

EQUILIBRIO E STABILITÀ DI UN PUNTO MATERIALE A 3 G.D.L.

È GENERALIZZAZIONE DEL CASO AD 1 G.D.L. PRATICAMENTE NON C'È NULLA DI PIÙ RISPETTO AL CASO PIÙ SEMPLICE MA NON SI PARLA PIÙ DI 1 EQ. SCALARE MA DI PIÙ EQ. SCALARI A SISTEMA CHE VERRANNO AFFRONTATE CON UN PROCEDIMENTO PRECISO.

SI HA: $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ → NON È FORZANTE (NON STA FORZANDO NULLA) MA È RISULTANTE FORZE AGENTI SU M.

IN CUI LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È TALE PER CUI:

$$\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}$$

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO →

NON BASTA DIRE CHE HO PUNTO DI EQUILIBRIO $\vec{x}_e$ MA DEVO ANCHE DIRE CHE $\dot{\vec{x}}_e = \vec{0}$ ALTRIMENTI LA VELOCITÀ POTREBBE ESSERE COSTANTE, DA CUI $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$.

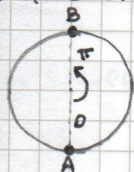
ALL'EQUILIBRIO SI VUOL CHE LA RISULTANTE DELLE FORZE SIA NULLA NEL PUNTO $\vec{x}_e$ A VELOCITÀ NULLA ($\dot{\vec{x}}_e = \vec{0}$) E $\forall t \in \mathbb{R}$.

VEDIAMO CHE SUCCEDERÀ AL SISTEMA SEMPRETURBO IN UN INTORNO DEL SUO PUNTO DI EQUILIBRIO $\vec{x}_e$, CIOÈ:

$$\vec{x} = \vec{x}_e + \vec{x}' \quad \text{O MEGLIO} \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_e + \vec{x}'(t)$$

PERTURBARE ≠ FORZARE
GLI SI Danno DELLE C.I.

NEL CASO AD 1 G.D.L. DEL PENDOLO SI AVEVA LINEARIZZATO L'EQUAZIONE INTORNO AL PUNTO $\theta = 0$ E $\theta = \pi$, MA SOLO PER UN PICCOLO INTERVALLO INTORNO A QUESTE DUE POSIZIONI DI EQUILIBRIO, EVIDENZIANDO COSÌ LA STABILITÀ, INSTABILITÀ O INDIFFERENZA.



LA LINEARIZZAZIONE NON VA PIÙ BENE AL DI FUORI DI QUESTI PUNTI DI EQUILIBRIO.

NEL PUNTO A SI È VISTO MOTO ARMONICO (SMORZATO O NON SMORZATO) → STABILE O STABILE ASINTOTICAMENTE

NEL PUNTO B SI HANNO ESP. REALI CHE FANNO DIVERGERE SOLUZIONE → INSTABILE

È QUINDI STUDIO LOCALE! LA LINEARIZZAZIONE LA USIAMO SOLO PER CAPIRE SE, IN UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO, C'È O MENO STABILITÀ, INSTABILITÀ O INDIFFERENZA.

LINEARIZZANDO LA $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$, PER LA II LEGGE DI NEWTON: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ NON DERIVO PER IL TEMPO t POICHÉ NON CI INTERESSA LA VAR. DELLA $\vec{f}$ NEL TEMPO

QUINDI LINEARIZZANDO INTORNO ALE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO $(\vec{x}_e, \vec{0}, t)$: ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$$\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \approx \vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \vec{x}} \bigg|_{\vec{x}_e} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_e) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{\vec{x}}} \bigg|_{\vec{0}} \cdot (\dot{\vec{x}} - \vec{0}) + o(\vec{x} - \vec{x}_e, \dot{\vec{x}} - \vec{0})$$

ESPANSIONE DI TAYLOR DI $\vec{f}$ VETTORIALE TRONCATA AL I ORDINE

IN CUI:

I LA SERIE DI TAYLOR È APPLICATA AD UNA $\vec{f}$ VETTORIALE E SI PUÒ GENERALIZZARE COME (AL I ORDINE)

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + J_f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$$

SOPRA HO AVUTO JACOBIANO XUE LE VAR. INDIP. $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ IN CUI $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

DOVE:

DOVE $\vec{a}$ È IL VETTORE CHE INDICA LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

È IL JACOBIANO DELLA FUNZIONE VETTORIALE

II $\vec{f}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}$ DA DEFINIZIONE È TALE PER CUI LA NEL VETTORE CHE DEFINISCE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO È NULLA. DELLE FORZE

III DEFINISCO: $\vec{x} - \vec{x}_e = \vec{x}'$ Ossia $\vec{x} = \vec{x}_e + \vec{x}'$ COME DA DEFINIZIONE
 $\dot{\vec{x}} - \vec{0} = \dot{\vec{x}'}$

QUINDI A $(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ APPUNTI DI DAVIDE ANTONIO MAUTONE

A QUESTO PUNTO RISCOVO L'ESPANSIONE DI TAYLOR IN FORMA INDICIALE CON LE CONSIDERAZIONI FATTE:

$$m \ddot{x}_i \approx \sum_{k=1}^3 \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right|_{\vec{x}_e} \cdot x'_k + \sum_{k=1}^3 \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k} \right|_{\vec{x}_e} \cdot \dot{x}'_k$$

EQ. DIFF. VETTORIALE CON
ESPANSIONE DI TAYLOR DI f IN FORMA INDICIALE CON APPROSSIMAZIONI

MA NOI CI METTIAMO $\Rightarrow$ UGUAGLIANZA PER LA RISOLUZIONE

POICHÉ IL PRIMO MEMBRO È COSTITUITO DA SCALARE PER UN VETTORE, AI FINI DELLA RISOLUZIONE DELLA EQ. DIFF. VETTORIALE, LA MASSA m VA RISCRISSA IN MODO DIVERSO

DALL'ALGEBRA LINEARE SO CHE L'ELEMENTO NEUTRO È LA MATRICE IDENTITÀ, QUINDI;

DEFINISCO: $m_{lk} = m \delta_{lk}$ DOVE δ_{lk} È IL DELTA DI KRONECKER $\begin{cases} \delta_{lk} = 1 & \text{se } l=k \\ \delta_{lk} = 0 & \text{se } l \neq k \end{cases}$

QUINDI GENERO UNA MATRICE 3×3 CHE CONTIENE LA MASSA m :

$$m_{lk} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}$$

MASSA

ANCHE SE METTO = SOTTO NON SIGNIFICA CHE SIA VARIANTE MA È PER INDICARE CHE È UNA MATRICE NON PARLAMO DI TENSORI OSSIA MATRICI VARIANTI

DOPODICHÉ DEFINISCO:

$$G_{lk} = - \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_k} = \underline{\underline{G}} \Rightarrow$$

SPORTEAMENTO

$$\underline{\underline{G}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_3} \end{pmatrix}$$

E

$$K_{lk} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \underline{\underline{K}}$$

MOLLA

$$\underline{\underline{K}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

CALCOLATE NEL PUNTO $\vec{x}_e$ E $\vec{v}_e = \vec{0}$

QUINDI IN FORMA INDICIALE DIVENTA: AL POSTO DI $\ddot{x}'_i$ O $x'_i \rightarrow \ddot{x}_i$ O x_i

$$m_{lk} \ddot{x}_i + G_{lk} \dot{x}_i + K_{lk} x_i = 0_i$$

MENTRE IN FORMA TENSORIALE/VETTORIALE:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{G}} \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{0}$$

EQUAZIONE DIFF. VETTORIALE DI 1° ORDINE
OSSIA SISTEMA DI 3 EQ. DIFF. SCALARI

$\underline{x}$ È IL VETTORE ALGEBRICO DI $\vec{x}$ PROIETTATO SU UN $R(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

RISOLUZIONE DELL'EQ. DIFF. VETTORIALE

PER LA RISOLUZIONE SI INTRODUCONO:

$$\underline{y} = \underline{\dot{x}} \quad \textcircled{A}$$

E SI INTRODUCE UNA NUOVA INCOGNITA, OSSIA DA $\underline{x}$ A $\underline{w}$

$$\underline{w} = \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad \textcircled{B}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

E POI QUESTA RELAZIONE:

$$\underline{\underline{A}} \dot{\underline{W}} = \underline{\underline{C}} \underline{W} \quad (1) \text{ NUOVO SISTEMA DI EQUAZIONI,}$$

DOVE: (E)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{M}} \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRICI DI MATRICI}$$

QUINDI RISCRIVENDO (1) CON LE MATRICI NELLE MATRICI OTTENGO:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{G}} & \underline{\underline{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{I}} \\ -\underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{Bmatrix}$$

MOLTIPLICANDO:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \underline{\underline{G}} \dot{\underline{x}} + \underline{\underline{M}} \dot{\underline{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ -\underline{\underline{K}} \underline{x} \end{bmatrix} \quad \text{INFATTI SI È TORNATI ALLE RELAZIONI INTRODOTTE SOSTITUENDO POI A } \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{x}} \text{ SI OTTIENE LA 1ª EQ.}$$

A QUESTO PUNTO VA IPOTIZZATO CHE:

HP IPOTESI:

$\underline{\underline{A}}$ È INVERTIBILE (D)

A QUESTO PUNTO PER PROCEDERE DEVO MOLTIPLICARE AMBO I MEMBRI PER $\underline{\underline{A}}^{-1}$ DELLA (1):

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} \dot{\underline{W}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{W}$$

↓

$$\dot{\underline{W}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}} \underline{W}$$

CHE DIVENTA:

IN CUI INTRODUCO

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{C}}$$

$$\dot{\underline{W}} = \underline{\underline{S}} \underline{W} \quad (2) \text{ NUOVA EQ. DIFF. VETTORIALE DEL 1º ORDINE}$$

SI È QUINDI TRASFORMATO LA PRIMA EQ. VETTORIALE DIFF. DEL 2º ORDINE IN 1 EQ. DIFF. VETTORIALE DEL 1º ORDINE.

QUESTO SISTEMA DI EQ. SCALARI DIFF. HA LE SOLUZIONI DEL SEGUENTE TIPO:

$$\underline{W} = \underline{Z} e^{\lambda t} \rightarrow \text{SISTEMA DELLE SOLUZIONI CERCATE} \quad \text{IN CUI } \underline{Z} \text{ VETTORE PER OPA}$$

PER TROVARE $\underline{W}$ DEVO TROVARE $\underline{Z}$, VETTORE ALGEBRICO COMPOSTO DA n VALORI
 $\underline{Z}^k$ GENERICI

SOSTITUISCO IN (2) $\underline{W}$ E $\dot{\underline{W}}$ DOVE:

$$\underline{W} = \underline{Z} e^{\lambda t}$$

$$\dot{\underline{W}} = \lambda \underline{Z} e^{\lambda t}$$

QUINDI:

$$\lambda \underline{z} e^{\lambda t} = \underline{S} \underline{z} e^{\lambda t}$$

SPOSTANDO TUTTO AL I MEMBRO:

$$\lambda \underline{z} e^{\lambda t} - \underline{S} \underline{z} e^{\lambda t} = \underline{0}$$

RAGGRUPPANDO L'ESPOENZIALE OTTENGO:

$$e^{\lambda t} [\lambda \underline{z} - \underline{S} \underline{z}] = \underline{0}$$

CIÒ SONO SOLUZIONI DIVERSE DA:

$$\underline{z} e^{\lambda t} = \underline{0} \quad \forall \underline{z}$$

L'EQUAZIONE NON PUÒ ESSERE SODDISFATTA DA $e^{\lambda t} = 0$ IN QUANDO $\forall \lambda$ SI HA $e^{\lambda t} \neq 0$, QUINDI LA SOLUZIONE VA CERCATA ALL'INTERNO DELLA PARENTESI, CIOÈ:

$$\lambda \underline{z} - \underline{S} \underline{z} = \underline{0} \quad (3)$$

COME FATTO PRIMA PER LA MASSA, ORA TRASFORMO UN VETTORE IN UNA MATRICE (È UN'OPERAZIONE LEGITA CHE NON FA CAMBIARE NULLA DELL'EQ.):

$$\underline{z} = \underline{z} \underline{I} \rightarrow \text{INFATTI} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI LA (3) DIVENTA:

$$\lambda \underline{z} \underline{I} - \underline{S} \underline{z} = \underline{0}$$

RAGGRUPPANDO $\underline{z}$:

$$(\underline{S} - \lambda \underline{I}) \underline{z} = \underline{0}$$

$$(\lambda \underline{I} - \underline{S}) \underline{z} = \underline{0} \quad (4) \text{ CHE È LA STESSA SOLUZIONE VISTA CON } \underline{A} \underline{z} = \lambda \underline{z}$$

CERCANDO SOLUZIONI DIVERSE DA $\underline{z} e^{\lambda t} = \underline{0}$, ALLORA È EQUIVALE A CALCOLARE GLI AUTOVALORI:

$$\text{DET} [\underline{S} - \lambda \underline{I}] = 0$$

IN CUI HO CAMBIATO SEGNO A (4)
TANTO NON CAMBIA NULLA

CERCO 6 AUTOVALORI REALI O COMPLESSI (POSSONO ESSERE SIA REALI CHE COMPLESSI)
 $\lambda_k \rightarrow$ SONO LE RADICI DA ANALIZZARE

OGNI AUTOVALORE λ_k TROVATO, LO VADO AD INSERIRE IN (4) OTTENENDO COSÌ LO $\underline{z}^k$ AUTOVETTORE ASSOCIATO ALL'AUTOVALORE λ_k .

$$(\underline{S} - \lambda_k \underline{I}) \underline{z}^{(k)} = \underline{0} \rightarrow \text{UNICA INCOGNITA È } \underline{z}^k$$

COSÌ FACENDO TROVO:

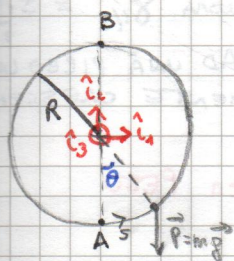
$$\underline{w}(t) = \sum_{k=1}^6 \underline{z}^{(k)} e^{\lambda_k t}$$

6 AUTOVALORI PER 6 INCOGNITE DI $\underline{w}(t)$

COMBINAZIONE DI UN CERTO NUMERO DI ESPONENZIALI COME SOLUZIONE DELL'EQ. DIFF. (2)
AL SOUTO, A PRESUNDERE SE ABBIAMO 2 REALE O IMMAGINARIO O TUTTI E DUE, (GUARDANDO QUINDI SE C'È LA PARTE REALE. SE HO PARTE REALE POSITIVA, ALMENO UNA, HO S.C. CHE TENDE A DIVERGERE.

OVVIAMENTE ESSENDO $\underline{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) & w_2(t) & w_3(t) \\ x_1 & x_2 & x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3 \end{pmatrix}$ BASTERÀ OCCUPARSI SOLO DI CALCOLARE $w_1(t)$, $w_2(t)$ E $w_3(t)$ E NON DELLE ALTRE COMPONENTI

APPLICAZIONE PENDOLO 1 GOL EQUILIBRIO E STABILITÀ



1° METODO

L'EQUAZIONE DEL MOTO È:

$$m\ddot{s} = \vec{f} \cdot \hat{e}$$

DOVE $\vec{f} = m\vec{g}$

DOVE $s = \theta R$

$$m\ddot{s} = m\vec{g} \cdot \hat{e}$$

$$m\ddot{s} = -mg \sin \theta$$

SOSTITUENDO A $s = \theta R$

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \rightarrow mR\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \quad (1)$$

RISCRIVO L'EQUAZIONE COME: $l = R$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

QUINDI SI HA UNA FORZA CHE È $f(\theta)$ OSSIA

$$f(\theta) = -mg \sin \theta$$

VOGLIO STUDIARE LA STABILITÀ ALL'EQUILIBRIO QUINDI:

PUNTO A $\rightarrow \theta_A = 0$

$$f(\theta_A) = f(s_A) = 0$$

PERCHÉ $s_A \propto \theta_A$

COND. DI EQUILIBRIO

APPLICO UNA PICCOLA PERTURBAZIONE, PER CUI:

$$f(s_A + s') = ? \quad \text{DOVE } s(t) = s_A + s'(t)$$

$$f(\theta_A + \theta') = ? \quad \text{DOVE } \theta(t) = \theta_A + \theta'(t)$$

COME SUOITO IN PRECEDENZA, APPLICO L'ESPANSIONE IN SERIE DI TAYLOR PER CUI:

$$\rightarrow f(\theta) \approx f(\theta_A) + \left. \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right|_0 (\theta(t) - \theta_A) + o(\theta'^2)$$

ELIMINO I TERMINI DI SECONDO ORDINE E RICORDO CHE $f(\theta_A) = 0$ QUINDI:

$$f(\theta) \approx \left. \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right|_0 \theta'(t) = \left. \frac{\partial (-mg \sin \theta)}{\partial \theta} \right|_0 \theta'(t) \Rightarrow f(\theta) \approx -mg [\cos \theta]_0 \theta'(t)$$

QUINDI HO LINEARIZZATO $f(\theta)$:

$$f(\theta) \approx -mg \theta'(t) \quad \text{PERTANTO L'EQ. DIVENTA}$$

$$m l \ddot{\theta}'(t) = -mg \theta'(t) \rightarrow \ddot{\theta}'(t) + \frac{g}{l} \theta'(t) = 0 \quad (A)$$

PER IL PUNTO B LO SVOLGIMENTO È UGUALE E SI ARRIVA ALLA STESSA APPROSSIMAZIONE CON TAYLOR MA LA DIFFERENZA È CHE:

PUNTO B $\rightarrow \theta_B = \pi$

$$f(\theta) \approx -mg [\cos \theta]_{\pi} \theta'(t) \quad \text{QUINDI } f(\theta) \approx mg \theta'(t)$$

DA CIÒ SEGUE CHE:

$$\ddot{\theta}'(t) - \frac{g}{l} \theta'(t) = 0 \quad (B)$$

SE ANALIZZIAMO LE EQ. (A) E (B) SI VEDE CHE:

A) $\ddot{\theta}'(t) + \frac{g}{l} \theta'(t) = 0 \rightarrow \chi^2 = -\frac{g}{l}$ ED ESSENDO $g, l > 0 \rightarrow \chi_{1/2} = \pm j\omega$

RADICI COMPLESSE E CONIUGATE CON $\text{Re} = 0$ DA CUI

CONDIZIONE DI STABILITÀ IN MOTO ARMONICO ATTORNO A θ_A

B) $\ddot{\theta}(t) - \frac{g}{l} \theta'(t) = 0 \rightarrow \gamma^2 = \frac{g}{l} \rightarrow \gamma_{1/2} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ESSENDO $g, l > 0$ ALLORA $\gamma_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

RADICI REALI E DISTINTE DA CUI **CONDIZIONE DI INSTABILITÀ**. AD UNA PICCOLA PERTURBAZIONE IL SISTEMA RISPONDE CON UNO SPOSTAMENTO ESPONENZIALMENTE CRESCENTE DA θ_B .

