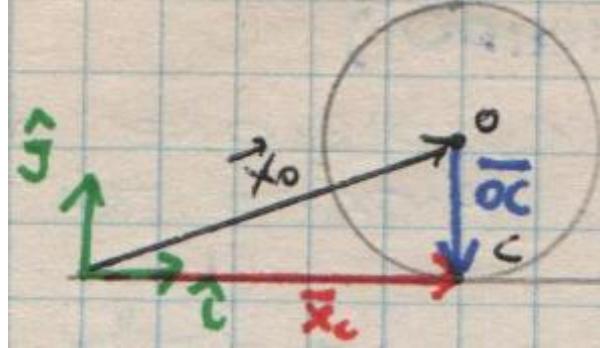


Figura 40: Schema per la dimostrazione della polare fissa.

### Casi particolari.

- Se  $v_O < \omega R$ : la polare mobile è una circonferenza di raggio  $R > v_O/\omega$ . Il rotolamento avviene come su un cerchio di raggio più piccolo.
- Se  $v_O > \omega R$ : si ha strisciamento, con  $R < v_O/\omega$ . Il rotolamento puro avverrebbe su un disco di raggio maggiore.

## 14 CIR, base e roulette di una ruota

Si definisce **condizione di puro rotolamento** il caso in cui il CIR coincide con il punto di contatto tra il corpo (ruota, cilindro o sfera) e il piano:

$$\vec{v}_C = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad C \text{ è il CIR.} \quad (149)$$

Nel caso bidimensionale, la velocità del centro  $O$  si calcola come:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CO} = \vec{\omega} \times \vec{CO} = -\omega \hat{k} \times R \hat{j} = \omega R \hat{i}. \quad (150)$$

La condizione di puro rotolamento richiede quindi:

$$v_O = \omega R \quad (\text{in modulo}). \quad (151)$$

**Interpretazione fisica.** Nel puro rotolamento, dopo un intervallo  $\Delta t$  la ruota ha percorso esattamente un arco  $s = R\theta$ . Per un punto  $D$  diametralmente opposto al contatto:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CD} = \vec{\omega} \times \vec{CD} = -\omega \hat{k} \times 2R \hat{j} = 2\omega R \hat{i}. \quad (152)$$

I punti lungo l'asse verticale passante per il centro hanno velocità linearmente crescente con la distanza dal punto di contatto.

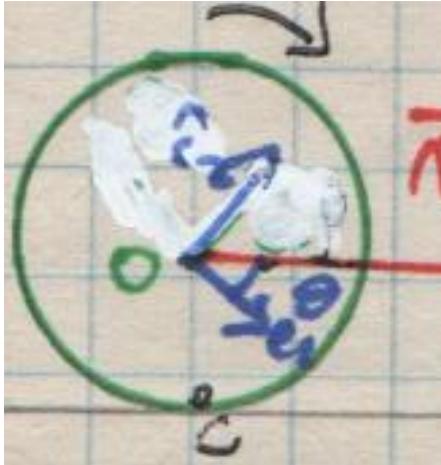


Figura 41: Schema per la dimostrazione della polare mobile (rulletta).

### 14.1 Polare mobile e polare fissa

È possibile individuare due curve nello spazio, definite come il luogo dei punti occupati dal CIR durante il moto:

- **Base** (polare fissa): luogo dei CIR nel riferimento fisso;
- **Rulletta** (polare mobile): luogo dei CIR nel riferimento solidale al corpo.

Queste curve descrivono il moto del CIR e permettono di rappresentare il moto del corpo come puro rotolamento della rulletta sulla base.

## 15 Formule di Poisson tridimensionali

Passando dal moto piano al moto tridimensionale, si considera il **moto sferico**: un moto rigido attorno a un punto fisso. Qualsiasi moto sferico può essere descritto come una sequenza di rotazioni attorno a un asse passante per il centro, con direzione variabile nel tempo.

