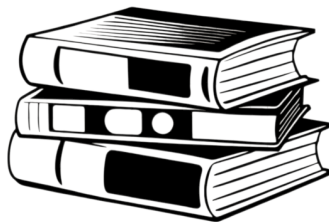


Meccanica Razionale

Università degli studi Roma Tre

Docente: **Umberto Iemma**

Appunti di: **Davide Antonio Mautone**



NOTESTOBOOK
ELEVATE YOUR NOTES

notestobook.it

Anno Accademico 2025/2026

Indice

| | | |
|------|---|----|
| 1 | Dinamica del corpo rigido – Sistema inerziale | 6 |
| 2 | Distribuzione continua di massa | 6 |
| 2.1 | Centro di massa | 7 |
| 3 | Quantità di moto e momento della quantità di moto | 7 |
| 3.1 | Quantità di moto | 7 |
| 3.2 | Momento della quantità di moto rispetto a un polo generico | 8 |
| 4 | Equazioni di conservazione per un sistema rigido | 8 |
| 5 | Matrice di inerzia | 9 |
| 5.1 | Analisi del termine (A) | 9 |
| 5.2 | Analisi del termine (B) e definizione della matrice di inerzia | 10 |
| 5.3 | Espressioni riepilogative | 11 |
| 6 | Momenti e prodotti di inerzia | 11 |
| 6.1 | Momenti di inerzia | 11 |
| 6.2 | Prodotti di inerzia | 12 |
| 7 | Teorema di Huygens–Steiner | 13 |
| 7.1 | Dimostrazione | 13 |
| 7.2 | Generalizzazione tensoriale del teorema di Huygens–Steiner | 14 |
| 8 | Teoremi energetici per il corpo rigido | 14 |
| 8.1 | Potenza delle forze interne | 15 |
| 8.2 | Potenza delle forze esterne | 15 |
| 9 | Teorema di König per il corpo rigido | 16 |
| 9.1 | Energia cinetica di una distribuzione continua | 16 |
| 9.2 | Dimostrazione del teorema di König – caso 3D | 16 |
| 9.3 | Esempio: rotazione pura attorno a un asse | 17 |
| 9.4 | Teorema di König in 2D | 18 |
| 10 | Equazioni di Eulero, terne centrali e principali, ellissoide di inerzia | 18 |
| 10.1 | Ellissoide di inerzia | 19 |
| 11 | Equazioni di Eulero | 20 |

| | | |
|------|--|----|
| 11.1 | Derivazione delle equazioni di Eulero | 21 |
| 12 | Esempio: pendolo composto — approccio euleriano vs. approccio classico | 22 |
| 12.1 | Scelta degli assi e calcolo dei momenti di inerzia | 22 |
| 12.2 | Momento delle forze esterne | 23 |
| 12.3 | Velocità angolare del corpo | 23 |
| 12.4 | Applicazione delle equazioni di Eulero | 23 |
| 13 | Confronto sistematico tra approccio classico e approccio euleriano | 24 |
| 13.1 | Approccio classico (meccanica relativa) | 24 |
| 13.2 | Approccio euleriano | 25 |
| 14 | Esempio: pendolo composto a forma di rombo | 25 |
| 14.1 | Velocità angolare e condizioni di equilibrio | 25 |
| 14.2 | Calcolo dei momenti di inerzia | 26 |
| 14.3 | Equazione di equilibrio | 27 |
| 15 | Problema inverso: lamina quadrata in rotazione | 29 |
| 15.1 | Cerniera ideale e cerniera reale | 31 |
| 15.2 | Indipendenza dalla scelta degli assi centrali | 31 |
| 16 | Lamina rettangolare in rotazione | 32 |
| 17 | Stabilità del moto di rotazione libera attorno a un asse centrale | 33 |
| 17.1 | Formulazione del problema | 33 |
| 17.2 | Linearizzazione | 33 |
| 17.3 | Analisi degli autovalori | 34 |
| 18 | Approfondimento sulla matrice di inerzia e la sua diagonalizzazione | 34 |
| 18.1 | Dipendenza temporale dei coefficienti inerziali | 34 |
| 18.2 | Esempio: parallelepipedo rettangolo | 36 |
| 18.3 | Esempio: cilindro omogeneo | 37 |
| 18.4 | Idealizzazioni: lamine e sbarre | 37 |
| 18.5 | Caso bidimensionale | 38 |
| 19 | Pendolo composto in rotazione: trattazione completa | 38 |
| 19.1 | Struttura della matrice di inerzia | 39 |
| 19.2 | Reazioni vincolari della cerniera | 40 |
| 19.3 | Momento della forza peso | 40 |
| 19.4 | Momento della forza centrifuga | 40 |
| 19.5 | Equazione del moto | 40 |
| 19.6 | Punto di applicazione equivalente della forza centrifuga | 41 |
| 19.7 | Calcolo della forza di Coriolis | 41 |
| 20 | Energia cinetica nel caso bidimensionale | 42 |