2° METODO → ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA AL CAMPO DELLA FORZA PESO

POICHÉ $\vec{F} = m\vec{g}$ È CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO, ALLORA $\exists \varphi$:

$\vec{F} = \nabla \varphi = -\nabla U$ OSSIA:

$$\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \hat{e}_3\right) = m\left[(\vec{g} \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\vec{g} \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 + (\vec{g} \cdot \hat{e}_3) \hat{e}_3\right]$$

$$= -mg \hat{e}_2$$

POSSIAMO RISCRIVERE COME:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} = mg \\ \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \rightarrow U \text{ DIPENDE SOLO DA } x_2 \text{ OSSIA LA QUOTA } h \text{ QUINDI SOLO DA } \hat{e}_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = mg \rightarrow \partial U = mg \partial x_2$$

$$\int_1^2 dU = \int_1^2 mg \partial x_2 \quad *$$

$$* U_2 - U_1 = mg \int \partial x_2 \Rightarrow U_2 = mg[x_{2,2} - x_{2,1}] + U_1 \quad \rightarrow +C$$

SE DEVO STUDIARE LE POSIZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\vec{F} = -\nabla U = -mg \hat{e}_2 = \vec{0} \quad \text{CIOÈ:}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = -mg \hat{e}_2 = \vec{0}$$

PERÒ CONVIENE STUDIARE IL P.TO DI EQ. CON LA TERNA INTRINSECA, QUINDI:

$$m\vec{g} \cdot \hat{e} = -mg \sin \theta \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial s} = -mg \sin \theta \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = mg \sin \theta$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR \sin \theta = 0 \rightarrow mgR \sin \theta = 0 \quad m, g, R > 0$$

QUINDI $\sin \theta = 0 \rightarrow \theta_A = 0; \theta_B = \pi$ **CONDIZIONI DI EQUILIBRIO**

STUDIO ORA LA DINAMICA DEL SISTEMA ATTORNO AI P.TI DI EQUILIBRIO θ_1 E θ_2 TRAMITE IL **METODO ENERGETICO**.

$m\ddot{s} = f(s)$ PERTURBO $s(t) = s_E + s'(t)$ $\rightarrow m\ddot{s} - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} s' = 0$
 $m\ddot{s} = -mg \sin \theta$

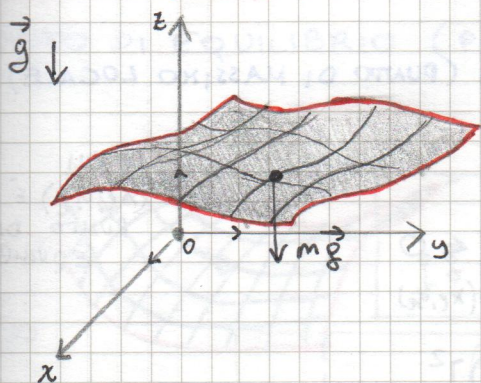
$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \rightarrow \sin \theta \approx \sin(\theta_E) + \cos(\theta_E)(\theta - \theta_E) + o(\theta^2)$

CASO $\theta_A = 0$ $\sin \theta \approx \theta$
 CASO $\theta_B = \pi$ $\sin \theta \approx -\theta$

$\theta_A: mR\ddot{\theta} = -mg\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0 \rightarrow \text{EQ. STABILE}$

$\theta_B: mR\ddot{\theta} = mg\theta \rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\theta = 0 \rightarrow \text{EQ. INSTABILE}$

STUDIO EQUILIBRIO E STABILITÀ A 2 GDL



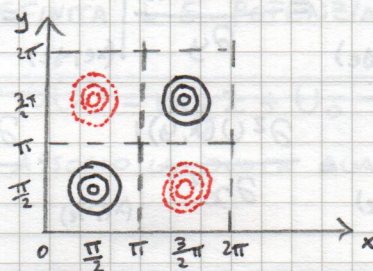
DEFINISCO UNA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ IN CUI $f = z(x,y)$

$$z(x,y) = -\sin x \sin y$$

L'ANDAMENTO DEL GRAFICO, QUINDI DELLA $z(x,y)$ È DEL TIPO:



GUARDANDOLO DALL'ALTO SI AUREBBE



↓
QUINDI SI HANNO MASSIMI E MINIMI LOCALI PERIODICAMENTE LUNGO IL GRAFICO DELLA FUNZIONE

L'ENERGIA ASSOCIATA (CAMPO POTENZIALE) A QUESTA FORZA $z(x,y)$ È:

$$U(z) = mgz + U_0 \quad \text{MA LE STESSA DIMENSIONE DI UNA FORZA}$$

$$U(z) = mgz - mg \sin x \sin y + C$$

NE CONSEGUE CHE LA VARIAZIONE DI $U(z)$ CHE QUINDI $U(x,y)$:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -mg \cos x \sin y \quad \text{E} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -mg \sin x \cos y$$

IO CERCO I PUNTI DI EQUILIBRIO OSSIA I PUNTI IN CUI $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ (DERIVATE 0 INDICANO MASSIMO O MINIMO).

POICHÉ $m, g > 0$ QUINDI

$$\begin{cases} mg \cos x \sin y = 0 \\ mg \sin x \cos y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos x \sin y = 0 \\ \sin x \cos y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi \\ y = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi \end{cases}$$

HO DUNQUE TROVATO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO MA NON SE SONO STABILI O MENO:

(OSSIA PER TUTTE LE COPPIE (x,y) E LE LORO COMBINAZIONI)

STABILITÀ

LA STABILITÀ IN 2 GDL SI STUDIA TRAMITE HESSIANA (MATRICE)

$$H(U) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MATRICE HESSIANA}} \xrightarrow{\text{GENERALIZZATA DATA UNA } f(x,y)} H(f) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

L'EQUILIBRIO SI CALCOLA SVOLGENDO LA MATRICE; IL DETERMINANTE DELLA MATRICE E LE SUE DISUGUAGLIANZE CI FORNISCONO INFORMAZIONI SU STABILITÀ, IN STABILITÀ O LIMITE (PUNTO DI EQUILIBRIO), IN PARTICOLARE:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

EQUILIBRIO STABILE - MATRICE HESSIANA POSITIVA (PUNTO DI MINIMO RELATIVO)

LE CONDIZIONI DI STABILITÀ SONO CHE LA MATRICE H SIA DEFINITA POSITIVA, OSSIA, CONSIDERANDO SEMPRE LA MATRICE APPLICATA A U, SI AVrà CHE:

$$\left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)} = \left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{(x_e, y_e)} > 0$$

IN CUI (x_e, y_e) È UN PUNTO DI EQUILIBRIO

$$(\text{DET } H)_{(x_e, y_e)} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{(x_e, y_e)} \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{(x_e, y_e)} - \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right]_{(x_e, y_e)}^2 > 0$$

* T. SCHWARTZ
 $f_{xy} = f_{yx}$

SE QUESTE 3 CONDIZIONI SONO SODDISFATTE, ALLORA SIAMO IN EQUILIBRIO STABILE
POICHÉ LA MATRICE H È POSITIVA

EQUILIBRIO INSTABILE - MATRICE HESSIANA NEGATIVA (PUNTO DI MASSIMO LOCALE)

SI PARLA DI EQUILIBRIO **INSTABILE** QUANDO:

$$\left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right|_{(x_e, y_e)} = \left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right|_{(x_e, y_e)} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} \right|_{(x_e, y_e)} < 0$$

IN CUI
 (x_e, y_e) È UN
PUNTO DI
EQUILIBRIO

$$[DET(H)]|_{(x_e, y_e)} = \left. \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} \right|_{(x_e, y_e)} \cdot \left. \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} \right|_{(x_e, y_e)} - \left[\left. \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} \right|_{(x_e, y_e)} \right]^2 > 0$$

QUINDI RIPRENDENDO IL CASO PRECEDENTE IN CUI:

$$Z(x,y) = -\sin x \sin y$$

TROVATI I PUNTI DI EQUILIBRIO (x,y) ; ANZI LE COPPIE DI PUNTI, CALCOLO LE CONDIZIONI RIPORTATE DI SOPRA PER IL PUNTO:

$$(x,y) = \left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right)$$

QUINDI $H(z) = H(x,y)$ È:

$$H(x,y) = mg \begin{bmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{bmatrix} \bigg|_{\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right)} = mg \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H(x,y) = mg \cdot 1 = mg > 0 \quad \textcircled{1}$$

INOLTRE:

$$\left. \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} \right| < 0 \quad \textcircled{2}$$

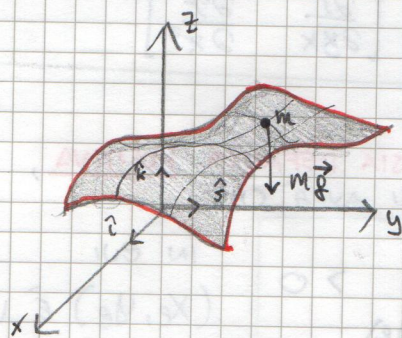
SI NOTA CHE H È UNA
MATRICE SIMMETRICA MA
NON DIAGONALE

MENTRE

$$\left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \right|_{\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right)} = \left. \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \right|_{\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right)} = 0 \quad \textcircled{3}$$

LE 3 CONDIZIONI RIENTRANO NEL CASO DI EQUILIBRIO INSTABILE PERTANTO
 H È DEFINITA NEGATIVA

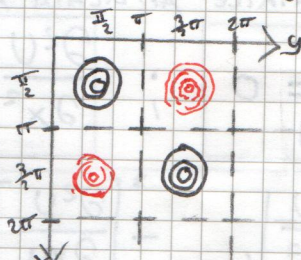
UNO STESSO RAGIONAMENTO LO SI POTEVA FARE PER:



$$Z(x,y) = \sin x \sin y$$

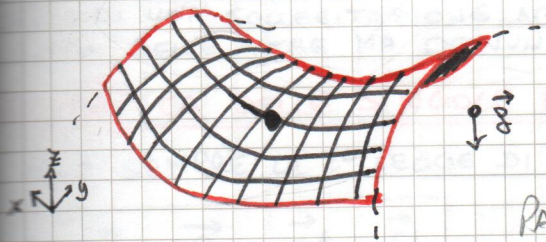
È

$$U(x,y) = mg \sin x \sin y$$



E SI ARRIVEREBBE ALLA STESSA HESSIANA.

PUNTO DI EQUILIBRIO (PUNTO DI SELLA)



DATA LA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f = z(x,y)$

$$z(x,y) = x^2 - y^2$$

PER COME È DEFINITA L'E. POTENZIALE:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\rightarrow U(z) = mgz + U_0 \rightarrow mg(x^2 - y^2) + U_0$$

ASSOCIO LA QUOTA ALLA VARIABILE z

CERCO IL PUNTO DI EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x = 2mgx$$

$$\text{E } \frac{\partial U}{\partial y} = U_y = -2mgy$$

QUINDI IL SISTEMA:

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x} = 2mgx = 0 \rightarrow x=0 \\ -\frac{\partial U}{\partial y} = 2mgy = 0 \rightarrow y=0 \end{cases} \rightarrow P_{\text{Equilibrio}} = (0,0)$$

STUDIO LA STABILITÀ:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} +2mg & 0 \\ 0 & -2mg \end{bmatrix} = 2mg \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det |H| < 0$$

MATRICE INDEFINITA

- PERTURBANDO IL PUNTO, SPOSTANDOLO LUNGO LA SEZIONE DEL PIANO PARALLELA A **XZ** (ZONA CRESCENTE DELLA SELLA) **OSCILLERÀ** ATTORNO A P_e .
EQUILIBRIO STABILE
- PERTURBANDO IL PUNTO, SPOSTANDOLO LUNGO LA SEZIONE DEL PIANO PARALLELA A **YZ**, SI **ALLONTANERÀ** INDEFINITIVAMENTE DA P_e .
EQUILIBRIO INSTABILE

MATEMATICAMENTE NON È STABILE NE' INSTABILE, INGEGNERISTICAMENTE È **INSTABILE**.

MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

PER SISTEMA DI PUNTI MATERIALI SI INTENDE L'INSIEME DI PUNTI MATERIALI, POSTI NELLO SPAZIO IN QUALCHE MODO MA AVENTI CIASCUNO UNA DINAMICA NON INDIPENDENTE GLI UNI DAGLI ALTRI. QUINDI, PUNTI MATERIALI SI SCAMBIANO FORZE TRA LORO (COME PER ESEMPIO LA FORZA GRAVITAZIONALE, COULOMBIANA, ELASTICA, ECC.). QUINDI UNA SOLLECITAZIONE AGENTE SU UNA DI ESSE INFLUENZERÀ L'EVOLUZIONE DEL MOTO DELLE ALTRE MA OGNUNA È LIBERA DI MUOVERSI NELLO SPAZIO

DINAMICA DELLE SINGOLE PARTICELLE (I) ①

VALE SEMPRE LA 2⁰ LEGGE DI NEWTON PER OGNI SINGOLA PARTICELLA:

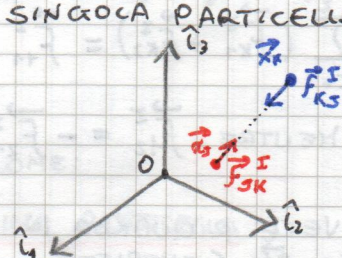
$$m_k \vec{a}_k = \vec{f}_k = \vec{f}_k^E + \vec{f}_k^I$$

RISULTANTE
DELLE FORZE PER
OGNI PARTICELLA

F. ESTERNE

F. INTERNE

CON $K=1, \dots, N$



$\vec{f}_{KJ}^I$ È LA
FORZA AGENTE
DIT. SUL K
ELET. IL CONTRARIO
È $\vec{f}_{JK}^I$.

VALE INOLTRE LA 3⁰ LEGGE DI NEWTON:

$$\vec{f}_K^I = \sum_{J=1}^N \vec{f}_{KJ}^I$$

OSSIA LA FORZA K-ESIMA INTERNA (DELLA PARTICELLA K-ESIMA QUINDI) È LA RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI DALLE J-ESIME PARTICELLE

LO STESSO VALE

PER LA J-ESIMA PARTICELLA:

$$\vec{f}_J^I = \sum_{K=1}^N \vec{f}_{JK}^I$$

SI NELLA ① CHE ② SI CONSIDERA ANCHE
LA $\vec{f}_{KK}^I$ E $\vec{f}_{JJ}^I$ MA SONO FORZE
NUOVE, OSSIA
 $\vec{f}_{KK}^I = \vec{f}_{JJ}^I = \vec{0}$ ←

NE CONSEGUE CHE LA ① E ② SONO OPPOSTE (INFATTI SE METTESSI UN MENO ALLA SOMMATORIA ① OTTERREI LE FORZE NEGATIVE OSSIA OPPOSTE AGENTI SUL J-ESIMO ELEMENTO DA PARTE DELLE K-ESIME PARTICELLE, OSSIA PRATICAMENTE LA ②)

$$\vec{f}_{KJ}^I = -\vec{f}_{JK}^I \rightarrow \vec{f}_{KJ}^I + \vec{f}_{JK}^I = \vec{0} \quad ③$$

MOMENTO DELLE FORZE AGENTI SULLE PARTICELLE RISPETTO AD UN GENERICO POLO ②

DATA LA ③ RELAZIONE, CALCOLO IL MOMENTO DELLE FORZE AGENTI SUL SISTEMA DI PARTICELLE; SOMMO I MOMENTI RISPETTIVI TRA $\vec{x}_K$ E $\vec{x}_J$ CON IL POLO $\vec{x}_0$:

$$(\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{KJ}^I + (\vec{x}_J - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{JK}^I = \vec{0} \quad ④$$

DIMOSTRAZIONE

AGGIUNGO E SOTTRAGGO UNA STESSA QUANTITÀ:

$$(\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{KJ}^I + (\vec{x}_J - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{JK}^I + \vec{x}_K \times \vec{f}_{JK}^I - \vec{x}_K \times \vec{f}_{JK}^I =$$

$\vec{0}$

SVOLGO I PRODOTTI VETTORIALI (LI SEMPLIFICO TOGLIENDO LE PARENTESI):

$$= \vec{x}_K \times \vec{f}_{KJ}^I - \vec{x}_0 \times \vec{f}_{KJ}^I + \vec{x}_J \times \vec{f}_{JK}^I - \vec{x}_0 \times \vec{f}_{JK}^I + \vec{x}_K \times \vec{f}_{JK}^I - \vec{x}_K \times \vec{f}_{JK}^I =$$

LI RAGGRUPPO IN MODO DIVERSO DA PRIMA:

$$= \vec{x}_K \times (\vec{f}_{KJ}^I + \vec{f}_{JK}^I) - \vec{x}_0 \times (\vec{f}_{KJ}^I + \vec{f}_{JK}^I) + (\vec{x}_J - \vec{x}_K) \times \vec{f}_{JK}^I$$

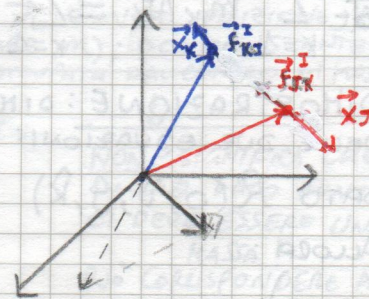
CHE POSSO RISCRIVERE COME:

$$= (\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times (\vec{f}_{KJ}^I + \vec{f}_{JK}^I) + (\vec{x}_J - \vec{x}_K) \times \vec{f}_{JK}^I = \vec{0}$$

$\vec{0}$

$\vec{x}_J - \vec{x}_K \parallel \vec{f}_{JK}^I$

MOMENTO
F. INTERNE
NULLO



DALLA EQUAZIONE (1) DERIVA CHE

$$\vec{F}^I = \vec{0} \quad (5) \text{ RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE NULLA } \rightarrow \vec{F}^I = \sum_{K=1}^N \vec{F}_K^I$$

DIMOSTRAZIONE

3^o LEGGE DI NEWTON

DALLA (1) OSSIA $\vec{F}_K^I = \vec{F}_{KJ}^I$, DICO CHE:

$$\vec{F}^I = \sum_{K=1}^N \vec{F}_K^I \quad \text{MA CIÒ SIGNIFICA CHE} \quad \sum_{K=1}^N \vec{F}_K^I = \sum_{K=1}^N \sum_{J=1}^N \vec{F}_{KJ}^I \quad \text{SVOLGENDO LA}$$

$$\sum_{K=1}^N \sum_{J=1}^N \vec{F}_{KJ}^I = \sum_{K=1}^N (\vec{F}_{K1}^I + \vec{F}_{K2}^I) = \vec{F}_{11}^I + \vec{F}_{21}^I + \vec{F}_{12}^I + \vec{F}_{22}^I \quad \text{MA:}$$

$$\vec{F}_{11}^I = \vec{F}_{22}^I = \vec{0} \quad \text{MENTRE} \quad \vec{F}_{12}^I = -\vec{F}_{21}^I \rightarrow \vec{F}_{12}^I + \vec{F}_{21}^I = \vec{0} \quad \text{DALLA (3)}$$

PER QUANTO INVECE RIGUARDA IL MOMENTO TOTALE DELLE K-ESIME PARTICELLE INTORNO AL POLO $\vec{x}_0$ GENERICO:

PARTENDO DAL MOMENTO INTORNO AD $\vec{x}_0$ DELLA PARTICELLA K HO:

$$\vec{M}_{0K}^I = (\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times \vec{F}_K^I \quad \text{CHE NON NECESSARIAMENTE È NULLO}$$

MENTRE

$$\vec{M}_0^I = \sum_{K=1}^N (\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times \vec{F}_K^I$$

MA SO CHE DALLA (5) $\sum_{K=1}^N \vec{F}_K^I = \vec{F}^I = \vec{0}$, SEGUE CHE

$$\vec{M}_0^I = \sum_{K=1}^N (\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times \vec{F}_K^I = \vec{0} \quad (6) \text{ MOMENTO TOTALE NULLO RISPETTO AD UN GENERICO POLO}$$

OGNI COPPIA DI FORZE SCAMBIATE DA OGNI COPPIA DI PARTICELLE COSTITUISCE UNA COPPIA DI BRACCIO NULLO, VETTORI OPPOSTI CHE GIACCONO SULLA STESSA RETTA. SE DUE FORZE GIACCONO SULLA STESSA RETTA D'AZIONE, IL MOMENTO RISPETTO AD UN GENERICO POLO È NULLO.