La velocità di un punto  $P$  rimane:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}, \quad \text{con } \vec{QP} = \vec{x}_P - \vec{x}_Q, \quad (153)$$

ma ora la velocità angolare ha tre componenti:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3. \quad (154)$$

### 15.1 Derivazione delle formule di Poisson 3D

Per derivare le formule di Poisson nel caso tridimensionale, si parte dalla derivata dei versori  $\hat{e}_k$  proiettata sui tre assi:

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \left( \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_1 \right) \hat{e}_1 + \left( \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_2 \right) \hat{e}_2 + \left( \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_3 \right) \hat{e}_3, \quad k = 1, 2, 3. \quad (155)$$

I termini tra parentesi sono le componenti nella terna mobile delle derivate dei versori. In apparenza, le derivate dipendono da 9 componenti scalari. Tuttavia, dalla condizione di ortonormalità

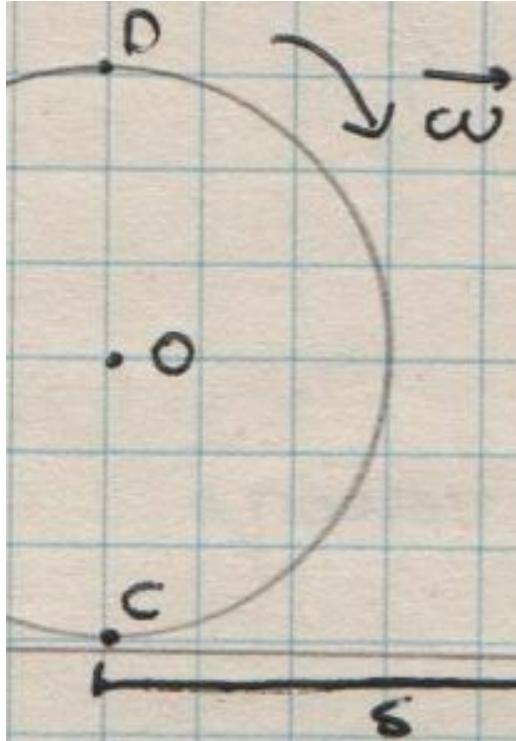


Figura 42: Ruota in rotolamento su piano orizzontale. Il centro è indicato con  $O$ , il punto di contatto con  $C$ . La velocità angolare  $\vec{\omega}$  è perpendicolare al piano.

$\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j = \delta_{kj}$ , derivando:

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j) = \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_j + \frac{d\hat{e}_j}{dt} \cdot \hat{e}_k = 0. \quad (156)$$

Per  $k = j$ :  $2\frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_k = 0$ , quindi le componenti diagonali sono nulle.

Per  $k \neq j$ :  $\frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_j = -\frac{d\hat{e}_j}{dt} \cdot \hat{e}_k$ , quindi le componenti sono antisimmetriche.

Le derivate dei versori dipendono quindi da sole 3 componenti scalari indipendenti.

Considerando la rotazione di ciascun asse, si ottiene ad esempio per  $\hat{e}_2$ :

$$\hat{e}_2 = \cos \theta_1 \hat{j} + \sin \theta_1 \hat{k}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \dot{\theta}_1 \hat{e}_3 = \omega_1 \hat{e}_3. \quad (157)$$

Procedendo analogamente per tutti i versori:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \omega_3 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_3, \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\omega_3 \hat{e}_1 + \omega_1 \hat{e}_3, \quad \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2 \hat{e}_1 - \omega_1 \hat{e}_2. \quad (158)$$

Verificando mediante il prodotto vettoriale con  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ :

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_3 = \frac{d\hat{e}_1}{dt}. \quad (159)$$

Le **formule di Poisson tridimensionali** sono quindi:

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (160)$$

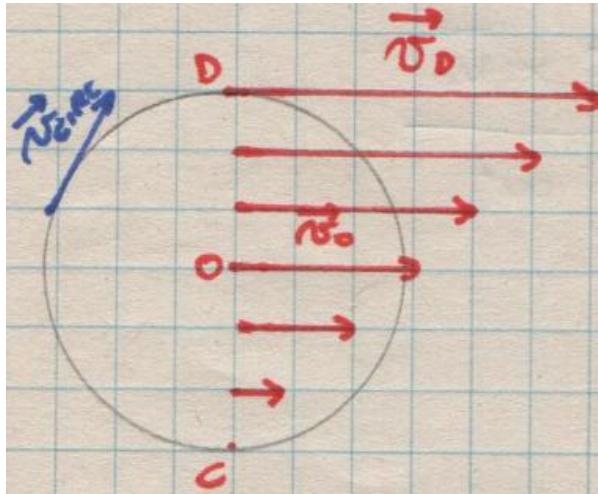


Figura 43: Distribuzione delle velocità sulla ruota: i punti lungo l'asse  $CD$  hanno velocità crescente allontanandosi dal punto di contatto.