| | | |
|------|---|----|
| 21 | Calcolo e diagonalizzazione della matrice di inerzia: esempio della lamina quadrata | 43 |
| 21.1 | Calcolo dei momenti di inerzia | 44 |
| 21.2 | Diagonalizzazione | 45 |
| 22 | Centri geometrici di figure omogenee | 45 |
| 23 | Dimostrazione dell'ellissoide di inerzia | 46 |
| 23.1 | Momento di inerzia rispetto a una direzione generica | 46 |
| 23.2 | Costruzione dell'ellissoide | 48 |
| 23.3 | Determinazione delle direzioni principali tramite moltiplicatori di Lagrange | 48 |
| 24 | Elementi di statica del corpo rigido | 49 |
| 24.1 | Metodo grafico di analisi statica | 49 |
| 24.2 | Esempio: lamina con cerniera e collare | 49 |
| 24.3 | Ruolo dell'attrito nell'equilibrio | 50 |
| 25 | Meccanica lagrangiana | 51 |
| 25.1 | Spostamento virtuale e lavoro virtuale | 52 |
| 25.2 | Derivazione delle equazioni di Eulero–Lagrange | 53 |
| 25.3 | Forze conservative e funzione lagrangiana | 55 |
| 25.4 | Esempio: pendolo semplice | 55 |
| 25.5 | Esempio: punto materiale su guida sinusoidale | 56 |
| 25.6 | Esempio: doppio pendolo | 57 |
| 26 | Energia meccanica dei sistemi di punti materiali | 58 |
| 26.1 | Energia potenziale delle forze esterne | 58 |
| 26.2 | Energia potenziale delle forze interne | 58 |
| 26.3 | Bilancio energetico | 59 |

1 Dinamica del corpo rigido – Sistema inerziale

Nello studio della cinematica del corpo rigido si è esaminato il moto di un sistema i cui punti mantengono immutate le distanze relative, senza tuttavia attribuire a tali punti alcuna proprietà di massa. Si tratta ora di compiere il passo successivo: associare a ciascun punto del corpo una massa, passando così dalla pura descrizione geometrica del moto alla sua caratterizzazione dinamica. Il problema fondamentale consiste nel determinare come una distribuzione continua di materia, soggetta al vincolo di rigidità, risponda alle sollecitazioni esterne.

È opportuno sottolineare che nessun corpo reale soddisfa rigorosamente la condizione di rigidità ideale: ogni materiale, per quanto “rigido”, subisce deformazioni sotto carico. Il modello di corpo rigido risulta pertanto accettabile soltanto entro un intervallo di sollecitazioni per il quale le deformazioni sono trascurabili rispetto alle dimensioni caratteristiche del corpo stesso.

2 Distribuzione continua di massa

Si consideri un sistema costituito da N particelle, ciascuna dotata di massa m_k , vincolate tra loro dalla condizione di rigidità: la distanza relativa tra qualsiasi coppia di particelle non può variare durante il moto. Il passaggio al continuo si realizza facendo tendere N all’infinito e il volume ΔV_k associato a ciascuna particella a zero, mantenendo le particelle confinate in un dominio C di volume finito.

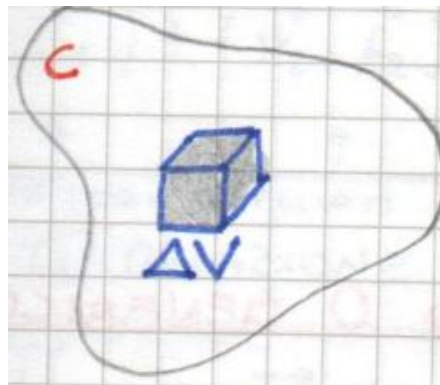


Figura 1: Dominio C contenente un elemento di volume ΔV associato alla generica particella della distribuzione continua.