DINAMICA DELL'INTERO SISTEMA DI N PARTICELLE (1)

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA Q.T.A. DI MOTO (3)

ADESSO NON SI CONSIDERA PIÙ IL COMPORTAMENTO DELLA SINGOLA PARTICELLA, BENSÌ IL SISTEMA DI N EQUAZIONI, QUINDI DI N PARTICELLE;

PER IL 2^o PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$\sum_{K=1}^N m_K \frac{d\vec{v}_K}{dt} = \sum_{K=1}^N (\vec{F}_K^E + \vec{F}_K^I)$$

POICHÉ DALLA (5) SO CHE $\sum_{K=1}^N \vec{F}_K^I = \vec{F}^I = \vec{0}$, IL SECONDO MEMBRO SI SEMPLIFICA:

$$\sum_{K=1}^N m_K \frac{d\vec{v}_K}{dt} = \sum_{K=1}^N \vec{F}_K^E$$

POICHÉ SI ASSUME CHE m_K È COSTANTE PER TUTTE LE K PARTICELLE (COSTANTE NEL TEMPO) POSSO PORTARLO FUORI MA IN QUESTO CASO MI SERVE ALL'INTERNO DEL DIFFERENZIALE (È GIÀ FUORI IN REALTÀ, QUINDI LO SPOSTO DENTRO); INOLTRE PORTO FUORI LA DERIVATA, IN QUANTO OPERATORE LINEARE NEL MOMENTO IN CUI $m_K = \text{COSTANTE}$, DIVENTA QUINDI:

$$\frac{d}{dt} \sum_{K=1}^N m_K \vec{v}_K = \sum_{K=1}^N \vec{F}_K^E$$

DIMOSTRAZIONE: DIMOSTRO COME HO PORTATO FUORI LA DERIVATA, QUINDI L'UGUAGLIANZA DELLE DUE EQUAZIONI:

$$\text{DATO } \vec{r}(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \text{ E RICORDANDO CHE } \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt}(v_1)\hat{i} + \frac{d}{dt}(v_2)\hat{j} + \frac{d}{dt}(v_3)\hat{k}$$

ALLORA:

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} (m_k \vec{v}_k) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \textcircled{2}$$

QUINDI: CASO IN CUI $N=2$

$$\textcircled{2} = \frac{d}{dt} (m_1 v_{11}) \hat{i} + \frac{d}{dt} (m_1 v_{12}) \hat{j} + \frac{d}{dt} (m_1 v_{13}) \hat{k} + \frac{d}{dt} (m_2 v_{21}) \hat{i} + \frac{d}{dt} (m_2 v_{22}) \hat{j} + \frac{d}{dt} (m_2 v_{23}) \hat{k}$$

$$\textcircled{2} \frac{d}{dt} [(m_1 v_{11}) \hat{i} + (m_1 v_{12}) \hat{j} + (m_1 v_{13}) \hat{k} + (m_2 v_{21}) \hat{i} + (m_2 v_{22}) \hat{j} + (m_2 v_{23}) \hat{k}]$$

L'UGUAGLIANZA È VERIFICATA

ADESSO DEFINISCO LA **QUANTITÀ DI MOTO** $\vec{q}_k$ COME:

$$\vec{q}_k = m_k \vec{v}_k \quad \text{Q.T.A. DI MOTO ASSOCIATA ALLA K-ESIMA PARTICELLA}$$

QUINDI L'EQUAZIONE DEL 2° PRINCIPIO DIVENTA:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{q}_k = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \overbrace{m_k \vec{v}_k}^{\vec{q}_k} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^e$$

DEFINENDO POI:

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^N \vec{q}_k \quad \text{QUANTITÀ DI MOTO TOTALE}$$

SVOLGENDO L'EQUAZIONE OTTENGO:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^e \textcircled{7} \quad \text{EQUAZIONE DELLA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$$

CIÒ INDICA CHE SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È $\vec{0}$ ALLORA LA Q.T.A. DI MOTO SI CONSERVA.

IN GENERALE UN SISTEMA DI N PARTICELLE LIBERE DI MUOVERSI NELLO SPAZIO (PARTICELLE NON VINCOLATE) HA **$3N$ GRADI DI LIBERTÀ**, OVVERO HA BISOGNO DI **$3N$ PARAMETRI** PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE LO STATO (POSIZIONE DI OGNI SINGOLA PARTICELLA) DEL SISTEMA. QUINDI A **$3N$ PARAMETRI** CORRISPONDONO **$3N$ LEGGI DEL MOTO**.

A COSA SERVE LA Q.T.A. DI MOTO?

CENTRO DI MASSA $\textcircled{4}$

ESISTE UN PUNTO DELLO SPAZIO LE CUI COORDINATE SONO DEFINITE COME LA **MEDIA** DELLE COORDINATE DELLE SINGOLE PARTICELLE PESATE CON LA MASSA TOTALE.

DEFINITA M COME:

$$M = \sum_{k=1}^N m_k \textcircled{8} \quad \text{MASSA TOTALE}$$

ALLORA:

$$\vec{x}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k \textcircled{9} \quad \text{CENTRO DI MASSA}$$

$\vec{x}_G$ È IPOTETICO PUNTO MATERIALE CHE HA LA MASSA PARI ALLA MASSA DELL'INTERO SISTEMA (O MEGLIO $\vec{x}_G$ È VETT. POSIZIONE A CUI POSSIAMO ASSOCIARE M); OCCUPA ISTANTE PER ISTANTE LA POSIZIONE OCCUPATA DAL CENTRO DI MASSA

SI OSSERVA CHE L'EQUAZIONE PUÒ ESSERE RISCritta COME:

$$M \vec{x}_G = \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k$$

$$M \vec{x}_G - \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k = \vec{0} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_G - \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k = \vec{0}$$

NON SIGNIFICA CHE IN QUEL DATO PUNTO CI DEVE ESSERE UNA MASSA! PUÒ CORRISPONDERE AD UN PUNTO VUOTO DELLO SPAZIO

DA CUI:

$$\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_G - \vec{x}_k) = \vec{0} \quad \text{IN CUI SI È RISCritto } m \text{ TRAMITE LA (8): } m = \sum_{k=1}^N m_k$$

DEFINISCO LA QUANTITÀ DI MOTO E LA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA:

RIPRENENDO LA (9):

$$\vec{x}_G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k \rightarrow m \vec{x}_G = \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k$$

SE DERIVO ENTRAMBI I MEMBRI IN $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}(m \vec{x}_G) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k \quad \text{IN CUI AL SECONDO MEMBRO DALL'INTERNO L'HO PORTATA FUORI PER LA DIMOSTRAZIONE VISTA PRIMA.}$$

IL 2° MEMBRO È PROPRAMENTE $\vec{q}$ INFATTI:

$$\vec{q}_k = m_k \vec{v}_k \quad \text{MA } \vec{q} = \sum_{k=1}^N \vec{q}_k \rightarrow \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \vec{q}$$

NEL CASO DI SOPRA HO PRIMA LA SOMMATORIA DI $m_k \vec{x}_k$ CHE DERIVATA SARÀ LA SOMMA DI TUTTI I $\vec{q}_k$ DEL SISTEMA
DA CIO' SEGUE CHE:

$$\frac{d}{dt}(m \vec{x}_G) = \vec{q} \iff m \vec{v}_G = \vec{q} \quad \text{QUANTITÀ DI MOTO}$$

QUINDI SI È ASSOCIATA QUANTITÀ DI MOTO AL CENTRO DI MASSA QUINDI ALLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA.

5) MOMENTO TOTALE RISPETTO AL CENTRO DI MASSA (POLO) DEL CAMPO DI FORZE

DEFINISCO UN CAMPO VETTORIALE DI FORZE $\vec{f}^E$ DEFINITO DA:

$$\vec{f}_k^E = m_k \vec{a} \iff \vec{f}^E = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \quad \text{CAMPO DI FORZE } \vec{f}^E$$

IN CUI $\vec{a} = \text{COSTANTE}$

È QUINDI CAMPO DI FORZE DI NATURA INERZIALE OSSIA $\propto m$ IN CUI L'ACCEL È UNIFORME (COSTANTE).

QUINDI IL MOMENTO TOTALE RISPETTO AL POLO $\vec{x}_G$:

$$\vec{M}_G^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times (m_k \vec{a}) = \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{MOMENTO TOTALE RISPETTO AL POLO } \vec{x}_G$$

IN CUI PER ARRIVARE AL RISULTATO SI È SFRUTTATO:

• PRODOTTO VETTORIALE È BILINEARE: DATI $\vec{a}$ E $\vec{b}$ E K SCALARE, ALLORA:

$$K \vec{a} \times \vec{b} = K (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times K \vec{b} \quad \text{QUINDI IN QUESTO CASO È } m = K$$

$$\bullet \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_G - \vec{x}_k) = \vec{0}$$

QUINDI CIÒ SIGNIFICA CHE QUALUNQUE SOLLECITAZIONE ASSOCIATA AD UN CAMPO VETTORIALE DI FORZE DI NATURA INERZIALE HA MOMENTO Nullo RISPETTO AL CENTRO DI MASSA.

NELE NOSTRE APPLICAZIONI CONSIDERIAMO $\vec{a} = \vec{g}$ COME SE L'ACCEL. DI GRAVITÀ FOSSE UNIFORME MA IN REALTÀ VARIA, DI POCO MA VARIA.
SE CONSIDERIAMO $\vec{g}$ UNIFORME ALLORA IL CENTRO DI MASSA = BARICENTRO ACRONTI

COME FATTO PRIMA CALCOLO L'EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO:

SI È DIMOSTRATO CHE:

$$\vec{q} = m \vec{v}_G \quad \text{OSSIA} \quad \vec{q} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{x}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k$$

MI SERVE QUESTA RELAZIONE PERCHÉ:

PER CALCOLARE LA CONS. DELLA Q.TÀ DI MOTO SO CHE:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^E \quad \text{OSSIA} \quad \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{x}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} (m \vec{x}_G) \right] = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_G) \rightarrow \text{HO LEGATO LA Q.TÀ DI MOTO A } \vec{v}_G \text{ LA CUI DERIVATA CORRISPONDE ALLA CONS. DELLA Q.TÀ DI MOTO}$$

$$\frac{d\vec{q}_G}{dt} = \vec{f}^E$$

EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO ASSOCIATA AL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_G$

QUINDI INVECE DI CONSIDERARE N PARTICELLE, LA CONS. DELLA Q.TÀ DI MOTO È CALCOLABILE TRAMITE IL CENTRO DI MASSO

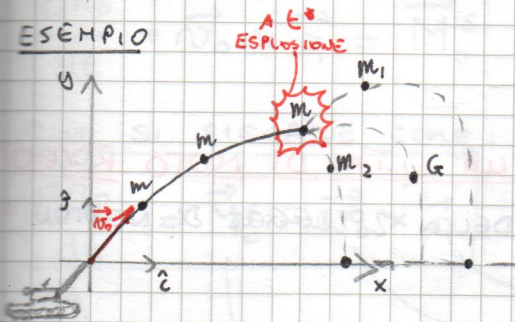
QUINDI:

$$\vec{q} = \vec{q}_G$$

QUANTITÀ DI MOTO DI UN SISTEMA PARTICELLARE UGUALE A QUANTITÀ DEL CENTRO DI MASSA DELLO STESSO SISTEMA

COME SI MUOVE IL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_{CM}$?

ESEMPIO



IL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_G(t)$ È:

$$\vec{x}_G(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k(t)$$

L'ESPLOSIONE È CONSEGUENZA DELLA LIBERAZIONE DI FORZE INTERNE AL SISTEMA IL MOTO NON È INFLUENZATO DALL'ESPLOSIONE

L'EQ. DEL MOTO CHE DEFINISCE QUESTO MOTO È:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

MENTRE $M = m_1 + m_2$ A SEGUITO DELL'ESPLOSIONE

DATO QUESTO PROBLEMA DOVE NON SI SONO IMPOSTE $\vec{f}^E$ AGGIUNTIVE MA SI HA SOLO LA FORZA PESO CON LA RELATIVA REAZIONE. PER OGNI PUNTO DEL PROBLEMA SI HA:

$$-m\vec{g} + \vec{R}_N = \vec{0} \quad \begin{matrix} \uparrow \vec{R}_N \\ \downarrow -m\vec{g} \end{matrix} \rightarrow \vec{f}^E = \vec{0}$$

SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA ALLORA SI HA CHE DALLA I EQ. EADINALE DEI SISTEMI DI PUNTI:

$$\frac{d\vec{q}_{CM}}{dt} = \vec{f}^E \rightarrow \frac{d\vec{q}_{CM}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{q}_{CM} = \text{COSTANTE} \rightarrow \text{SIGNIFICA CHE LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA SI CONSERVA PRIMA E DOPO L'ESPLOSIONE}$$

DATO T_F , ISTANTE NEL QUALE G (OSSIA $\vec{x}_{CM}$) HA QUOTA NULLA:

$$\vec{x}_G = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^2 m_k \vec{x}_k \rightarrow m \vec{x}_G(t) = m_1 \vec{x}_1(t) + m_2 \vec{x}_2(t)$$

CHE DIVENTA:

$$m \vec{x}_G(t) - m_1 \vec{x}_1(t) - m_2 \vec{x}_2(t) = \vec{0}$$

PER AVERE PIU' INFORMAZIONI SULLA DINAMICA DEL SISTEMA

MOMENTO DELLE $\vec{f}^E$ RISPETTO UN GENERICO POLO $\vec{x}_0$

$$\vec{M}_0^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$$

CHE PROVIENE DA (IN CASO DI UNA SOLA PARTICELLA):

$$\vec{M}_{0K}^E = (\vec{x}_K - \vec{x}_0) \times m_K \frac{d\vec{v}_K}{dt}$$

VALIDA PER OGNI PARTICELLA K-ESIMA DEL SISTEMA.

MOMENTO TOTALE DELLE $\vec{f}^E$ E $\vec{f}^I$ RISPETTO UN GENERICO POLO $\vec{x}_0$

QUINDI $\vec{f}$ È LA RISULTANTE DELLE $\vec{f}^E + \vec{f}^I$ OSSIA $\vec{f} = \vec{f}^I + \vec{f}^E$. SI PUÒ SCRIVERE IL MOMENTO RISPETTO ALLA RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO AD UN GENERICO POLO

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f} = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times (\vec{f}_k^I + \vec{f}_k^E)$$

MA DA DEFINIZIONE SO CHE:

$$\vec{f}^I = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I = \vec{0}$$

QUINDI:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_k^E$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO RISPETTO UN POLO GENERALE

ASSEGNATO UN POLO ARBITRARIO $\vec{x}_0$, SI PRENDE L'EQ. DELLA 2ª LEGGE DI NEWTON E LA SI MOLTIPLICA VETTORIALMENTE PER:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{f}_k^E + \vec{f}_k^I \quad \text{2ª LEGGE DI NEWTON}$$

MOLTIPLICANDOLA VETTORIALMENTE PER $(\vec{x}_k - \vec{x}_0)$ E SOMMANDO TUTTE LE PARTICELLE:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_k^E \quad *$$

IN CUI $m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{f}_k = \vec{f}_k^E + \vec{f}_k^I$ MA DA DEF. $\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I = \vec{0}$. RICORDANDO IN OTTE CHE NEL CASO IN CUI $m_k = \text{COSTANTE}$ ALLORA SI HA CHE d/dt È OPERATORE LINEARE E PUO' ESSERE PORTATO FUORI DALLA SOMMATORIA:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k \right] = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_k^E$$

IN CUI DEFINISCO **MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA DI PARTICELLE RISPETTO AL POLO GENERALE $\vec{x}_0$** :

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{q}_k$$

SE ADESSO SVILUPPO LA DERIVATA DI $\vec{h}_0$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{h}_0) = \sum_{k=1}^N (\vec{v}_k - \vec{v}_0) \times m_k \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}$$

LA POSSO SEMPLIFICARE INFATTI:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^E$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL SISTEMA S

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0^E - \vec{v}_0 \times m \vec{v}_G$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

① 1° EQ. CARDINALE

DESCRIVE LA DINAMICA DEL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_G$ DEL SISTEMA S

② 2° EQ. CARDINALE

DESCRIVE IL MOTO DELLA PARTICELLA DEL SISTEMA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_G$ DEL SISTEMA S.

ORA SI ANALIZZA IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL SISTEMA $\vec{h}_0$:

MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO: MOTO DEL SISTEMA DI PARTICELLE INTORNO A $\vec{x}_G$

DEFINITO IN PRECEDENZA $\vec{h}_0$ E IL C.D.M. $\vec{x}_G$, RIPRENDO LA DEFINIZIONE DI $\vec{h}_0$ VISTA PRIMA, CIOÈ:

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k$$

A QUESTO PUNTO PER PROCEDERE, AGGIUNGO E SOTTRAGGO UNA STESSA Q.TÀ:

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G + \vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G + \vec{v}_G) \Rightarrow \text{LO SVILUPPO} =$$

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_G + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_G$$

RISCRIVENDO L'EQ. NEL SEGUENTE MODO:

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + \underbrace{\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_G}_{1^\circ} + \underbrace{\sum_{k=1}^N (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G)}_{2^\circ} + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_G$$

IN CUI:

$$1^\circ \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_G \xrightarrow[\text{COME}]{\text{LA RISCRIVO}} \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times \vec{v}_G$$

ESSENDO $m_k = \text{cost}$

$$\text{HA } \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) = \vec{0} \text{ PER DEFINIZIONE DI CENTRO DI MASSA } \vec{x}_G$$

OSSIA

$$\vec{x}_G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^N \frac{m_k \vec{x}_k}{m_k}$$

2° ESSENDO $\vec{x}_G$ E $\vec{x}_0$ NON DIPENDONO DALLA SOMMA; FUORI DALLA SOMMATORE E RISCRIVERE L'EQ. COME:

$$= (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) = \text{MA } \vec{v}_k = \frac{d\vec{x}_k}{dt} \text{ E } \vec{v}_G = \frac{d\vec{x}_G}{dt}$$

ALLORA:

$$= (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\vec{x}_k}{dt} - \frac{d\vec{x}_G}{dt} \right) =$$

ESSENDO $m_k = \text{costante}$, ALLORA:

$$= (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times \sum_{k=1}^N \frac{d}{dt} [m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G)]$$

PORTANDO FUORI LA DERIVATA, SI HA:

$$(\vec{r}_G - \vec{x}_0) \times \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \right]$$

AN CHE QUESTO CASO RICADE NEL 1° QUINDI $\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) = \vec{0}$

DUNQUE L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_G$$

QUE LA SVILUPPO COME:

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_k - \underbrace{\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_G}_{(3^\circ)} + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_G$$

PER LO STESSO RAGIONAMENTO VISTO PRIMA IN 1° E 2° ANCHE 3° SI ANNULLA. QUINDI

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_G$$

↓ SVOLGENDO IL CALCOLO, PORTANDO FUORI $(\vec{x}_G - \vec{x}_0)$ OTTENGO

$\vec{h}_G$
MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL SISTEMA AVERENDO SCELTO COME POLO $\vec{x}_G$

$(\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m \vec{v}_G$
RAPPRESENTA IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL CENTRO DI MASSA RISPETTO AL GENERICO POLO $\vec{x}_0$ CONSIDERANDO QUINDI COME SE L'INTERA MASSA FOSSE IN QUEL PUNTO

QUINDI $\vec{h}_0$ È DATO DA:

$$\vec{h}_0 = \vec{h}_G + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m \vec{v}_G$$

È INDICATIVO DEL MOTO DI S INTORNO AL SUO CDM $\vec{x}_G$
MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL SISTEMA DI PARTICELLE INTORNO AL SUO CDM

PENSA IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DI S INTORNO AD UN GENERICO POLO È DATO DALLA SOMMA DI 2 CONTRIBUTI: RIPETENDO ALCUNE COSE SCRITTE SOPRA: IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DI S RISPETTO AL CM E IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO DEL CM RISPETTO AD UN POLO GENERICO 0

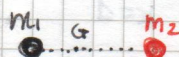
1° $\vec{h}_G$ È STATO DERIVATO DA QUESTA RELAZIONE: *

$$\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{v}_k - \sum \dots$$

VELOCITÀ RELATIVA, OSSIA È VELOCITÀ DI OGNI PARTICELLA RISPETTO ALLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA. È QUINDI MOTO RELATIVO DI CIASCUNA PARTICELLA RISPETTO AL MOTO DI $\vec{x}_G$.