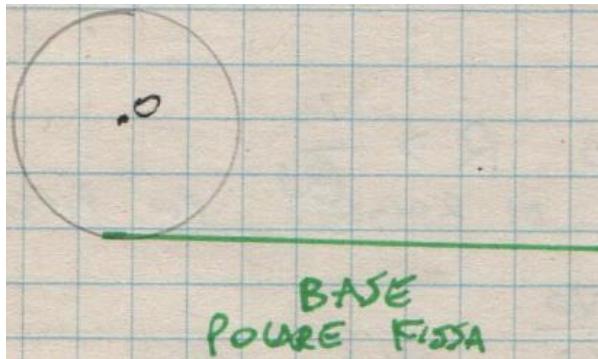


Figura 44: Base (polare fissa): retta orizzontale corrispondente al piano di appoggio.

**Espressione inversa per  $\vec{\omega}$ .** Premoltiplicando vettorialmente per  $\hat{e}_k$  e sommando:

$$\sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times \frac{d\hat{e}_k}{dt} = \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_k) = \sum_{k=1}^3 [\vec{\omega}(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_k) - \hat{e}_k(\hat{e}_k \cdot \vec{\omega})] = 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}. \quad (161)$$

Quindi:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times \frac{d\hat{e}_k}{dt}. \quad (162)$$

## 16 Meccanica relativa: sistemi non inerziali

Lo scopo della teoria dei moti relativi è determinare la relazione tra due diversi punti di vista, rappresentati da due sistemi di riferimento che osservano il moto di un punto in maniera differente.

Si definiscono:

- $R_a$ : sistema di riferimento **fisso** o **assoluto**;
- $R_r$  (o  $R_m$ ): sistema di riferimento **mobile** o **relativo**;
- $P$ : punto materiale il cui moto è indipendente dal moto dell'osservatore.

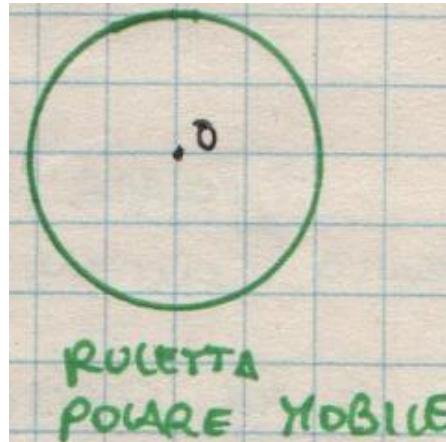


Figura 45: Rulletta (polare mobile): circonferenza di raggio  $R$  centrata nel centro della ruota.

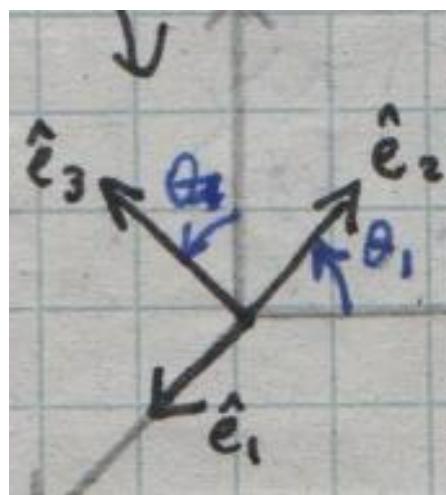


Figura 46: Sistema di riferimento fisso e rotante in 3D. L'angolo  $\theta$  rappresenta la rotazione attorno a un asse.

## 16.1 Cinematica relativa

**Posizione assoluta.** La posizione di  $P$  nel sistema assoluto è:

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 y_{Pk}(t) \hat{e}_k(t), \quad (163)$$

dove  $\vec{y}_P(t)$  è il vettore posizione relativa, con componenti  $y_{Pk}(t)$  dipendenti dal tempo (poiché  $P$  non è solidale con  $R_r$ ) e versori  $\hat{e}_k(t)$  anch'essi tempo-dipendenti.