Si definisce l’elemento di volume ΔV come

$$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z, \quad (1)$$

a cui è associata una massa Δm . Il volume totale \hat{V} e la massa totale \hat{M} del sistema discreto si scrivono rispettivamente come

$$\hat{V} = \sum_{k=1}^N \Delta V_k, \quad \hat{M} = \sum_{k=1}^N \Delta m_k. \quad (2)$$

Moltiplicando e dividendo ciascun termine della somma per ΔV_k si ottiene

$$\hat{M} = \sum_{k=1}^N \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k} \Delta V_k. \quad (3)$$

Il rapporto $\Delta m_k / \Delta V_k$ rappresenta il parametro che mette in relazione il volume occupato dalla k -esima particella con la sua massa. Nel limite $N \rightarrow \infty$ (equivalentemente $\Delta V \rightarrow 0$) le quantità finite diventano infinitesime e la sommatoria si trasforma in un integrale triplo esteso all'intero dominio C :

$$\hat{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k} \Delta V_k = \iiint_C \frac{dm}{dV} dV. \quad (4)$$

Si definisce la **densità volumetrica di massa** ρ come

$$\rho(\vec{x}) = \frac{dm}{dV}, \quad (5)$$

cosicché la massa totale del corpo risulta

$$M = \iiint_C \rho(\vec{x}) dV. \quad (6)$$

Interpretazione fisica. La densità $\rho(\vec{x})$ quantifica la massa per unità di volume in ciascun punto del corpo. Se il materiale è omogeneo, ρ è costante e la massa si ottiene semplicemente come $M = \rho V$. Per materiali non omogenei, ρ varia punto per punto e l'integrale (6) è l'unico modo corretto di calcolare la massa totale¹.

2.1 Centro di massa

Si definisce **centro di massa** (o baricentro) di una distribuzione di materia, anche deformabile, il punto G individuato dal vettore posizione

$$\vec{x}_G = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{x} dV. \quad (7)$$

Tale definizione si ottiene come limite della corrispondente espressione discreta:

$$\vec{x}_G = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\Delta m_k}{M} \vec{x}_k = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \frac{1}{M} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k} \Delta V_k \vec{x}_k. \quad (8)$$

Una proprietà fondamentale del centro di massa, che verrà utilizzata ripetutamente nel seguito, è

$$\iiint_V \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{x}_G) dV = \vec{0}, \quad (9)$$

la quale esprime il fatto che il primo momento statico della distribuzione di massa rispetto al centro di massa è identicamente nullo.

3 Quantità di moto e momento della quantità di moto

3.1 Quantità di moto

La **quantità di moto** di una distribuzione continua di massa si definisce come

$$\vec{q} = \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}) dV, \quad (10)$$

ottenuta al limite dalla somma $\sum_{k=1}^N \Delta m_k \vec{v}_k$.

¹L'integrale è triplo perché ad ogni punto dello spazio tridimensionale appartenente al dominio C si associa un contributo di massa ρdV .

3.2 Momento della quantità di moto rispetto a un polo generico

Il **momento della quantità di moto** (o momento angolare) rispetto a un polo O generico è

$$\vec{h}_O = \iiint_V \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{x}_O) \times \vec{v}(\vec{x}) dV. \quad (11)$$

4 Equazioni di conservazione per un sistema rigido

Un corpo rigido libero nello spazio tridimensionale possiede sei gradi di libertà: tre corrispondono alla posizione di un suo punto (ad esempio il centro di massa) e tre all'orientamento del corpo attorno a tale punto. Sono dunque necessarie sei equazioni scalari per determinarne il moto. Queste equazioni sono le stesse utilizzate per i sistemi N -particellari:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^e, \quad (12)$$

$$\frac{d\vec{h}_O}{dt} = \vec{m}_O^e - M \vec{v}_O \times \vec{v}_G, \quad (13)$$

dove \vec{f}^e è la risultante delle forze esterne e \vec{m}_O^e il momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O . Come per i sistemi di punti materiali, queste equazioni esprimono la relazione causa (sollecitazione) – effetto (moto).

Tuttavia, per una distribuzione continua di massa, la caratterizzazione inerziale non può essere ridotta a un unico coefficiente scalare. Per un punto materiale, la forza \vec{F} applicata produce un'accelerazione $\vec{a} = \vec{F}/m$ la cui direzione coincide sempre con quella della forza, indipendentemente dalla direzione di applicazione. Per una distribuzione continua, invece, la risposta inerziale dipende dalla direzione considerata.