ESEMPIO APPLICATIVO

SISTEMA SEMPLICE DI 2 PARTICELLE



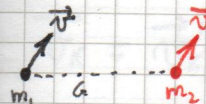
PER DEFINIRE IL MOTO DELLE PARTICELLE RISPETTO AL CDM G:

$$\vec{h}_G = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G)$$

$$\text{IN CUI } \vec{x}_G = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m}$$

$$\text{HP} \mid \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \forall t$$

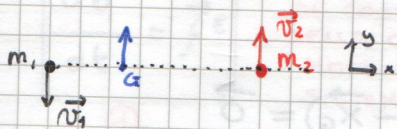
$$E \quad m = m_1 + m_2$$



NEL TEMPO LO SPOSTAMENTO DELLE MASSE SARA' SEMPRE LO STESSO E SARA' SEMPRE UGUALE LO SPOSTAMENTO DI G

$$\vec{h}_G = \vec{0} \quad \text{poiché} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

ALTRO ESEMPIO



HO CHE:

$$\vec{v}_1 = \alpha (\vec{x}_1 - \vec{x}_G)$$

$$\vec{v}_2 = \alpha (\vec{x}_2 - \vec{x}_G)$$

SE CALCOLO IL MOMENTO INTORNO AL CDM G:

$$\vec{h}_G = (\vec{x}_1 - \vec{x}_G) \times m_1 \alpha (\vec{x}_1 - \vec{x}_G) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_G) \times m_2 \alpha (\vec{x}_2 - \vec{x}_G) = \vec{0}$$

IN QUESTO CASO NON VARIANO LE DISTANZE DELLE PARTICELLE DA G ISTANTE PER ISTANTE

BILANCIO ENERGETICO DEI SISTEMI PARTICELLARI

RIPRENDENDO LA 2^{DA} LEGGE DI NEWTON:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{f}_k^I + \vec{f}_k^E$$

MOLTIPLICANDO SCALARMENTE AMBO I MEMBRI PER $\vec{v}_k$, VELOCITÀ DELLA SINGOLA PARTICELLA.

$$m_k \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k \right) = \vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k + \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k$$

PASSANDO AL SISTEMA DI N PARTICELLE:

$$\sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k \right) = \sum_{k=1}^N \left(\vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k + \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k \right) *$$

A QUESTO PUNTO DEFINISCO L'ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA PARTICELLARE:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2$$

$$\text{IN CUI } v_k^2 = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = \|\vec{v}_k\|^2$$

E. CINETICA DI UN S. DI PARTICELLE

QUINDI RIPRENDENDO * HO CHE IL I MEMBRO POSSO RISCRIVERLO COME:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{dv_k^2}{dt} \xrightarrow[\text{A UOVA}]{\text{ESSENDO } m_k \text{ COSTANTE}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{dm_k v_k^2}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right) \left[\sum_{k=1}^N m_k v_k^2 \right] = \frac{d\mathcal{T}}{dt} \leftarrow$$

MENTRE IL SECONDO MEMBRO ESSENDO COSTITUITO DA PRODOTTI SCALARI TRA FORZE E VELOCITÀ, ALLORA:

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k = P^I$$

POTENZA SVILUPPATA DALLE FORZE INTERNE

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k = P^E$$

POTENZA SVILUPPATA DALLE FORZE ESTERNE

HO DEFINITO 2 POTENZE

NON È VERO CHE $P^I = 0$! POSSO DIRE CHE $\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I = \vec{0}$ MA NON LA P^I ! QUINDI, IN GENERALE, $P^I \neq 0$!

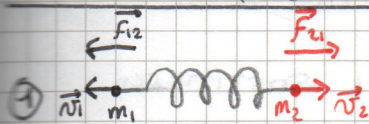
DUNQUE

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = P^I + P^E$$

VARIAZIONE DI EN. CINETICA

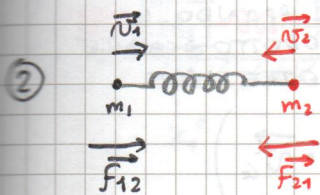
LA DERIVATA TEMPORALE DELLA ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA PARTICELLARE È PARI, IN QUEL ISTANTE, ALLA POTENZA SVILUPPATA DALLE FORZE INTERNE ED ESTERNE

ESEMPIO APPLICATIVO



DOPO AVERLE COMPRESSE

$$P_{(1)}^I = \vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{12} \cdot \vec{v}_1 \neq 0$$



DOPO AVERLE ALLONTANATE

$$P_{(2)}^I = \vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{12} \cdot \vec{v}_1 \neq 0$$



ALL'EQUILIBRIO

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{f}_{12} = \vec{f}_{21} = \vec{0} \rightarrow P_{(3)}^I = 0$$

POICHÉ LA FORZA ELASTICA $\vec{F}_e$ È CONSERVATIVA, È POSSIBILE DEFINIRE IL POTENZIALE:

TORNANDO ALLA RELAZIONE DELLA VARIAZIONE DELL'EN. CINETICA:

$$\frac{dT}{dt} = P^I + P^E$$

PASSANDO ALLA VARIAZIONE INFINITESIMA DEGLI SPOSTAMENTI DELLE PARTICELLE DEL SISTEMA, OSSIA:

$$d\vec{x}_k = \vec{v}_k dt$$

POSSO SCRIVERE:

$$dT = dZ^E + dZ^I$$

IN CUI

$$dZ^E = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x}_k$$

$$dZ^I = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x}_k$$

LAVORI COMPIUTI DA FORZE INTERNE ED ESTERNE ASSOCIATI AGLI SPOSTAMENTI INFINITESIMI $d\vec{x}_k$ CON $k=1, \dots, N$

SE SI CONSIDERA UN INTERVALLO DI TEMPO FINITO COME $[t_1, t_2]$ DURANTE IL QUALE IL K-ESIMO ELEMENTO SEGUE UN PERCORSO C_k OSSIA:

$C_k \rightarrow \vec{x}_{1k} = \vec{x}_k(t_1)$ A $\vec{x}_{2k} = \vec{x}_k(t_2)$; INTEGRANDO:

$$\int_{t_1}^{t_2} dT = \sum_{k=1}^N \left[\int_{\vec{x}_{1k}}^{\vec{x}_{2k}} \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x}_k + \int_{\vec{x}_{1k}}^{\vec{x}_{2k}} \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x}_k \right] \rightarrow T_2 - T_1 = Z_{C(1 \rightarrow 2)}^E + Z_{C(1 \rightarrow 2)}^I$$

QUINDI LA VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA PARTICELLARE IN UN DATO INTERVALLO DI TEMPO FINITO È PARI AL LAVORO COMPIUTO DA TUTTE LE FORZE AGENTI, SIA ESTERNE CHE INTERNE, SULLE STESSA PARTICELLE DEL SISTEMA S DURANTE IL LORO MOTO TRA LE POSIZIONI INIZIALI $\vec{x}_{1k}$ E FINALI $\vec{x}_{2k}$.

TEOREMA DI KÖENIG

È TEOREMA CHE RIGUARDA SEMPRE L'ENERGIA CINETICA DEI SISTEMI PARTICELLARI DEFINISCO:

$$\vec{v}_k' = \vec{v}_k - \vec{v}_G$$

VELOCITÀ RELATIVA DELLA PARTICELLA K-ESIMA INTORNO AL CENTRO DI MASSA

DA CUI:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_k' + \vec{v}_G$$

RIPRENDO LA DEFINIZIONE DI E. CINETICA $\mathcal{T}$ DI UN SIST. PARTICELLARE:

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 \quad \text{IN CUI SO CHE } v_k^2 = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \quad \text{QUINDI SOSTITUISCO:}$$

$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k' + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_k' + \vec{v}_G) \Rightarrow \text{Sviluppando il prodotto scalare OTTENGO:}$$

$$\star = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_k' + \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} m_k \vec{v}_G \cdot \vec{v}_k' + \frac{1}{2} m_k \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G \right)$$

ANALIZZO L'ARGOMENTO DELLA SOMMATORIA: ①

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} m_k \vec{v}_G \cdot \vec{v}_k' \right) = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_G \xrightarrow{\text{Sviluppando } \vec{v}_k' \text{ come: } \vec{v}_k' = \vec{v}_k - \vec{v}_G} \text{OTTENGO} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) \cdot \vec{v}_G = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\vec{x}_k}{dt} - \frac{d\vec{x}_G}{dt} \right) \cdot \frac{d\vec{x}_G}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^N m_k \left[\frac{d}{dt} ((\vec{x}_k - \vec{x}_G) \cdot \vec{x}_G) \right] \xrightarrow[\text{CUI } m_k = \text{cost}]{\text{NEL MOMENTO IN}} = \frac{d}{dt} \left[\sum m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \cdot \vec{x}_G \right] = 0$$

PER DEFINIZIONE DI CM

QUINDI

$$\star = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} m_k \vec{v}_k' \cdot \vec{v}_k' + \frac{1}{2} m_k \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G \right) \Rightarrow \text{Sviluppo il } \textcircled{2} \text{ MENTRE IL } \textcircled{3} \text{ LO RISOLVO NORMALMENTE}$$

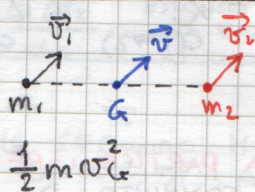
$$\mathcal{T} = \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_G) \right] + \frac{1}{2} m v_G^2$$

ENERGIA CINETICA ASSOCIATA ALLE PARTICELLE RELATIVA AL MOTO ATTORNO AL CENTRO DI MASSA, ASSOCIATA QUINDI A QUELLE COMPONENTI DEL MOTO NELLE QUALI IL CDM SI MANTIENE FERMO.

ENERGIA CINETICA ASSOCIATA AL MOTO DEL CDM DEL SISTEMA PARTICELLARE AVENTE COME MASSA L'INTERA MASSA DI S.

ESEMPIO APPLICATIVO

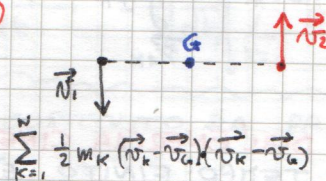
①



$$m = m_1 = m_2$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$$

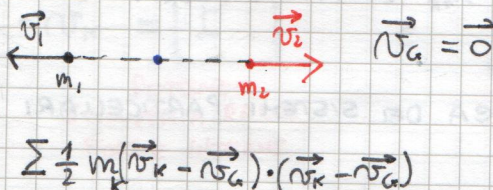
②



$$m_1 = m_2 = m$$

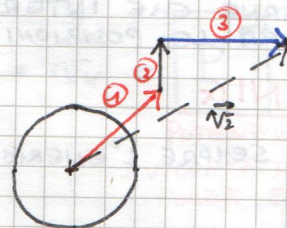
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

$$\vec{v}_G = \vec{0}$$



$$\vec{v}_G = \vec{0}$$

$$\sum \frac{1}{2} m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_G)$$

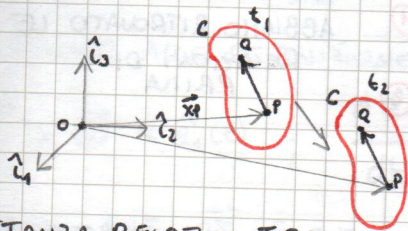


$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

STATO CINEMATICO È FOTOGRAFIA DI UNO STATO ISTANTANEO, LA DISTANZA TRA LE PARTICELLE NON CAMBIA.

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

CORPO RIGIDO È DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MASSA COSTITUITA DA PUNTI MATERIALI. LA DISTANZA RELATIVA TRA OGNI COPPIA DI PUNTI MATERIALI DEL SISTEMA PARTICELLARE NON VARIA NEL TEMPO. IL CORPO NON PUÒ MODIFICARE LA SUA FORMA MA IL SUO ORIENTAMENTO RISPETTO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO NELLO SPAZIO. SI PARLA QUINDI DI SISTEMI RIGIDI PER INDICARE CHE LE PARTICELLE/PUNTI OCCUPANO UNA CERTA ZONA NELLO SPAZIO. STUDIAMO QUINDI L'ATTO DI MOTO RIGIDO.



DEFINITO $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$, SISTEMA DI RIF. FISSO

ALL'ISTANTE t_1 IL CORPO RIGIDO C SI TROVA IN UNA DATA POSIZIONE. ALL'ISTANTE SUCCESSIVO t_2 IL CORPO C SI TROVA IN UN'ALTRA CONFIGURAZIONE, MA TALE PER CUI IL VETTORE DA UNO QUALSIASI DEI PUNTI AD UN ALTRO (es. PQ) SIA UGUALE PER QUALUNQUE ALTRA CONFIGURAZIONE (PIÙ CHE UGUALE, CHE ABBA STESSO MODULO E CHE SIA PARALLELO).

LA DISTANZA RELATIVA TRA P E Q DEVE RIMANERE INVARIABILE

SI PUÒ SCRIVERE CHE:

PURA TRASLAZIONE

$$\vec{x}_Q = \vec{x}_P + \vec{PQ} \quad \text{IN CUI} \quad \vec{x}_Q = \vec{x}_Q(t) \quad \text{E} \quad \vec{x}_P = \vec{x}_P(t)$$

$$\text{SE GUE CHE} \quad \frac{d(\vec{x}_P + \vec{PQ})}{dt} \quad \text{POICHÉ} \quad \frac{d\vec{PQ}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_Q = \frac{d\vec{x}_Q(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}_P(t)}{dt} = \vec{v}_P \quad \rightarrow \text{ANCHE} \rightarrow \vec{a}_Q = \vec{a}_P$$

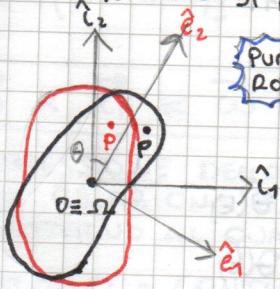
IN QUESTO CASO SI PARLA DI MOTO DI TRASLAZIONE. Istante per istante la VELOCITÀ DI OGNI PUNTO APPARTENENTE AL SISTEMA È UGUALE.

MOTO PIANO

SI ANALIZZA UN ALTRO MOTO:

SI DEFINISCONO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO $\mathcal{R}_1(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ E $\mathcal{R}_2(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ IN CUI LE DUE ORIGINI $O \equiv \Omega$ (IN QUESTO CASO).

SI CONSIDERA IL MOTO DI ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE, PERPENDICOLARE AL PIANO DEL MOTO. SI È QUINDI RESO SOLIDALE IL PRIMO SISTEMA IL SECONDO. LA POSIZIONE DI UN PUNTO LA POSSO ESPRIMERE IN ENTRAMBI I SISTEMI DI RIFERIMENTO $\mathcal{R}_1$ E $\mathcal{R}_2$.



PURA ROTAZIONE

C'È ANCHE $\hat{i}_3$ E $\hat{e}_3$ USCENTI DAL FOGLIO.

$$\vec{x}_P(t) = (\vec{x}_P \cdot \hat{i}_1) \hat{i}_1 + (\vec{x}_P \cdot \hat{i}_2) \hat{i}_2 = x_1(t) \hat{i}_1 + x_2(t) \hat{i}_2 = \sum_{k=1}^N x_k(t) \hat{i}_k$$

STESSO RAGIONAMENTO PER IL S.D.R. $\mathcal{R}_2$:

$$\vec{y}_P(t) = (\vec{x}_P \cdot \hat{e}_1) \hat{e}_1 + (\vec{x}_P \cdot \hat{e}_2) \hat{e}_2 = y_1 \hat{e}_1(t) + y_2 \hat{e}_2(t) = \sum_{k=1}^N y_k \hat{e}_k(t)$$

IN QUESTO SECONDO CASO NON È LA COMPONENTE A VARIARE MENTRE IL S.D.R. È FISSO MA È IL S.D.R. A VARIARE MENTRE LA COMPONENTE È CONSEGUENTE AL NUOVO SISTEMA $\mathcal{R}_2$ NELLO SPAZIO

QUINDI LA VELOCITÀ NEL PUNTO P:

$$\vec{v}_P(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dx_2(t)}{dt} \hat{i}_2 = y_1 \frac{de_1(t)}{dt} + y_2 \frac{de_2(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{dx_k(t)}{dt} \hat{i}_k(t) = \sum_{k=1}^N y_k \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt}$$

QUESTE ESPRESSIONI DI SOPRA EVIDENZIANO QUINDI LA VELOCITÀ DEL PUNTO P IN DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI E INDICANO UN MOTO ROTATORIO (PIANO) ATTORNO AD UN ASSE CENTRALE. SI PUÒ PERÒ DEFINIRE IL MOTO ROTATORIO IN UN ALTRO MODO:

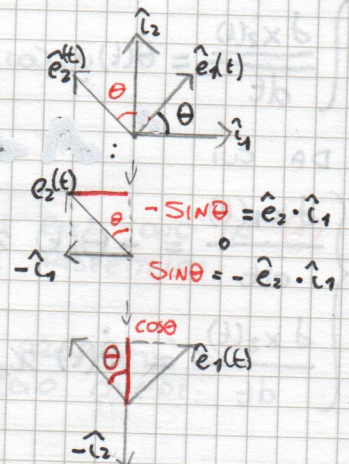
I METODO

SI RIPRENDONO I VERTORI $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ NELLA RAPP. NEL SDR $\mathcal{R}_1(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$

$$\begin{cases} \hat{e}_1(t) = (\hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_1) \hat{i}_1 + (\hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_2) \hat{i}_2 = \cos[\theta(t)] \hat{i}_1 + \sin[\theta(t)] \hat{i}_2 \\ \hat{e}_2(t) = (\hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_1) \hat{i}_1 + (\hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_2) \hat{i}_2 = -\sin[\theta(t)] \hat{i}_1 + \cos[\theta(t)] \hat{i}_2 \end{cases}$$

DA CUI: ($\hat{e}_3$ NON CI SERVE MA CORRISPONDE A $\hat{i}_3$)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) (-\sin\theta(t) \hat{i}_1 + \cos\theta(t) \hat{i}_2) = \dot{\theta}(t) \hat{e}_2(t) \quad (1) \\ \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) (-\cos\theta(t) \hat{i}_1 - \sin\theta(t) \hat{i}_2) = -\dot{\theta}(t) \hat{e}_1(t) \quad (2) \end{cases}$$



ADESSO VA INTRODOTTI UN NUOVO VETTORE, IL VETTORE **VELOCITÀ ANGOLARE**, TALE PER CUI L'INTENSITÀ È PARI A $\dot{\theta}(t)$, PARAMETRO ANGOLARE CHE RAPPRESENTA L'ORIENTAMENTO, DIRETTO LUNGO IL VERSORE $\hat{e}_3$, OSSIA L'ASSE INTORNO ALLA QUALE IL SISTEMA STA RUOTANDO.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{i}_3 \quad \text{VELOCITÀ ANGOLARE}$$

SI NOTA COME:

$$\begin{cases} \vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \dot{\theta} (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) = \dot{\theta} \hat{e}_2 = \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} & (1) \\ \vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \dot{\theta} (\hat{e}_3 \times \hat{e}_2) = -\dot{\theta} \hat{e}_1 = \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} & (2) \end{cases}$$

ABBIAMO RITROVATO LE RELAZIONI DI PRIMA

MENTRE $\vec{\omega} \times \hat{e}_3 = 0$ POICHÉ $\vec{\omega} \parallel \hat{e}_3$

IN GENERALE:

$$\frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k(t)$$

FORMULE DI POISSON

LE DERIVATE RISPETTO AL TEMPO DEI VERSORI MOBILI SONO IL PRODOTTO VETTORIALE TRA LA V. ANGOLARE E QUEL VERSORE

NEL CASO PRECEDENTE SI TRATTA DI FORMULE DI POISSON IN 2D.