**Velocità assoluta.** Derivando la posizione:

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{Pk}(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 y_{Pk}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} \\ &= \vec{v}_\Omega(t) + \vec{v}_P^r + \vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P(t). \end{aligned} \quad (164)$$

Si definiscono:

- **Velocità relativa:**  $\vec{v}_P^r = \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{Pk}(t) \hat{e}_k(t)$  velocità di  $P$  osservata dal sistema mobile;

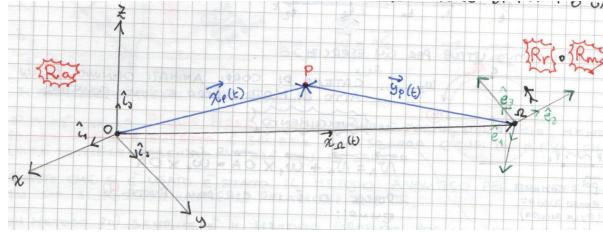


Figura 47: Sistemi di riferimento assoluto  $R_a(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  e relativo  $R_r(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ . Il punto  $P$  è osservato da entrambi.

- **Velocità di trascinamento:**  $\vec{v}_P^{tr} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P$  velocità del punto geometrico di  $R_r$  occupato da  $P$  nell'istante  $t$ .

La velocità assoluta si scrive quindi:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{tr} + \vec{v}_P^r. \quad (165)$$

**Interpretazione fisica.** La velocità di un punto materiale rispetto al sistema assoluto è la somma della velocità rispetto al riferimento relativo e della velocità del punto dello spazio connesso a  $R_r$  rispetto a  $R_a$ .

## 16.2 Accelerazione assoluta

Derivando la velocità e applicando le formule di Poisson, dopo sviluppi algebrici si ottiene:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{tr} \times \vec{y}_P + \vec{\omega}_{tr} \times (\vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P) + 2(\vec{\omega}_{tr} \times \vec{v}_P^r) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{Pk}(t) \hat{e}_k(t). \quad (166)$$

I termini si identificano come:

- **Accelerazione di trascinamento:**

$$\vec{a}_P^{tr} = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{tr} \times \vec{y}_P + \vec{\omega}_{tr} \times (\vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P); \quad (167)$$

- **Accelerazione relativa:**

$$\vec{a}_P^r = \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{Pk}(t) \hat{e}_k(t) = \ddot{\vec{y}}_P; \quad (168)$$

- **Accelerazione di Coriolis** (o complementare):

$$\vec{a}_P^c = 2(\vec{\omega}_{tr} \times \vec{v}_P^r). \quad (169)$$

L'accelerazione assoluta è quindi:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{tr} + \vec{a}_P^r + \vec{a}_P^c. \quad (170)$$

**Interpretazione fisica.** L'accelerazione di Coriolis esiste solo se il punto ha velocità relativa non nulla e non parallela a  $\vec{\omega}_{tr}$ . È responsabile, ad esempio, della deviazione dei corpi in caduta sulla Terra rotante.

### 16.3 Relazione tra velocità angolari

Per un corpo  $C$  in moto osservato da entrambi i sistemi, le velocità angolari soddisfano:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{tr}, \quad (171)$$

relazione analoga a quella per le velocità lineari.

## 17 Dinamica relativa: le forze apparenti

In un sistema inerziale  $R_i$ , la dinamica di un punto  $P$  è descritta dalla seconda legge di Newton:

$$m\vec{a}_{P_a} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (172)$$

Osservando da un sistema non inerziale  $R_r$ , si deve considerare la relazione tra accelerazione assoluta e relativa:

$$m(\vec{a}_P^{tr} + \vec{a}_P^r + \vec{a}_P^c) = \vec{F} + \vec{R}. \quad (173)$$

Riscrivendo:

$$m\vec{a}_P^r = \vec{F} + \vec{R} - m\vec{a}_P^{tr} - m\vec{a}_P^c = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{app}, \quad (174)$$

dove le **forze apparenti** sono:

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_P^{tr} - m\vec{a}_P^c. \quad (175)$$

**Interpretazione fisica.** Le forze apparenti non esistono come interazioni fisiche, ma giustificano la dinamica osservata da un riferimento non inerziale. Sono di natura inerziale, proporzionali alla massa:

- $-m\vec{a}_P^{tr}$ : legata all'atto di moto rigido dello spazio descritto da  $R_r$ ;
- $-m\vec{a}_P^c$ : presente solo se  $P$  è in moto rispetto a  $R_r$  e  $\vec{\omega}_{tr} \neq \vec{0}$ .