Nella risultante delle forze esterne si distinguono due tipologie: le forze di campo, distribuite su tutto il volume (ad esempio la gravità), e le forze concentrate, definite come vettori applicati in punti specifici. La risultante delle forze si scrive pertanto come

$$\vec{F} = (\vec{x}_1, \vec{F}_1) + (\vec{x}_2, \vec{F}_2) + \iiint_V P(\vec{x}) dV, \quad (14)$$

dove i primi due termini rappresentano vettori applicati e l'integrale fornisce la risultante delle forze di campo sull'intera distribuzione di massa.

L'equazione di conservazione della quantità di moto (12) per la distribuzione continua si esplicita come

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x}) dV = \iiint_V \rho(\vec{x}) \frac{d\vec{v}(\vec{x})}{dt} dV. \quad (15)$$

Interpretazione fisica. Cambiando la direzione del momento applicato, cambiano le accelerazioni angolari indotte. Per ottenere una data accelerazione angolare attorno a un certo asse occorre, in generale, un momento di intensità diversa rispetto a quanto necessario per lo stesso valore di accelerazione angolare attorno a un asse differente. L'intensità del momento richiesto dipende da come la massa è distribuita attorno all'asse individuato dalla direzione del vettore accelerazione angolare. I coefficienti inerziali che legano le componenti del momento alle componenti dell'accelerazione angolare non sono pertanto costanti, ma dipendono dalla direzione.

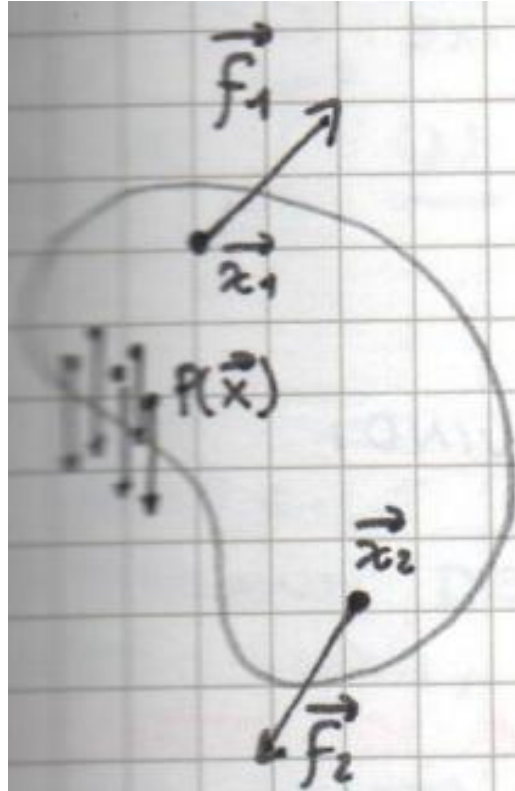


Figura 2: Distribuzione continua di massa soggetta a forze di campo $P(\vec{x})$ e a forze concentrate \vec{F}_1, \vec{F}_2 applicate nei punti \vec{x}_1, \vec{x}_2 .

5 Matrice di inerzia

Si riprende l'espressione del momento della quantità di moto (11), ponendo $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_O$ e ricordando che, per l'atto di moto rigido, $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sostituendo:

$$\vec{h}_O = \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{r} \times (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}) dV. \quad (16)$$

Separando in due contributi:

$$\vec{h}_O = \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x}) (\vec{r} \times \vec{v}_O) dV}_{(A)} + \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV}_{(B)}. \quad (17)$$

5.1 Analisi del termine (A)

Sostituendo $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_O$ nel termine (A) e portando fuori dall'integrale le quantità che non dipendono dalla variabile di integrazione:

$$\begin{aligned} (A) &= \iiint_V \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{x}_O) \times \vec{v}_O dV \\ &= \left[\iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{x} dV \right] \times \vec{v}_O - \left[\iiint_V \rho(\vec{x}) dV \right] (\vec{x}_O \times \vec{v}_O) \\ &= M \vec{x}_G \times \vec{v}_O - M \vec{x}_O \times \vec{v}_O \\ &= M (\vec{x}_G - \vec{x}_O) \times \vec{v}_O. \end{aligned} \quad (18)$$