QUESTE RELAZIONI CI SERVONO IN SEGUITO PER DEFINIRE LA VELOCITÀ DEL PUNTO P $\rightarrow \vec{v}_P$

II METODO

ALTRO METODO PER GIUNGERE ALLA DEFINIZIONE DI $\vec{v}_P$ È:

SI RIPRENDE LA RELAZIONE TRA IL PRIMO SDR E IL SECONDO NELLA DEFINIZIONE DEL VETTORE POSIZIONE GENERICO CHE DEFINISCE UN PUNTO MATERIALE DEL CORPO RIGIDO:

$$\vec{x}_P(t) = \vec{y}_P(t) = x_1(t) \hat{i}_1 + x_2(t) \hat{i}_2 = y_1 \hat{e}_1(t) + y_2 \hat{e}_2(t) \quad (1)$$

MOLTIPLICO SCALARMENTE LA (1) PER $\hat{i}_1$ E $\hat{i}_2$ (VERSORI DI $\mathcal{R}_1$):

$$\begin{cases} x_1(t) \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 + x_2(t) \hat{i}_2 \cdot \hat{i}_1 = y_1 \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_1 + y_2 \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_1 \\ x_1(t) \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2 + x_2(t) \hat{i}_2 \cdot \hat{i}_2 = y_1 \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_2 + y_2 \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_1 + y_2 \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_1 \\ x_2(t) = y_1 \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_2 + y_2 \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{COME} \\ \rightarrow \text{VISTO} \\ \text{PRIMA} \end{matrix} \quad \begin{cases} \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_1 = \cos \theta(t) \\ \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_1 = -\sin \theta(t) \\ \hat{e}_1(t) \cdot \hat{i}_2 = \sin \theta(t) \\ \hat{e}_2(t) \cdot \hat{i}_2 = \cos \theta(t) \end{cases}$$

QUINDI

$$x_1(t) = y_1 \cos \theta(t) - y_2 \sin \theta(t) \quad (3)$$

$$x_2(t) = y_1 \sin \theta(t) + y_2 \cos \theta(t) \quad (4)$$

DERIVANDO LE RELAZIONI RISPETTO AL TEMPO:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) y_1 \sin \theta(t) - \dot{\theta}(t) y_2 \cos \theta(t) = -\dot{\theta}(t) [y_1 \sin \theta(t) + y_2 \cos \theta(t)] & (4) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) y_1 \cos \theta(t) - \dot{\theta}(t) y_2 \sin \theta(t) = \dot{\theta}(t) [y_1 \cos \theta(t) - y_2 \sin \theta(t)] & (3) \end{cases}$$

DA CUI

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) x_1(t)$$

VELOCITÀ DI $\vec{x}_p$

SI AVEVA DEFINITO $(\vec{v}_p)$ COME:

$$\vec{v}_p = \frac{dx_1(t)}{dt} \hat{e}_1 + \frac{dx_2(t)}{dt} \hat{e}_2 = y_1 \frac{de_1(t)}{dt} + y_2 \frac{de_2(t)}{dt} \quad (1) \quad \text{USANDO ENTRAMBI I SISTEMI DI RIFERIMENTO } \mathcal{R}_1 \text{ E } \mathcal{R}_2$$

I METODO - CONTINUO

SI ERA GIUNTI ALLA DEFINIZIONE DELLE FORMULE DI POISSON:

$$\frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_1(t) ; \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_2(t) ; \quad \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{0}$$

RICORDANDO CHE $\vec{v}_p$ È QUELLA DI SOPRA (1), SI SOSTITUISCONO $\uparrow$:

$$\vec{v}_p = y_1 \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} + y_2 \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} = y_1 (\vec{\omega} \times \hat{e}_1(t)) + y_2 (\vec{\omega} \times \hat{e}_2(t)) = (2)$$

→ PER LA P. DISTRIBUTIVA DEL PRODOTTO VETTORIALE, OSSIA:

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$$

• E CHE LO SCALARE y_1/y_2 PUÒ ESSERE PORTATO DENTRO PER LA PROPRIETÀ:

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

ALLORA

$$(2) [\vec{\omega} \times (y_1 \hat{e}_1(t))] + [\vec{\omega} \times (y_2 \hat{e}_2(t))] = \vec{\omega} \times (y_1 \hat{e}_1(t) + y_2 \hat{e}_2(t)) =$$

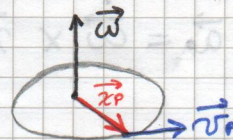
$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{x}_p = \vec{\omega} \times \vec{y}_p \quad \text{ESSENDO } \vec{x}_p = \vec{y}_p$$

VELOCITÀ $\vec{v}_p$ 

È L'ESPRESSIONE DELLA VELOCITÀ $\vec{v}_p$ PER UN ATTO DI MOTO RIGIDO (PIANO) ROTATORIO. QUESTA RELAZIONE È VALIDA SOLO SE L'ORIGINE DEL SISTEMA $\mathcal{R}_1$ COINCIDE CON IL PUNTO ATTORNO AL QUALE RUOTA C ($\mathcal{R}_1$ È SDR FISSO) CORPO RIGIDO.

II METODO - CONTINUO

COME PRIMA SI DEVE GIUNGERE ALLA RELAZIONE DELLA VELOCITÀ $\vec{v}_p$:



SI ERA GIUNTI A:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\dot{\theta}(t) x_2(t) ; \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) x_1(t)$$

SOSTITUENDO QUESTE RELAZIONI IN (1), SI OTTIENE:

$$\vec{v}_p = -\dot{\theta}(t) x_2(t) \hat{e}_1 + \dot{\theta}(t) x_1(t) \hat{e}_2 \quad (3)$$

RICORDANDO POI CHE LA V. ANGOLARE È:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3$$

ALLORA ESSENDO:

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \dot{\theta}(t) \hat{e}_2$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\dot{\theta}(t) \hat{e}_1$$

→ SOSTITUENDO QUESTI TERMINI CHE SONO IN (1) CON IL PRODOTTO VETTORIALE RISPETTIVO:

QUINDI LA (3) DIVENTA:

$$\vec{v}_p = x_2(t) [\vec{\omega} \times \hat{e}_2] + x_1(t) [\vec{\omega} \times \hat{e}_1] \rightarrow \text{PER LE STESSA PROPRIETÀ DI PRIMA OTTENGO QUINDI:}$$

$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times (x_2(t) \hat{e}_2) + \vec{\omega} \times (x_1(t) \hat{e}_1) = \vec{\omega} \times \vec{x}_p(t)$$

ACCELERAZIONE DI $\vec{x}_p$

DEFINITO QUINDI $\vec{v}_p$ COME:

$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{x}_p \quad (1) \quad \text{IN CUI } \vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_3(t) \quad \text{DOVE } \theta = \theta(t)$$

SI PUO' RISCRIVERE $\vec{v}_p$ PER CASI N-DIMENSIONALI:

$$\begin{aligned} \vec{v}_p(t) &= \sum_{k=1}^N y_k \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N y_k [\vec{\omega} \times \hat{e}_k(t)] \Rightarrow \text{POICHÉ LA SOMMATORIA NON RIGUARDA } \vec{\omega}, \text{ POSSO PER PRIMA COSA USARE LA P. DISTRIBUTIVA PORTANDO } y_k \text{ INSIEME A } \hat{e}_k(t) \text{ E POI SPOSTARE } \vec{\omega} \text{ FUORI:} \\ &= \sum_{k=1}^N \vec{\omega} \times y_k \hat{e}_k(t) = \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^N y_k \hat{e}_k(t) \rightarrow \text{È PROPRIO } \vec{y}_p (= \vec{x}_p) \\ &\quad \text{VETTORE POSIZIONE VISTO DA } R_2 \quad \text{VETTORE POSIZIONE VISTO DA } R_1 \end{aligned}$$

DA CUI SIAMO TORNATI A (1)

$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{y}_p \quad \text{o} \quad \vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{x}_p$$

ADESSO ESPRIMO L'ACCELERAZIONE $\vec{a}_p$: $\vec{a}_p = \vec{a}_p(t)$
INIZIA QUI

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_p + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \boxed{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_p + \vec{\omega} \times \vec{v}_p = \vec{a}_p} \quad (2) \quad \text{ACCELERAZIONE } \vec{a}_p$$

È POSSIBILE ESPRIMERE LA RELAZIONE (2) IN UN ALTRO MODO:

ESSENDO $\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{x}_p$, ALLORA:

$$\vec{a}_p = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_p + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_p) \quad *$$

RICORDANDO IL **DOPIO PRODOTTO VETTORIALE** LA CUI PROPRIETÀ È:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$* \vec{a}_p = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_p + \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{x}_p) - \vec{x}_p(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

SI ANNULLA POICHÉ
 $\vec{\omega} \perp \vec{x}_p$

QUINDI

ACCELERAZIONE $\vec{a}_p$

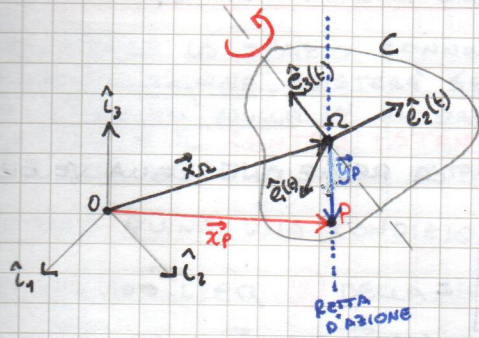
$$\vec{a}_p = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}_p - \vec{x}_p \omega^2 \quad (3)$$

ACCELERAZIONE TANGENZIALE
ACCELERAZIONE NORMALE CENTRIPETA

DOVE $\vec{x}_p^N$ È IL VETTORE NORMALE A $\vec{\omega}$
→ NEL NOSTRO CASO, AVENDO SCELTO UN PRECISO SDR SI HA CHE $\vec{x}_p^N \equiv \vec{x}_p$

↳ IN CASO DI MOTO PIANO $\vec{x}_p^N \equiv \vec{x}_p$

MOTO GENERICO DI ROTO-TRASLAZIONE



HO UN SISTEMA RIGIDO C CHE SI MUOVE NELLO SPAZIO. STUDIAMO QUINDI L'ATTO DI MOTO RIGIDO CHE IN QUESTO CASO È UN **MOTO ROTOTRASLATORIO** POICHÉ SOMMA DI QUELLO ROTATORIO + QUELLO DI TRASLAZIONE.

SI DEFINISCONO 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO.

① $R(0, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$
SISTEMA FISSO

② $R'(\Omega, \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$
SISTEMA SOLIDALE AL CORPO RIGIDO

DEFINISCO QUINDI:

ESPRESSIONE DI UN GENERICO PUNTO

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t) \quad (1)$$

↑
VETTORE POSIZIONE CHE DIPENDE DAL TEMPO POICHÉ IL PUNTO P SI SPOSTA QUINDI ANCHE LE COMPONENTI DI $\vec{x}_\Omega(t)$ VARIANO

VETTORE POSIZIONE DEL SDR SOLIDALE. INDICA LA POSIZIONE RELATIVA DEL PUNTO RISPETTO AL SISTEMA MOBILE. DIPENDE DA t MA NON VARIANO DI MODULO (COMPONENTI COSTANTI) BENSÌ VARIANO LA SUA RETTA D'AZIONE (DIREZIONE)

IL PUNTO P DEFINITO DA $\vec{x}_P$ NON DEVE ESSERE NECESSARIAMENTE ASSOCIATO AD UNA MASSA. L'IMPORTANTE È CHE VALGANO TUTTE LE CONSIDERAZIONI FATTE IN PARTENZA.

SI DEFINISCE QUINDI LA **VELOCITÀ** DI UN GENERICO PUNTO APPARTENENTE AL SISTEMA C

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times \vec{y}_P = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) \quad (2)$$

↓
VELOCITÀ DEL PUNTO $\vec{x}_\Omega$ DEFINITO COME POLO CINEMATICO GENERICO PUNTO DEL CORPO C CHE È IN MOTO

ESPRESSIONE GENERALE DELLA DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ ASSOCIATA AD UN ATTO DI MOTO RIGIDO

QUINDI SI È DEFINITO Ω COME **POLO CINEMATICO** (SCELTO ARBITRARIAMENTE)

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}_P + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{y}_P \quad (3)$$

I FORMA

ESPRESSIONE GENERALE DELLA DISTRIBUZIONE DELLA ACCELERAZIONE ASSOCIATA AD UN ATTO DI MOTO RIGIDO

DIMOSTRAZIONI: COME SI ARRIVA ALLA (2) E ALLA (3)

② PER DIMOSTRARE LA SECONDA RELAZIONE, PRENDENDO LA (1):

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t)$$

RICORDANDO CHE $\vec{x}_\Omega(t)$ VARIA, RISPETTO AL TEMPO, MA VARIANDO LE COMPONENTI, $\vec{y}_P(t)$ VARIA IN QUANTO VARIANO NEL TEMPO, VERSORI, ESSENDO:

$$\vec{y}_P(t) = y_1 \hat{e}_1(t) + y_2 \hat{e}_2(t)$$

QUINDI DERIVANDO LA (1) OTTENGO:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_\Omega(t) + y_1 \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} + y_2 \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt}$$

RICORDANDO LE **FORMULE DI POISSON** (20) ADORA ESSENDO:

$$\frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k(t)$$

ADORA:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 y_k (\vec{\omega} \times \hat{e}_k(t)) \Rightarrow \vec{v}_P(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 (\vec{\omega} \times y_k \hat{e}_k(t))$$

QUINDI:

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times \vec{y}_P(t) \quad (2)$$

PORTO FUORI $\vec{\omega}$ POICHÉ NON DIPENDE DALLA SOMMATORIA

ESSENDO POI $\vec{y}_p = \vec{x}_p - \vec{x}_R$ SI TORNA ALLA RELAZIONE INIZIALE DI $\vec{v}_p(t)$:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) \quad (2)$$

DIMOSTRO ORA LA TERZA RELAZIONE:

(3) PER GIUNGERE ALL'EQ. DELL'ACCELERAZIONE, DERIVO LA RELAZIONE DELLA VELOCITÀ $\vec{x}_p(t)$ CIOÈ LA (2):

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \frac{d\vec{v}_p(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}_R(t)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[\vec{\omega} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) \right] = \\ &= \vec{a}_R(t) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} (\vec{x}_p(t) - \vec{x}_R(t)) \\ &= \vec{a}_R(t) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_p(t) - \vec{v}_R(t)) \end{aligned}$$

RICORDANDO CHE $\vec{v}_p(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{y}_p$ RISCRIVENDO COME:

$$\vec{v}_p(t) - \vec{v}_R(t) = \vec{\omega} \times \vec{y}_p$$

ALLORA SIAMO TORNATI ALL'

$$\vec{a}_p = \vec{a}_R(t) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_p) \quad (3)$$

ADesso È POSSIBILE ESPRIMERE LA (3) IN UN'ALTRA FORMA:

ESSENDO $\star_2$: $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_p)$ IL **DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE**, ADORA LO SI PUÒ ESPRIMERE:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

QUINDI:

$$\vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{y}_p) - \vec{y}_p (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{y}_p) - \vec{y}_p \omega^2$$

PER SVOLGERE QUESTO TERMINE DEVO ESPRIMERE $\vec{y}_p$ IN UN ALTRO MODO:

$$\vec{y}_p = \vec{y}_p^{(N)} + \vec{y}_p^{(P)} \quad \text{NORMALE E PARALLELO AD } \vec{\omega}$$

$$\text{CASO PIANO} \rightarrow \vec{y}_p^{(N)} = \vec{0}$$

QUINDI SOSTITUENDO:

$$\begin{aligned} &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot (\vec{y}_p^{(N)} + \vec{y}_p^{(P)})) - \omega^2 (\vec{y}_p^{(N)} + \vec{y}_p^{(P)}) = \vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot \vec{y}_p^{(N)} + \vec{\omega} \cdot \vec{y}_p^{(P)}] - \omega^2 \vec{y}_p^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_p^{(N)} = \\ &= \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{y}_p^{(P)}) - \omega^2 \vec{y}_p^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_p^{(N)} = \omega^2 \vec{y}_p^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_p^{(P)} - \omega^2 \vec{y}_p^{(N)} = -\omega^2 \vec{y}_p^{(N)} \end{aligned}$$

QUINDI $\vec{a}_p$ LA POSSO ESPRIMERE COME:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_R(t) + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_p - \vec{x}_R) - \omega^2 \vec{y}_p^{(N)} \quad \text{ESPRESSIONE GENERALE DELLA DISTRIBUZIONE DELLA ACCELERAZIONE ASSOCIATA AD UN ATTO DI MOTO RIGIDO}$$

II FORMA

COMPONENTE DI ACCELERAZIONE

- DIRETTA ORTOGONALMENTE ALL'ASSE DI ROTAZIONE
- CON INTENSITÀ $\propto$ ALLA DISTANZA DEL PUNTO DALL'ASSE DI ROTAZIONE E AL QUADRATO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE

QUINDI LA CONFIGURAZIONE DI UN CORPO RIGIDO GENERICAMENTE C, NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, SI PUÒ OTTENERE CONOSCENDO LA POSIZIONE/VELOCITÀ DI UN SUO PUNTO E L'ORIENTAMENTO A QUESTO PUNTO/VELOCITÀ ANGOLARE

GGDL

CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE - CIR

SE SI CONSIDERA LO SPAZIO CONNESSO AD UN CORPO RIGIDO ANIMATO DA UN MOTO DI ROTOTRASLAZIONE, ESISTERÀ SEMPRE UN PUNTO DI TALE SPAZIO CARATTERIZZATO DALLO AVERE VELOCITÀ NULLA IN UN DATO ISTANTE.