**Esempio.** In un'automobile in curva, sul corpo di un passeggero vincolato al sedile nasce una forza vincolare che lo mantiene sulla traiettoria curva. Non esiste una forza che “schiaccia” il passeggero verso l'esterno: è l'inerzia del corpo a mantenere il suo stato di moto rettilineo uniforme.

## 18 Derivata di un vettore in sistemi di riferimento mobili

Si considera un vettore generico  $\vec{n}(t)$  tempo-variante, non necessariamente legato a grandezze cinematiche come posizione o velocità. L'obiettivo è determinare la relazione tra la derivata temporale di  $\vec{n}$  calcolata nel sistema di riferimento assoluto  $R_a$  e quella calcolata nel sistema di riferimento relativo  $R_r$ .

Nel sistema mobile, il vettore  $\vec{n}(t)$  si esprime come:

$$\vec{n}(t) = n'_1(t) \hat{e}_1(t) + n'_2(t) \hat{e}_2(t) + n'_3(t) \hat{e}_3(t) = \sum_{k=1}^3 n'_k(t) \hat{e}_k(t), \quad (176)$$

dove  $n'_k(t)$  sono le componenti del vettore nella terna mobile e  $\hat{e}_k(t)$  sono i versori del sistema di riferimento relativo, entrambi dipendenti dal tempo.

## 18.1 Derivata nel sistema assoluto

Derivando l'espressione (176) rispetto al tempo nel sistema di riferimento assoluto  $R_a$ :

$$\frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big|_{R_a} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 n'_k(t) \hat{e}_k(t) \right) = \sum_{k=1}^3 \dot{n}'_k(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 n'_k(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt}. \quad (177)$$

Il primo termine rappresenta la variazione delle componenti del vettore, mentre il secondo tiene conto della rotazione dei versori del sistema mobile.

Applicando le formule di Poisson,  $\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k$ , il secondo termine diventa:

$$\sum_{k=1}^3 n'_k(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^3 n'_k(t) (\vec{\omega} \times \hat{e}_k) = \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^3 n'_k(t) \hat{e}_k(t) = \vec{\omega} \times \vec{n}(t). \quad (178)$$

## 18.2 Relazione fondamentale

Il primo termine nella (177) rappresenta la derivata del vettore  $\vec{n}$  osservata dal sistema di riferimento relativo  $R_r$ , poiché considera solo la variazione delle componenti mentre i versori sono trattati come fissi:

$$\frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big|_{R_r} = \frac{\partial \vec{n}(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \dot{n}'_k(t) \hat{e}_k(t). \quad (179)$$

Si ottiene quindi la **relazione fondamentale** che lega le derivate di un vettore nei due sistemi di riferimento:

$$\frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big|_{R_a} = \frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big|_{R_r} + \vec{\omega} \times \vec{n}(t). \quad (180)$$

Equivalentemente, utilizzando la notazione con la derivata parziale per il sistema relativo:

$$\frac{d\vec{n}(t)}{dt} \Big|_{R_a} = \frac{\partial \vec{n}(t)}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{n}(t). \quad (181)$$

**Interpretazione fisica.** La derivata di un vettore nel sistema assoluto differisce da quella nel sistema relativo per un termine  $\vec{\omega} \times \vec{n}$ , che tiene conto della rotazione del sistema di riferimento mobile. Questo termine è nullo solo quando:

- il sistema relativo non ruota ( $\vec{\omega} = \vec{0}$ ), oppure
- il vettore  $\vec{n}$  è parallelo all'asse di rotazione ( $\vec{n} \parallel \vec{\omega}$ ).

La relazione (180) è di fondamentale importanza in meccanica: essa permette di trasformare le equazioni del moto tra sistemi di riferimento diversi e costituisce la base per la derivazione delle espressioni di velocità e accelerazione relative viste nei capitoli precedenti.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> Applicando questa relazione al vettore posizione  $\vec{y}_P$  si ottiene la formula per la velocità; applicandola poi al vettore velocità si ricava l'accelerazione, con la comparsa del termine di Coriolis.