TALE PUNTO È IL **CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE** E PUÒ AVERE DISTANZA FINITA O INFINITA DAL CORPO E VARIA ISTANTE PER ISTANTE.

CERCHIAMO QUINDI UNA CONDIZIONE PER CUI IN $\vec{x}_c \rightarrow \vec{v}_c = \vec{0}$

RIPRENDENDO L'EQ. (2) DELLA VELOCITÀ:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{x}_p(t) - \vec{x}_R(t)) \quad \text{IN CUI } \omega = \dot{\theta}(t) \hat{e}_3$$

SI HA IN QUESTO CASO UN SDR FISSATO $R(0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ E MOBILE $R'(\Omega, \hat{e}_1(t), \hat{e}_2(t), \hat{e}_3(t))$ DA CUI È POSSIBILE DEFINIRE I VARI VETTORI. IN QUESTO CASO SI HA CHE IL PUNTO GENERICO P È PROPRIAMENTE IL CIR, CIOÈ:

$$\vec{x}_p(t) \equiv \vec{x}_c(t) \quad \text{E} \quad \vec{v}_p(t) \equiv \vec{v}_c(t)$$

RISCRIVENDO L'EQUAZIONE SI HA CHE:

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{x}_c(t) - \vec{x}_R(t)) = \vec{0}$$

EQUAZIONE VELOCITÀ IST. DEL CIR = $\vec{0}$

NEL CASO DI MOTO PIANO, ALLORA RISCRIVO L'EQ. MOLTIPLICANDO VETTORIALMENTE PER $\vec{\omega}$.

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_c(t) = \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{x}_c(t) - \vec{x}_R(t)) = \vec{0}$$

COME VISTO PRIMA SI HA CHE: (SCRIVENDO $\vec{x}_c - \vec{x}_R = \vec{y}_c$)

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{x}_c - \vec{x}_R) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_c) \quad \text{È UN DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE}$$

ALLORA DIVENTA:

$$\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{y}_c) - \vec{y}_c(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{y}_c) - \omega^2 \vec{y}_c$$

COME PRIMA SI ESPRIME $\vec{y}_c$ IN FUNZIONE DEI SUOI DUE COMPONENTI, UNO PARALLELO E UNO NORMALE A $\vec{\omega}$, QUINDI:

$$\vec{y}_c(t) = \vec{y}_c^{(p)}(t) + \vec{y}_c^{(n)}(t) \rightarrow \text{CASO PIANO } \vec{y}_c^{(p)} = \vec{0}$$

STIAMO ANALIZZANDO IL CIR PER IL CASO PIANO!!!

SOSTITUENDOLO:

SI È ANNUNCIATO $\vec{\omega} \cdot \vec{y}_c^{(p)} = 0$

$$\vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot (\vec{y}_c^{(p)} + \vec{y}_c^{(n)})] - \omega^2 (\vec{y}_c^{(p)} + \vec{y}_c^{(n)}) = \vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot \vec{y}_c] - \omega^2 \vec{y}_c^{(p)} - \omega^2 \vec{y}_c^{(n)} =$$

$$= \omega^2 \vec{y}_c^{(p)} - \omega^2 \vec{y}_c^{(p)} - \omega^2 \vec{y}_c^{(n)} \rightarrow \text{QUINDI } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_c) = -\omega^2 \vec{y}_c^{(n)}$$

ESPRIMIAMO ORA $\vec{y}_c^{(n)} = \vec{\Omega C}^{(n)}$, QUINDI:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_c(t) = \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) - \omega^2 \vec{\Omega C}^{(n)} = \vec{0}$$

- Ω È IL POLO CINEMATICO
- $\vec{v}_R$ È LA VELOCITÀ DEL POLO CINEMATICO
- $\vec{\Omega C}$ VETTORE CHE PORTA DAL POLO Ω AL CIR

CHE LA SCRIVIAMO:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) - \omega^2 \vec{\Omega C}^{(n)} = \vec{0}$$

OSSIA

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) = \omega^2 \vec{\Omega C}^{(n)}$$

QUINDI:

$$\vec{\Omega C}^{(n)} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)}{\omega^2}$$

NEL CASO DI MOTO PIANO SI HA $\vec{\Omega C}^{(n)} = \vec{\Omega C}$

ESPRESSIONE GENERALE CIR

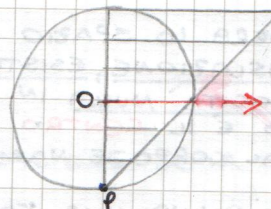
POSIZIONE DEL CIR A PARTIRE DALLA CONDIZIONE DI $\vec{v}_c = \vec{0}$

QUINDI RAPPRESENTA, ISTANTE PER ISTANTE, IL PUNTO ATTORNO AL QUALE IL CORPO RIGIDO STA RUOTANDO.

DEFINISCO POI UN'ESPRESSIONE PIÙ GENERALE: SI PUÒ DEFINIRE LA POSIZIONE DEL CIR MEDIANTE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO, CIOÈ:

$$\vec{x}_c(t) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_n}{\omega^2} + \vec{x}_n$$

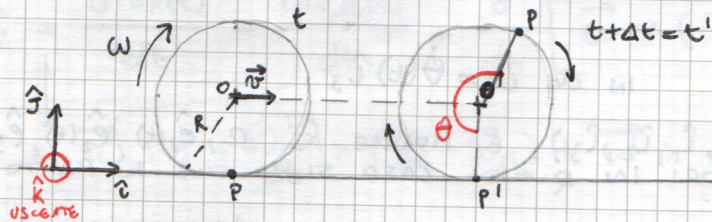
II ESPRESSIONE GENERALE DELLA POSIZIONE DEL CIR



RUOTA AUTOMOBILE
NON RUOTA INTORNO O MA INTORNO AL PUNTO

ESEMPIO APPLICATIVO → VEDI SUL FOGLIO

CIR - RUOTA - MOTO DI PURO ROTOLAMENTO - POLARI DEL MOTO



LA RUOTA IDEALE: SI HA MOTO GENERICO DI ROTO-TRASCIAZIONE.

LA RUOTA IDEALE È INDEFORMABILE, INESTENSIBILE, CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO, IL CONTATTO CON IL PIANO ORIZZONTALE AVVIENE IN UN UNICO PUNTO (O P' NEL SECONDO CASO).

LA CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO È PARTICOLARE ROTOTRASCIAZIONE
• NON C'È CONDIZIONE DI STRISCIAMENTO

DOPO UN CERTO INTERVALLO Δt , IL PUNTO MATERIALE CHE NELL'ISTANTE t È IL PUNTO DI CONTATTO, SI SARÀ SPOSTATO SU UN'ALTRA POSIZIONE A CAUSA DEL MOTO DELLA RUOTA; PRECISAMENTE SI È SPOSTATO DI UNA Q.T.A. TALE CHE L'ARCO DI CERCHIO TRA LA POSIZIONE ATTUALE E QUELLA DI CONTATTO ABBAIA UNA LUNGHEZZA PARI ALLO SPOSTAMENTO DALL'ISTANTE t A $t + \Delta t = t'$ DEL CERCHIO.

$$\|\vec{OO'}\| = \vec{PP'} = \theta R$$

IPOTIZZANDO: $\vec{v}_0 = \text{costante} \rightarrow$ (MOTO STAZIONARIO) ALLORA:

$$v_0 \Delta t = \omega R \Delta t \rightarrow v_0 = \omega R$$

SE $v_0 = \text{cost}$ HO MOTO STAZIONARIO

PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE LA RUOTA AD UN DATO ISTANTE, SI PUÒ ANALIZZARE LA POSIZIONE DEL CIR:

I) DATO $R(A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

SI SCEGLIE COME POLO CINEMATICO IL CENTRO DELLA RUOTA (CENTRO GEOMETRICO):

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{\omega}$$

$\rightarrow \omega$ GIRA INTORNO AL POLO CINEMATICO

ALLORA:

$$\vec{OC} = \frac{1}{\omega^2} (-\omega \hat{k} \times v_0 \hat{i}) = -\frac{1}{\omega^2} (\omega v_0) \hat{j} = -\frac{v_0}{\omega} \hat{j} \quad \text{MA } v_0 = \omega R$$

QUINDI $\vec{OC} = -R \hat{j}$ (SI È USATA LA RELAZIONE I DEL CIR)

UTILIZZO ORA LA SECONDA RELAZIONE: II SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO
AURÒ QUINDI:

$$\vec{x}_0 = v_0 t \hat{i}_1 + R \hat{i}_2$$

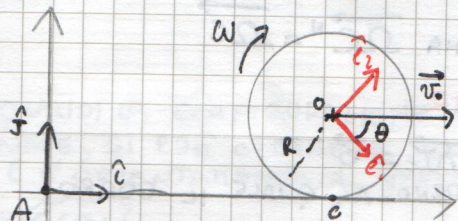
$$\vec{x}_c = v_0 t \hat{i}_1 + R \hat{i}_2 - R \hat{j} = v_0 t \hat{i}_1$$

POSIZIONE DEL CIR

AVENDOLO DEFINITO IN UN BEN PRECISO SISTEMA DI RIFERIMENTO SIGNIFICA CHE DIPENDE DA QUEST'ULTIMO. IN QUESTO CASO È STATO ESPRESSO IN UN SDR FISSO.

II ORA TROVO $\vec{x}_c \rightarrow$ CON IL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE (SOLIDALE CON LA RUOTA)

IL SDR MOBILE È $R(0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \rightarrow$



$$\vec{x}_c = \frac{1}{\omega^2} [-\omega \hat{e}_3 \times (v_0 \cos \theta(t) \hat{e}_1 + v_0 \sin \theta(t) \hat{e}_2)]$$

$$\vec{x}_c = \frac{1}{\omega^2} [-\omega v_0 \cos \theta(t) \hat{e}_2 + \omega v_0 \sin \theta(t) \hat{e}_1]$$

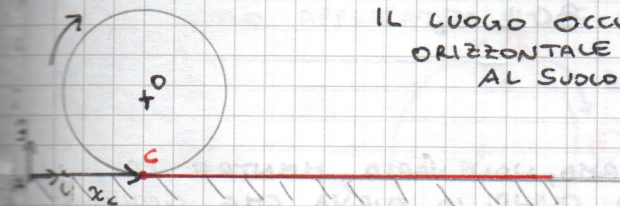
$$= \frac{v_0}{\omega} (\sin \theta(t) \hat{e}_1 - \cos \theta(t) \hat{e}_2) = R (\sin \theta(t) \hat{e}_1 - \cos \theta(t) \hat{e}_2)$$

OSSERVA IN MANIERA EVIDENTE CHE NONOSTANTE LA POSIZIONE DI QUESTO PUNTO NELLO SPAZIO INVARIANTE, LA RAPPRESENTAZIONE IN SISTEMI DI RIFERIMENTO DIVERSI CI PERMETTE DETERMINARE QUAL'E' DURANTE IL MOTO IL **LUOGO DEI PUNTI OCCUPATI DAL CIR**

I) POLARE FISSA o BASE

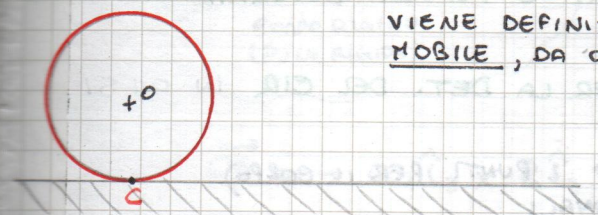
VIENE DEFINITO IL PUNTO $C \in CIR$ TRAMITE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO, DA CUI:

$$\vec{x}_C = v_0 t \hat{e}_1$$



IL LUOGO OCCUPATO È UNA RETTA ORIZZONTALE CHE CORRISPONDE AL SUOLO (QUOTA ZERO)

II) POLARE MOBILE o RULETTA



VIENE DEFINITO IL PUNTO $C \in CIR$ TRAMITE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE, DA CUI:

$$\vec{x}_C = -R (\cos\theta(t) \hat{e}_1 - \overset{\text{INVERT.}}{\sin\theta(t)} \hat{e}_2)$$

QUINDI LA CURVA È UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R CENTRATA IN O

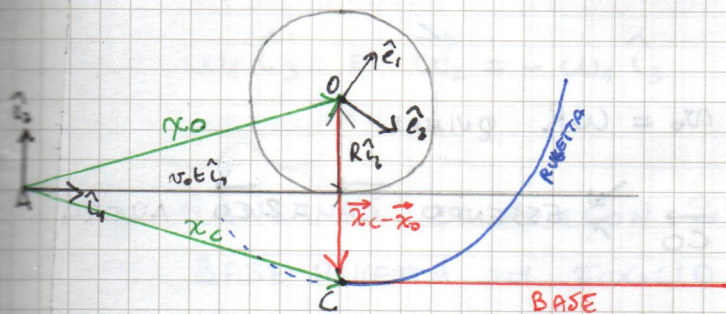
SI LA **POLARE FISSA (BASE)** CHE LA **POLARE MOBILE (RULETTA)** SONO CURVE CHIAMATE POLARI DEL MOTO RIGIDO.

È POSSIBILE RIPRODURRE IL MOTO RIGIDO FACENDO ROTOLARE LA RULETTA SULLA BASE.

VEDIAMO ALCUNI CASI IN CUI SI RELAZIONE v_0 A ωR :

① $v_0 > \omega R$

FENOMENO DELL'ACQUAPLANNING → LA RUOTA SLITTA, SCIVOLA SUL PIANO NON C'È PURO ROTOLAMENTO



POSSO DEFINIRE LA **RULETTA** COME

$$v_0 > \omega R \rightarrow \frac{v_0}{\omega} > R$$

SI FA COINCIDERE O CON Ω DA CUI

$$\frac{v_0}{\omega} > R$$

QUINDI, NEL SDR FISSO, SI HA CHE:

$$\vec{x}_C(t) = v_0 t \hat{e}_1 + R \hat{e}_2 - \frac{v_0 R}{\omega} \hat{e}_2 = v_0 t \hat{e}_1 + \left(R - \frac{v_0 R}{\omega}\right) \hat{e}_2$$

IN QUELLO MOBILE:

$$\vec{x}_C(t) = \frac{v_0}{\omega} (\sin\theta(t) \hat{e}_1 - \cos\theta(t) \hat{e}_2)$$

QUINDI C È QUEL PUNTO NELLO SPAZIO, SOLIDALE ALL'ATTO DI MOTO RIGIDO, CHE È ISTANTANEAMENTE FERMO. NON COINCIDE NECESSARIAMENTE CON UN PUNTO MATERIALE DELLA RUOTA BENSÌ C È UN PUNTO GEOMETRICO.

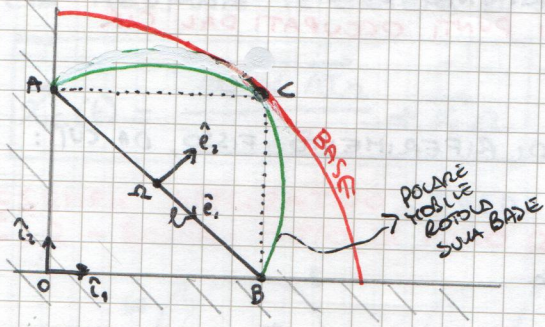
QUINDI SI HA PURO ROTOLAMENTO QUANDO $v_0 = \omega R$ E LA RUOTA GIRA INTORNO AL PUNTO DI CONTATTO (STA FERMO).

NON SI HA PURO ROTOLAMENTO QUANDO LA RUOTA GIRA INTORNO AD UN PUNTO CHE:

SE $v_0 > \omega R$ È AL DI SOTTO DEL SISTEMA → SLITTA

SE $v_0 < \omega R$ È AL DI SOPRA DEL SISTEMA

MOTO RIGIDO DI UN'ASTA VINCOLATA A SCORRERE SU 2 ASSI



CONOSCENDO IL MOTO (VELOCITÀ) DI 2 PUNTI DEL CORPO ANIMATO DALL'ATTO DI MOTO RIGIDO ALLORA POSSO CALCOLARE IL CIR USANDO COME POLO SIA A CHE B:

$$\vec{AC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_A}{\omega^2} \quad \vec{AC} \perp \vec{r}_A$$

$$\vec{BC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_B}{\omega^2} \quad \vec{BC} \perp \vec{r}_B$$

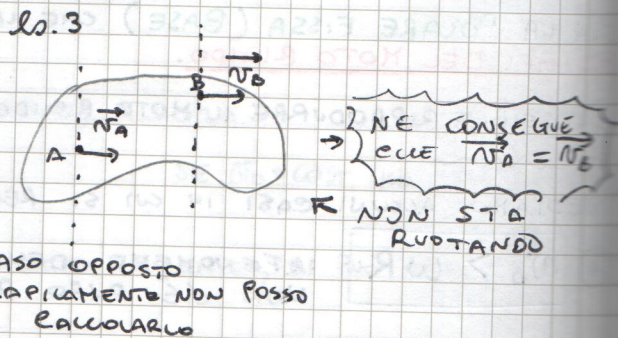
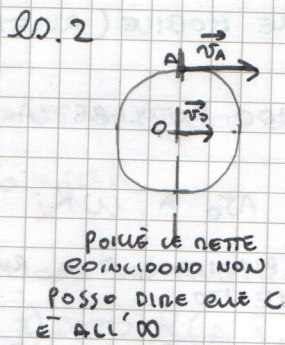
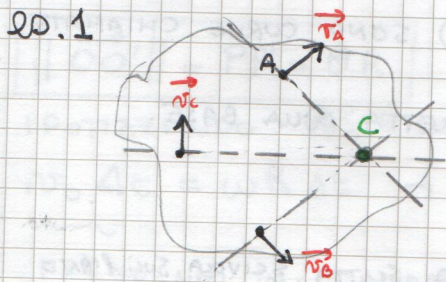
SI AURÀ COMunque CHE $\vec{OC} = \text{costante}$

SI AVRA' CHE LA POLARE FISSA O BASE RIMARRA' FERMA, NON VARIA, MENTRE LA POLARE MOBILE O RULETTA E' SOLIDALE ALLA SBARRA QUINDI LA CURVA CHE GENERA (CIOE' LA CIRCONFERENZA) RUOTERA' CON LA SBARRA

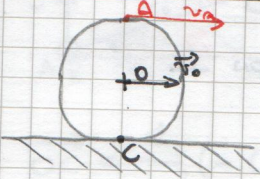
QUESTO CHE SI È USATO È STATO IL METODO ANALITICO PER LA DETERMINAZIONE DEL
IN CUI SI POSSONO USARE LE RELAZIONI I E II.

UN METODO PIÙ SEMPLICE È IL METODO GRAFICO PER LA DET. DEL CIR IN CUI SI

- ① DI CONOSCERE LA DIREZIONE DELLE VETTORI (ALMENO 2 PUNTI PER IL CORPO)
- ② DA CUI SI CALCOLANO LE RETTE (O VETTORI) ORTOGONALI
- ③ LA CUI INTERSEZIONE CI DA IL PUNTO $C \equiv C_{IR}$



ESEMPIO UTILE PER ESERCIZI



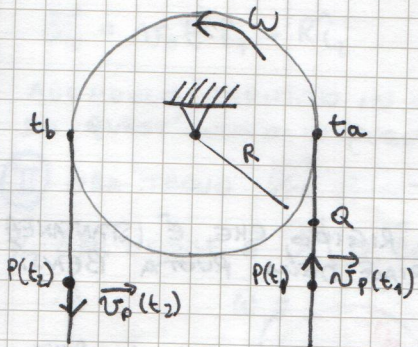
Ho in CIR in C E so che $N_0 = WR$ quindi

$$\vec{\Sigma}_p = \vec{\omega} \times \vec{c}_A$$

MA ESSENDO $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{CO}$ $\rightarrow$ ESSENDO $CA = 2CO$ AORA

$$\vec{N_A} = 2 \vec{N_0} \Rightarrow N_A = 2 N_0 \quad (\text{Lungo } \hat{z})$$

MOTO RIGIDO-FUNI E PULEGGE



FUNE IDEALE + RUOTA IDEALE $\leadsto$ NESSUNA CONDIZIONE DI STRISCIAIMENTO TRA I DUE
 $\downarrow$
 INESTENSIBILE OSSIA NESSUN ATTRITO

$$\dot{S}_p = \text{COSTANTE} \rightarrow \dot{\Theta} = \text{COSTANTE}$$

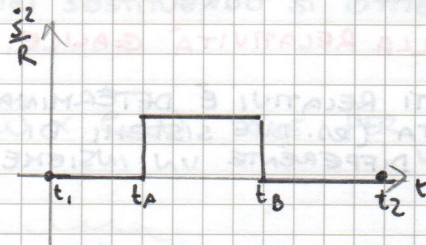
CIÒ È UN PUNTO QUALSIASI PERCORRERÀ TRATTI UGUALI DELLA TRAIETTORIA IN TEMPI UGUALI.

$$t_1) \quad |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{R}\right)^2} = 0 \quad \ddot{s} = 0$$

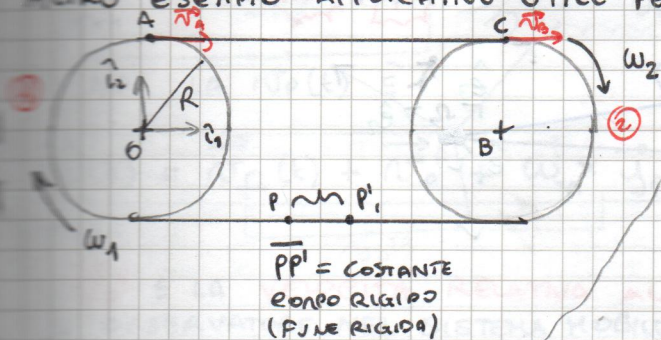
t₂) LA VELOCITA' ACQUISISCE LA V. ANGOLARE DEL RAGGIO DI CURVATURA:

$$|\vec{a}_a| = \sqrt{s^2 + \left(\frac{si}{k}\right)^2} \neq 0 \Rightarrow s \neq 0$$

IN t_b MENTRE IN t_2 STESSA SITUAZIONE DI t_1



ALTRO ESEMPIO APPLICATIVO UTILE PER GLI ESERCIZI



CATENA DI CORPI ANIMATI OGNUNO DA UN ATTO DI MOTO RIGIDO E SONO COLLEGATI

SVOLGIMENTO

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA}$$

POICHÉ O È IL CIR. CENT. DELLA RUOTA ①
QUINDI:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA} = -\omega_1 \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2 = \omega_1 R \hat{e}_1$$

POICHÉ LA RUOTA ② RUOTA CON V. ANG. $\vec{\omega}_2$, SI DEFINISCE IL CIR. CENT. B QUINDI:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_2 \times \vec{BC} = \omega_2 \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2 = -\omega_2 R \hat{e}_1$$

(INCIGNITA
NON SAPPANO IL SEGNO)

POICHÉ SI HA FUNE INESTENSIBILE, LA VELOCITÀ DI UN PUNTO SULLA FUNE È UGUALE PER TUTTA LA FUNE, QUINDI:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \Rightarrow \omega_1 R \hat{e}_1 = -\omega_2 R \hat{e}_1 \Rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \quad (\text{IN MODULO})$$

QUINDI

$$\vec{\omega}_1 = -\omega_1 \hat{e}_3 \quad \text{E} \quad \vec{\omega}_2 = -\omega_1 \hat{e}_3$$

NON MI STANNO
DICENDO COME RUOTANO
FINCHÉ NON CI PONGO IL
VERSONE

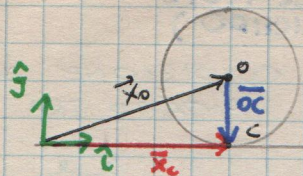
NEL NOSTRO
CASO
POICHÉ $\vec{v}_A$
È VERSO
 $\hat{e}_1$ POSITIVE

PARTE MANCANTE DI POISSON 3D SUL FOGLIO

SINTESI BASE-RULETTA SUL FOGLIO

DIMOSTRAZIONE POLARE FISSA O BASE

(2)



HO UN SDR FISSO ; SO CHE:

$$\vec{x}_c = \vec{x}_0 + \vec{OC}$$

IN REALTÀ
BASTA PARTIRE
DALL'EQUAZIONE
DEL CIR

$$\vec{x}_0 = x_0 \hat{c} + R \hat{j} \quad ; \quad \vec{OC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{\omega^2} \quad ; \quad \vec{\omega} = -\omega \hat{k}$$

DA TEORIA
SO CHE È COSÌ DOVE

O È L'ORIGINE DEL SDR MOBILE E $\vec{V}_0$ LA SUA VELOCITÀ

$$\vec{V}_0 = \vec{\omega} \times \vec{CO} = -\omega \hat{k} \times R \hat{j} = \omega R \hat{c}$$

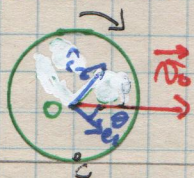
QUINDI RICORDANDO CHE:

$$\vec{OC} = \vec{x}_c - \vec{x}_0 \rightarrow \vec{x}_c = \vec{x}_0 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{\omega^2} = x_0 \hat{c} + R \hat{j} + \frac{-\omega^2 R \hat{j}}{\omega^2} = x_0 \hat{c}$$

QUINDI DAL SDR FISSO SI HA CHE $\vec{x}_c = x_0 \hat{c}$

$$\text{NE CONSEGUE CHE } \vec{V}_c = \frac{d\vec{x}_0(t)}{dt} \hat{c}$$

DIMOSTRAZIONE POLARE MOBILE O RUSETTA



$$\vec{OC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{\omega^2} \rightarrow \vec{x}_c = \vec{x}_0 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}_0}{\omega^2}$$

DOVE VA ESPRESSO TUTTO IN TERMINI DEL SDR SOLIDALE:

$$\vec{x}_0 = \vec{0} \quad \text{MENTRE} \quad \vec{\omega} = -\dot{\theta} \hat{e}_3 = -\omega \hat{e}_3$$

$$\text{MA LA } \vec{V}_0 = V_0 \cos \theta \hat{e}_1 + V_0 \sin \theta \hat{e}_2$$

METTENDO TUTTO INSIEME:

$$\vec{x}_c = \frac{1}{\omega^2} \left[-\omega \hat{e}_3 \times (V_0 \cos \theta \hat{e}_1 + V_0 \sin \theta \hat{e}_2) \right] = \frac{1}{\omega^2} \left[-V_0 \omega \hat{e}_2 \cos \theta + V_0 \omega \sin \theta \hat{e}_1 \right]$$

$$\vec{x}_c = -\frac{1}{\omega} V_0 [\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_1] \rightarrow \vec{x}_c = -R [\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2]$$

È CIRCONFERENZA DI RAGGIO R
IL FLECCO INDICA CHE RUOTA IN SENSO ORARIO

SE $V_0 < \omega R$ $\rightarrow$ POLARE MOBILE È CIRC. DI RAGGIO $R > \frac{V_0}{\omega}$
COME SE IL ROTOLAMENTO AVVENISSE SU UN CERCHIO DI RAGGIO PIÙ PICCOLO

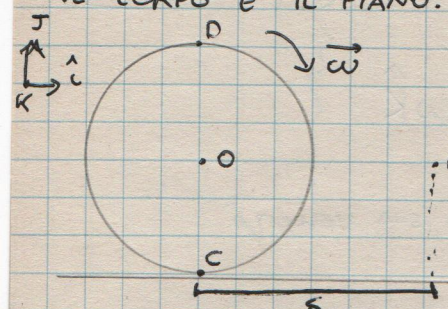
SE $V_0 > \omega R$ SI HA STRISCIAMENTO $\rightarrow R < \frac{V_0}{\omega}$
IL ROTOLAMENTO PURO SI HA SU UN DISCO DI RAGGIO MAGGIORE

SE FACESSI ROTOLARE DUE CILINDRI CON MASSE DIVERSE PIENI, IN COND. DI PURO ROTOLAMENTO, ARRIVEREBBERO ALLA FINE ALLO STESSO ISTANTE. SE AVESSI UN CILINDRO VUOTO CI METTEREBBE PIÙ TEMPO.

CIR, BASE E RULETTA DI UNA RUOTA (POLARI DEL MOTO RIGIDO)

1

SI CONSIDERA UNA RUOTA, CILINDRO O SFERA; SI DEFINISCE LA CONDIZIONE DI **PURO ROTOLAMENTO** IL CASO IN CUI HO IL **CIR** NEL PUNTO DI CONTATTO TRA IL CORPO E IL PIANO.



$$\vec{v}_C = \vec{0} \rightarrow C \text{ è il CIR}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_O &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CO} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{CO} = -\omega \hat{k} \times R \hat{j} = \omega R \end{aligned}$$

CASO 2D

QUINDI SI HA PURO ROTOLAMENTO NEL MOMENTO IN CUI LA VELOCITA' DELL'ORIGINE IN O E':

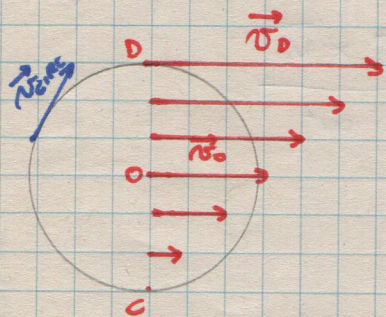
$$v_O = \omega R \quad (\text{IN MODULO})$$

NE CONSEGUE CHE IN D SI AVRA' CHE:

IL PURO ROTOLAMENTO E' TALE CHE DOPO Istante Δt LA RUOTA HA PERCORSO ESATTAMENTE $\Rightarrow S = R\theta$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CD} = \vec{\omega} \times \vec{CD} = -\omega \hat{k} \times 2R \hat{j} = \omega 2R \Rightarrow 2\omega R$$

QUINDI I PUNTI LUNGO L'ASSE CD HANNO VELOCITA' CRESCENTE



SE INVECE SI CALCOLA

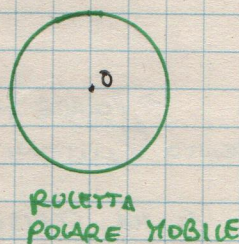
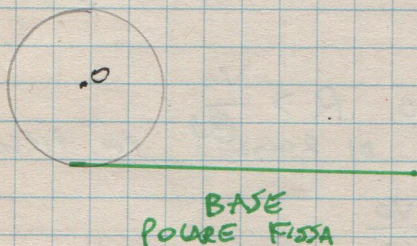
$$\begin{aligned} \vec{v}_{CIRC} &= \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CIRC} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{CIRC} = -\omega \hat{k} \times \dots \end{aligned}$$

E SARA' DIREZIONATO COME IN FIGURA

POLARE MOBILE E POLARE FISSA RULETTA

E' POSSIBILE INDIVIDUARE DUE CURVE NELLO SPAZIO DEFINITE COME IL LUOGO DEI PUNTI OCCUPATI DAL CIR DURANTE IL MOTO NEL RIFERIMENTO FISSO (**BASE**) E MOBILE (**RULETTA**)

TALI CURVE DESCRIVONO IL MOTO DEL CIR E SONO TALI CHE IL MOTO DEL CORPO PUO' ESSERE DESCRITTO COME PURO ROTOLAMENTO DELLA RULETTA SULLA BASE.



PER GIUNGERE ANALITICAMENTE ALLA DEFINIZIONE DI BASE O RULETTA SI DEFINISCONO DUE SDR, UNO SOLIDALE ALLA RUOTA E UNO FISSO.



FORMULE DI POISSON 3D

PASSANDO DAL CASO DI MOTO PIANO A MOTO TRIDIMENSIONALE SI PARLA DI MOTO SFERICO CHE È UN MOTO RIGIDO ATTORNO AD UN PUNTO FISSO. SIGNIFICA CHE QUALSIASI MOTO SFERICO PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME UNA SEQUENZA DI ROTAZIONI ATTORNO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DEL MOTO CON DIREZIONE VARIABILE NEL TEMPO.

LA VELOCITÀ DI UN PUNTO P SARÀ SEMPRE: (ATTO DI MOTO RIGIDO)

$$\vec{v}_p = \vec{v}_q + \vec{\omega} \times \vec{QP} \quad * \quad \text{DOVE } \vec{QP} = \vec{x}_p - \vec{x}_q$$

$\vec{v}_q$ RIMANE IL TERMINE DI TRASLAZIONE MENTRE $\vec{\omega}$ NON È PIÙ $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{L}_K$ MA:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \quad \text{SI GIUNGE ALLA RELAZIONE * SI DEVONO ESPRIMERE LE FORMULE DI POISSON NEL CASO 3D}$$

PER DEFINIRE LE FORMULE DI POISSON IN 3D SI PARTE CON $\frac{d\hat{e}_k}{dt}$ PROIETTANDO SUI 3 ASSI:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}_1}{dt} = \left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_1 \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_2 \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_3 \right) \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \left(\frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_1 \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_2 \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_3 \right) \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \left(\frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_1 \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_2 \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_3 \right) \hat{e}_3 \end{cases}$$

I TERMINI TRA LE PARENTESI TONDE SONO LE COMPONENTI, NELLA TERNA MOBILE, DELLE DERIVATE DEI VERSORI $\hat{e}_k$

QUINDI IN GENERALE LE DERIVATE DEI VERSORI ANALIZZANDO LE COMPONENTI SI HA CHE: $\frac{d\hat{e}_k}{dt}$ DIPENDONO DA 9 COMPONENTI SCALARI

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j) = \frac{d}{dt}(\delta_{kj}) = 0$$

USANDO IL δ_{kj} DI KRONECKER

$$\forall k, j \begin{cases} \circ K=J \rightarrow \frac{d}{dt}(1) = 0 \\ \circ K \neq J \rightarrow \frac{d}{dt}(0) = 0 \end{cases}$$

QUINDI POSSO RISCRIVERE LA RELAZIONE DI SOPRA COME:

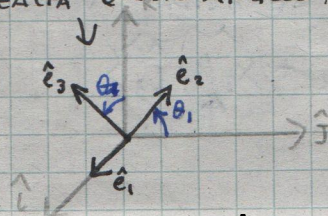
DERIVATA DI PRODOTTO TRA FUNZIONI TEMPO DIP.

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_j) = \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_j + \frac{d\hat{e}_j}{dt} \cdot \hat{e}_k = 0 \rightarrow \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_j = - \frac{d\hat{e}_j}{dt} \cdot \hat{e}_k \quad (2) \quad \text{PER } K \neq J$$

$$2 \frac{d\hat{e}_k}{dt} \cdot \hat{e}_k = 0 \quad (1) \quad \text{PER } K=J \quad K=1,2,3$$

QUINDI POICHÉ (1) SI ANNUNIA MENTRE DALLA (2) NOTO CHE CI SONO COMPONENTI A DUE A DUE EQUIVALENTI, LE RELAZIONI SOPRA, CIOÈ LE DERIVATE DEI VERSORI DIPENDONO IN REALTÀ DA 3 COMPONENTI SCALARI

PER CONTINUARE LA DIMOSTRAZIONE DEVO ESPRIMERE LE RELAZIONI TRA GLI ASSI DEL SDR RELATIVO E QUELLO FISSO. PER SEMPLICITÀ SI PONE UN ASSE COINCIDENTE. IN REALTÀ QUESTO ANGOLO NON È θ_1 SE RUOTO ANCHE L'ASSE $\hat{e}_3$. QUINDI QUESTO RAGIONAM. ANDREBBE FATTO X OGNI ASSE



$$\hat{e}_2 = \cos\theta_1 \hat{j} + \sin\theta_1 \hat{k}$$

DERIVANDO

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \hat{j} + \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \hat{k} = +\dot{\theta}_1 \hat{e}_3 = \omega_1 \hat{e}_3$$

A QUESTO PUNTO SE LO SI FA PER $\frac{d\hat{e}_1}{dt}$ E $\frac{d\hat{e}_3}{dt}$ SI OTTIENE:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \omega_3 \hat{e}_2 \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \omega_1 \hat{e}_3 \quad \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2 \hat{e}_1$$

MOLTIPLICANDO SCALARMENTE CIASCUNO PER IL VETTORE DEL SECONDO MEMBRO, SI OTTIENE

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_2 = \omega_3$$

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_3 = \omega_1$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_1 = \omega_2$$

SI POSSONO SOSTITUIRE QUESTE RELAZIONI ALL'INTERNO DEL SISTEMA:

RICORDANDO POI CHE $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \omega_3 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_3$$

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt} = -\omega_3 \hat{e}_1 + \omega_1 \hat{e}_3$$

RICORDANDO
CHE SI
→ PUÒ
ESPRIMERE

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \omega_1 \hat{e}_3 - \omega_3 \hat{e}_1$$

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2 \hat{e}_1 - \omega_1 \hat{e}_2$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_3 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \omega_2 \hat{e}_1 - \omega_1 \hat{e}_2$$

DIVENTA
↓

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_1$$

FORMULE
DI POISSON (3D)
MOTO SFERICO

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k$$

ADESSO SE SI VUOLE ESPRIMERE $\vec{\omega}$
SI RIPRENDE LA RELAZIONE

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k \quad \text{E SI PREMULTIPLICA VETTORIALMENTE PER } \hat{e}_k \quad k=1,2,3$$

$$\sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times \frac{d\hat{e}_k}{dt} = \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_k)$$

$$\text{DOVE } \hat{e}_k \times (\vec{\omega} \times \hat{e}_k) = \vec{\omega} (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_k) - \hat{e}_k (\hat{e}_k \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} - \omega_k \hat{e}_k$$

DA CUI

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \hat{e}_k \times \frac{d\hat{e}_k}{dt}$$

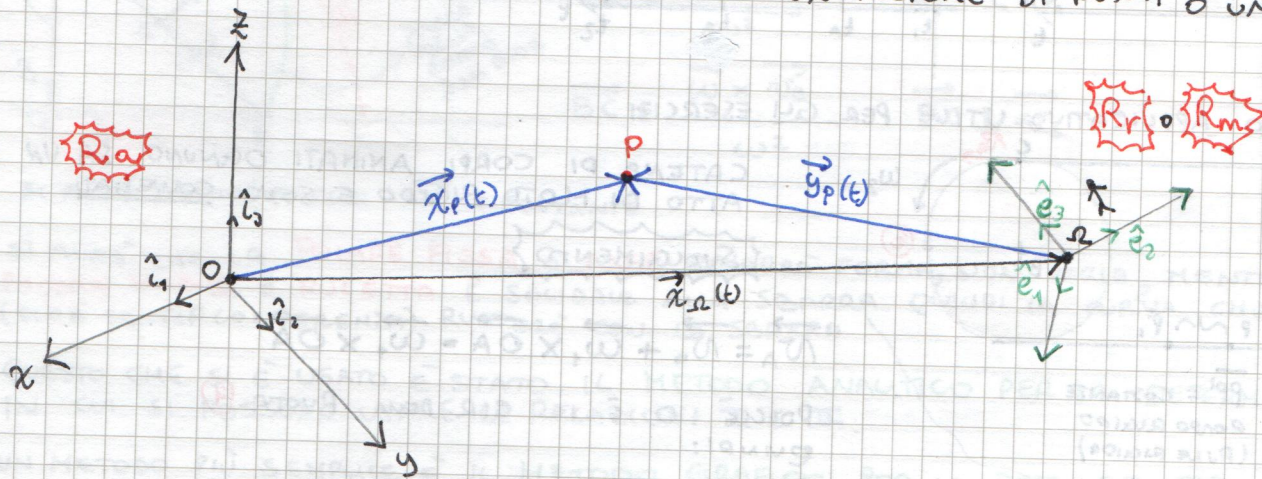
LE ESPRESSIONI DELLA VELOCITÀ DI UN PUNTO O DELLA SUA ACCELERAZIONE RIMANGONO INVARIATE RISPETTO ALE EQUAZIONI VISITE PER L'ATTO DI MOTO RIGIDO.

LA DIFFERENZA È CHE ES. $\vec{x}_p = x_1(t) \hat{x}_1 + x_2(t) \hat{x}_2 + x_3(t) \hat{x}_3$

MECCANICA RELATIVA: EQUAZIONI DELLA DINAMICA IN SISTEMI NON INERZIALI

MOTI RELATIVI - TEORIA DELLA RELATIVITÀ GALILEIANA

LO SCOPO DELLA TEORIA DEI MOTI RELATIVI È DETERMINARE LA RELAZIONE CHE INTERCORRE TRA I DUE DIVERSI PUNTI DI VISTA (O. DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO DIFFERENTI CHE "VEDONO" MUOVERSI IN MANIERA DIFFERENTE UN INSIEME DI PUNTI O UN SOLO PUNTO).



SI HANNO 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO DIFFERENTI:

- R_a CHE È IL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO O ASSOLUTO
- R_r o R_m CHE È IL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE, QUINDI IN MOTO, ED È DEFINITO RELATIVO.

DOVE $R_a(0, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ E $R_r = R_m(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

- P È IL PUNTO MATERIALE DEL QUALE OSSERVIAMO IL MOTO CHE NON È IN RELAZIONE CON IL NOSTRO (È QUINDI INDIPENDENTE DAL MOTO DELL'OSSERVATORE).

CINEMATICA RELATIVA

I MOTI CHE OSSERVIAMO NON SONO NECESSARIAMENTE I MOTI "REALI" DEI CORPI MA DIPENDONO DAL MOTO DELL'OSSERVATORE, QUINDI SI PUÒ CONSIDERARE IL PUNTO P COME UN GENERICO PUNTO CHE SI MUOVE NELLO SPAZIO MENTRE L'OSSERVATORE È SOLIDALE CON IL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE, ANCH'ESSO IN MOTO.

1) POSIZIONE ASSOLUTA

SI DEFINISCE "ASSOLUTA" QUALUNQUE GRANDEZZA RIFERITA AL SISTEMA DI RIFERIMENTO ASSOLUTO (FISSO), QUINDI SI PARLA DI POSIZIONE ASSOLUTA:

$$\vec{x}_p(t) = \vec{x}_R(t) + \vec{y}_p(t) \quad \text{1) POSIZIONE ASSOLUTA}$$

CHE SI PUÒ RISCRIVERE COME:

$$\vec{x}_p(t) = \vec{x}_R(t) + \sum_{k=1}^3 y_{pk}(t) \hat{e}_k(t)$$

VETTORE POSIZIONE RELATIVA

RELATIVE A TERNA MOBILE
SONO LE COMPONENTI DI $\vec{y}_p(t)$ IN R_r
I CUI VERSORI SONO DIPENDENTI DAL TEMPO
POICHÉ P NON È SOLIDALE CON IL SDR
MOBILE. ANCHE LE COMPONENTI SONO
DIP. DAL TEMPO POICHÉ P NON È SOLIDALE
CON IL CORPO.

2) VELOCITÀ ASSOLUTA

DERIVANDO LA 1) SI TROVA LA VELOCITÀ ASSOLUTA DEL PUNTO P , OSSIA:

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{x}_p(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{x}_R(t) + \sum_{k=1}^3 y_{pk}(t) \hat{e}_k(t) \right) = \vec{v}_R(t) + \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^3 y_{pk}(t) \hat{e}_k(t) \right] =$$

$$= \vec{v}_R(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{pk}(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 y_{pk}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt}$$

$\vec{v}_p^R$

DOVE PRENDENDO L'ULTIMO
TERMINE, PER LE FORMULE
DI POISSON SI SA CHE:

$$\frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k(t) \quad \text{QUINDI SOSTITUENDO SI OTTIENE:}$$

$$\sum_{k=1}^3 y_{p_k}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} = \sum_{k=1}^3 y_{p_k}(t) \vec{\omega} \times \hat{e}_k(t) \quad \text{CHE PER LA PROPRIETÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE RISCOVO COME:}$$

$$= \sum_{k=1}^3 \vec{\omega} \times y_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) = \vec{\omega} \times \vec{y}_p(t)$$

QUINDI LA $\vec{v}_p(t)$ È:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{v}_p^R + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t) \quad \textcircled{2} \text{ VELOCITÀ ASSOLUTA I FORMA}$$

DOVE:

• $\vec{v}_p^R$ È LA **VELOCITÀ RELATIVA AL SISTEMA MOBILE**, È VELOCITÀ MISURATA DA UN OSSERVATORE NEL SISTEMA MOBILE R_R .
 È QUINDI LA MANIERA CON CUI NOI, SOLIDALI CON IL SISTEMA MOBILE R_R , VEDIAMO VARIARE LA POSIZIONE DEL PUNTO P RISPETTO AL TEMPO.
 È QUINDI LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DELLE COMPONENTI DEL VETTORE POSIZIONE RISPETTO AL SISTEMA MOBILE:

$$\vec{v}_p^R = \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dt}(y_{p_k}) \hat{e}_k(t) = \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) \quad \textcircled{3} \text{ VELOCITÀ RELATIVA AL SIST. MOBILE}$$

I TERMINI SONO CIÒ CHE RENDE DIVERSO CIÒ CHE UN OSSERVATORE VEDE DA QUELLO CHE INVECE SUCCEDERE VERAMENTE:

$$\vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p = \vec{v}_{p_{TR}} \quad \text{IN CUI } \vec{v}_\Omega = \vec{v}_\Omega(t) \text{ E } \vec{y}_p = \vec{y}_p(t) \text{ E } \vec{\omega}_{TR} = \omega_{TR} \hat{L}_3(t)$$

- $\vec{y}_p$ È IL GENERICO VETTORE POSIZIONE DIPENDENTE DAL TEMPO IN QUANTO SIA IL SDR MOBILE VARIA, SIA IL PUNTO P NON È SOLIDALE CON IL CORPO DA CUI ANCHE $y_{p_k}(t)$ VARIANTI.
- $\vec{\omega}$ È LA VELOCITÀ ANGOLARE CON LA QUALE STA RUOTANDO LO SPAZIO DI PUNTI CONNESSI CON R_R (R_m) $\rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_{TR}$
- $\vec{v}_\Omega$ È LA VELOCITÀ DELL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE R_R

SI PUÒ QUINDI DEFINIRE ANCHE IL **CAMPO DI VELOCITÀ** ASSOCIATO ALL'ATTO DI MOTO **RIGIDO** DELL'INSIEME DI PUNTI GEOMETRICI SOLIDALI AL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE.

$$\vec{v}_p^{TR} = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{r}_{\Omega P}(t) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t) \quad \textcircled{4} \text{ VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO}$$

SI DEFINISCONO DI "**TRASCINAMENTO**" TUTTE QUELLE GRANDEZZE ASSOCIATE AD R_R RISPETTO AL RIFERIMENTO ASSOLUTO R_A .

SI DEFINISCONO "**RELATIVE**" TUTTE LE GRANDEZZE ASSOCIATE AL SDR MOBILE R_R .

LA **VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO** È QUINDI LA VELOCITÀ DEL PUNTO GEOMETRICO P ASSOCIATA AD R_R O R_m ($\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) OCCUPATO DAL PUNTO MATERIALE P NELLO ISTANTE t .

NE CONSEGUE CHE LA **VELOCITÀ ASSOLUTA** È DATA DA:

$$\vec{v}_p^A = \vec{v}_p^{tr} + \vec{v}_p^R \quad \textcircled{5} \text{ VELOCITÀ ASSOLUTA II FORMA}$$

QUINDI LA VELOCITÀ DI UN PUNTO MATERIALE P RISPETTO AL SISTEMA DI RIF. ASSOLUTO R_A È SEMPRE UGUALE ALLA SOMMA DELLA VELOCITÀ DEL PUNTO STESSO RISPETTO AL RIFERIMENTO RELATIVO E DELLA VELOCITÀ DEL PUNTO DELLO SPAZIO CONNESSO AD R_R RISPETTO AL SDR ASSOLUTO R_A .

STESSO DISCORSO SI FA CON L'ACCELERAZIONE ASSOLUTA.

ACCELERAZIONE ASSOLUTA

$$\vec{v}_p^R = \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k} \hat{e}_k(t)$$

SI DERIVA LA RELAZIONE DELLA VELOCITA' $\vec{v}_p^R(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_p^R(t) &= \frac{d\vec{v}_p^R(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_\Omega(t) + \vec{v}_p^R + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t) \right] = \\ &= \vec{a}_\Omega(t) + \frac{d}{dt} \left[\vec{v}_p^R \right] + \frac{d}{dt} \left[\vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t) \right] \\ &= \vec{a}_\Omega(t) + \left[\sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \dot{y}_{p_k}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} \right] + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \frac{d\vec{y}_p(t)}{dt} \\ &= \vec{a}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \frac{d\vec{y}_p(t)}{dt} \end{aligned}$$

SEMPLICE DERIVATA
DI DUE VETTORI
NON E' DERIVATA
DI PRODOTTO TRAVE

RICORDANDO LE FORMULE DI POISSON E LO SVILUPPO DI $\frac{d\vec{y}_p(t)}{dt}$ FATTO AD INIZIO DEL CAPITOLO:

$$\begin{aligned} &= \vec{a}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k}(t) \vec{\omega}_{TR} \times \hat{e}_k(t) + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \\ &+ \vec{\omega}_{TR} \times \left[\sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + y_{p_k}(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt} \right] \\ &= \vec{a}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 \vec{\omega}_{TR} \times \dot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \\ &+ \vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R + \vec{\omega}_{TR} \times \sum_{k=1}^3 y_{p_k}(t) \vec{\omega}_{TR} \times \hat{e}_k(t) = \\ &= \vec{a}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \sum_{k=1}^3 \dot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \\ &+ \vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R + \vec{\omega}_{TR} \times \left(\vec{\omega}_{TR} \times \sum_{k=1}^3 y_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) \right) \\ &= \vec{a}_\Omega + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R(t) + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R + \\ &+ \vec{\omega}_{TR} \times (\vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t)) \end{aligned}$$

VA LASCIATA COSI', NON SI STA
CONSIDERANDO IL MOTO PIANO COME NELL'ATTO
DI MOTO RIGIDO

QUINDI L'ACCELERAZIONE ASSOLUTA E':

$$\vec{a}_p^a = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \vec{\omega}_{TR} \times (\vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t)) + 2(\vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R(t)) + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t)$$

ACCELERAZIONE ASSOLUTA

IN CUI SI HA CHE:

• $\vec{a}_p^a = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{TR} \times \vec{y}_p(t) + \vec{\omega}_{TR} \times (\vec{\omega}_{TR} \times \vec{y}_p(t))$ E' LA **ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO** CHE E' L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO P DELLO SPAZIO CONNESSO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE RR (RIF. RELATIVO) CHE TRANSITA PER IL PUNTO P IN UN DATO ISTANTE.

• $\vec{a}_p^R = \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_{p_k}(t) \hat{e}_k(t) = \ddot{\vec{y}}_p(t)$ E' L' **ACCELERAZIONE RELATIVA** DEL PUNTO P OSSERVATA DA RR

• $\vec{a}_p^c = 2(\vec{\omega}_{TR} \times \vec{v}_p^R(t))$ E' UNA COMPONENTE DI ACCELERAZIONE CHE ESISTE SOLO SE IL PUNTO HA VELOCITA' RELATIVA NON NULLA E NON PARALLELA AD $\vec{\omega}_{TR}$ E' DETTA **ACCELERAZIONE COMPLEMENTARE** o **ACCELERAZIONE DI CORIOLIS**

TUTTE LE RELAZIONI PRECEDENTI POSSONO ESSERE RISCritte CONSIDERANDO IL CORPO C IN MOTO IN CUI SI SCEGLIONO 2 GENERICI PUNTI P E Q. QUINDI PRODOTTI I DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO R_A E R_R SEGUE CHE:

$$\vec{v}_{QA} = \vec{v}_{QA} + \vec{\omega}_A \times \vec{QP}$$

ATTO DI MOTO RIGIDO DI C IN R_A

$$\vec{v}_{QR} = \vec{v}_{QR} + \vec{\omega}_R \times \vec{QP}$$

ATTO DI MOTO RIGIDO DI C IN R_R

$$\vec{v}_{QR} = \vec{v}_{Q_{TR}} + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{QP}$$

ATTO DI MOTO RIGIDO DI R_R IN R_A

$\vec{v}_{Q_{TR}}$ È LA VELOCITÀ RISPETTO A R_A DEI PUNTI DELLO SPAZIO CONNESSO CON R_R NEI QUALI TRANSITANO P E Q.

$$\vec{\omega}_A \times \vec{QP} = \vec{\omega}_R \times \vec{QP} + \vec{\omega}_{TR} \times \vec{QP} \quad \text{DOVE È STATA USATA LA } \vec{v}_P = \vec{v}_R + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

$$\vec{\omega}_A \times \vec{QP} - \vec{\omega}_R \times \vec{QP} - \vec{\omega}_{TR} \times \vec{QP} = \vec{0} = (\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_R - \vec{\omega}_{TR}) \times \vec{QP} = \vec{0}$$

EFFINQUE SI A NULLO 1) $\vec{QP} = \vec{0}$ MA NON HA SENSO 2) $\vec{\omega} // \vec{QP}$ MA NON PU' ESSERE 3) QUINDI LA SOMMA DEI 3 DEVE ESSERE NULLA.

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_R + \vec{\omega}_{TR}$$

IDENTICA ALLA VELOCITÀ ASSOLUTA

QUE LEGA LE VELOCITÀ ANGOLARI OSSERVATE NEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO

DINAMICA RELATIVA: LE FORZE APPARENTI

SI È VISTO CHE LO STUDIO DELLA DINAMICA DI UN SISTEMA INERZIALE R_i È DEFINITO DALLA SECONDA LEGGE DI NEWTON SECONDO CUI LA DINAMICA DI UN PUNTO P È:

$$m \vec{a}_P = \vec{F} + \vec{R}$$

SE PERÒ SI VUOLE OSSERVARE IL MOTO DEL PUNTO P DA UN SISTEMA NON INERZIALE R_R , IN MOTO ARBITRARIO RISPETTO R_i , SI DEVE TENERE CONTO DELLA RELAZIONE CHE C'È TRA ACCELERAZIONE ASSOLUTA OSSERVATA DA R_i E QUELLA RELATIVA OSSERVATA IN R_R . QUINDI:

$$m(\vec{a}_{P_{TR}} + \vec{a}_{PR} + \vec{a}_{PC}) = \vec{F} + \vec{R}$$

CHÉ SI RISCRIVE COME:

$$m \vec{a}_P = \vec{F} + \vec{R} - m \vec{a}_{P_{TR}} - m \vec{a}_{PR} = \vec{F} + \vec{R} - \vec{F}_{APP}$$

LA CAUSA DI QUESTO EFFETTO NON È QUELLA CHE IL (OSSERVATORE SOLIDALE CON R_R) OSSERVA

FORZE APPARENTI

NON ESISTONO MA GIUSTIFICANO LA DINAMICA OSSERVATA

SONO DI NATURA INERZIALE QUINDI OC ALLA MASSA ATTRAVERSO $\vec{a}$

• $m \vec{a}_{P_{TR}}$ È LEGATA ALL'ATTO DI MOTO RIGIDO DELLO SPAZIO DESCRITTO DA R_R AL QUALE SI È SOLIDALI

• $m \vec{a}_{PR}$ CHE C'È SOLO SE IL PUNTO P CHE OSSERVIAMO È IN MOTO RISPETTO A R_R , IL QUALE È DOTATO DI UNA VELOCITÀ ANGOLARE NON NULLA. CON $\vec{v}_{PR} \neq \vec{0}$

UN ESEMPIO È LA MACCHINA: SE CI SONO 2 PERSONE IN MACCHINA, DI CUI 1 VINCOLATA E 1 SVINCOLATA AL SEDILE, NEL MOMENTO IN CUI LA MACCHINA INIZIA A CURVARE, SUL CORPO VINCOLATO NASCE UNA FORZA VINCOLARE CHE IL SEDILE ESERCITA PER SEGUIRE LA TRAIETTORIA.

NON ESISTE ALCUNA FORZA CHE CI SCHIACCIA SUL SEDILE BENSÌ È L'INERZIA DEL CORPO A MANTENERE IL SUO STATO DI QUIETE O DEL MOTO RETTILINEO UNIFORME.

DERIVATA DI UN VETTORE IN SDR MOBILI

SI ANALIZZA IL CASO DI UN VETTORE GENERICO TEMPO-VARIANTE (NON PER FORZA UN VETTORE POSIZIONE, VELOCITA', ECC.).

SI VUOLE TROVARE LA RELAZIONE CHE INTERCORRE TRA R_A E R_R .
NEL SISTEMA MOBILE AURA' CHE $\vec{v}(t)$ E' :

$$\vec{v}(t) = v_1'(t) \hat{e}_1(t) + v_2'(t) \hat{e}_2(t) + v_3'(t) \hat{e}_3(t)$$

SE DERIVO IL VETTORE :

NEL CASO IN CUI CONSIDERIAMO $\vec{v}(t)$ ESPRESSO CON R_R :

$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ E' DERIVATA DI UN VETTORE INVARIANTE QUINDI CORRISPONDE ALLA DERIVATA SIA RISPETTO AD R_A CHE R_R . STUDIATO IL 2° CASO

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} (v_1'(t) \hat{e}_1(t) + v_2'(t) \hat{e}_2(t) + v_3'(t) \hat{e}_3(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 v_k'(t) \hat{e}_k(t) \end{aligned}$$

QUINDI SI AURA' CHE

$$\left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{R_A} = \sum_{k=1}^3 \dot{v}_k'(t) \hat{e}_k(t) + \sum_{k=1}^3 v_k'(t) \frac{d\hat{e}_k(t)}{dt}$$

RICORDANDO LE FORMULE DI POISSON
 $\vec{\omega} \times \hat{e}_k = \frac{d\hat{e}_k}{dt}$

$$\left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{R_A} = \frac{\delta \vec{v}(t)}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v}(t)$$

LEGAME TRA LE DERIVATE DI $\vec{v}$ NEI DUE SDR (ASSOLUTO E RELATIVO)

DERIVATA DI $\vec{v}$ RISPETTO AL SDR ASSOLUTO

$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Big|_{R_R}$
DERIVATA DI $\vec{v}$ RISPETTO AL SDR RELATIVO