Definendo $\vec{r}_{OG} = \vec{x}_G - \vec{x}_O$ si ottiene

$$\vec{h}_O^{(A)} = \vec{r}_{OG} \times M\vec{v}_O = M\vec{r}_{OG} \times \vec{v}_O. \quad (19)$$

Interpretazione fisica. Il termine (A) rappresenta il momento della quantità di moto, rispetto al polo O , di un punto materiale di massa M (pari alla massa totale del corpo) che si muove istante per istante con la velocità del polo cinematico O , posizionato nel centro di massa G . Questo termine si annulla se il polo O è fisso ($\vec{v}_O = \vec{0}$) oppure se O coincide con il centro di massa G ($\vec{r}_{OG} = \vec{0}$).

5.2 Analisi del termine (B) e definizione della matrice di inerzia

Per il termine (B) si utilizza l'identità vettoriale $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$(B) = \iiint_V \rho(\vec{x}) [\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] dV = \iiint_V \rho(\vec{x}) [\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] dV. \quad (20)$$

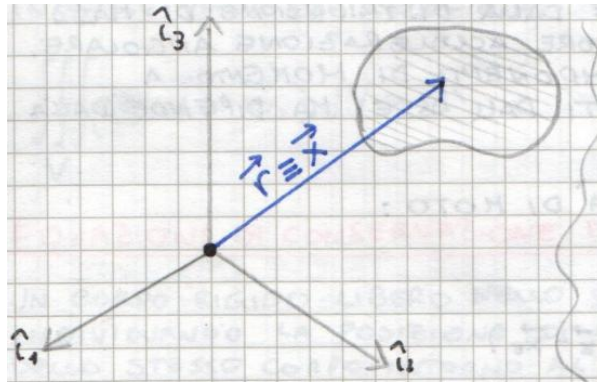


Figura 3: Sistema di riferimento con origine nel polo dei momenti O : il vettore $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_O$ individua la posizione del generico punto del corpo rispetto al polo; \vec{r}_G individua il centro di massa.

Si sceglie un sistema di riferimento con origine nel polo dei momenti, cosicché le componenti di \vec{r} siano (r_1, r_2, r_3) . Scrivendo il termine (B) in forma indiciale, la K -esima componente risulta

$$h_{OK} = \iiint_V \rho \left[\omega_K r^2 - r_K \sum_{j=1}^3 r_j \omega_j \right] dV. \quad (21)$$

Introducendo il delta di Kronecker δ_{Kj} (che vale 1 se $K = j$ e 0 se $K \neq j$) e portando la sommatoria fuori dall'integrale, dato che ω_j non dipende dal volume di integrazione:

$$h_{OK} = \sum_{j=1}^3 \left[\iiint_V \rho (r^2 \delta_{Kj} - r_K r_j) dV \right] \omega_j. \quad (22)$$

Il termine tra parentesi quadre è la componente Kj -esima di una matrice 3×3 . Si definisce pertanto la **matrice di inerzia** \underline{J}^O tramite le sue componenti:

$$J_{Kj}^O = \iiint_V \rho (r^2 \delta_{Kj} - r_K r_j) dV, \quad (23)$$

e il termine (B) si scrive in forma compatta come

$$\vec{h}_O^{(B)} = \underline{\underline{J}}^O \vec{\omega}. \quad (24)$$

Si tratta di un'equazione tensoriale: in tre dimensioni $\underline{\underline{J}}^O$ è una matrice 3×3 che moltiplica il vettore $\vec{\omega}$ (3×1) producendo il vettore $\vec{h}_O^{(B)}$ (3×1).

Interpretazione fisica. La matrice di inerzia $\underline{\underline{J}}^O$ rappresenta il tensore che lega la velocità angolare $\vec{\omega}$ del corpo al contributo rotazionale del momento della quantità di moto. Essa dipende dal polo scelto, dal sistema di riferimento adottato e, in generale, dal tempo a causa del moto del corpo. Le sue componenti, i **momenti di inerzia** (sulla diagonale) e i **prodotti di inerzia** (fuori diagonale), quantificano come la distribuzione di massa influenza la risposta del corpo a sollecitazioni di momento nelle diverse direzioni.

5.3 Espressioni riepilogative

Combinando i risultati dei termini (A) e (B), e ricordando l'equazione (12), si possono scrivere le grandezze fondamentali per una distribuzione continua di massa con vincolo di rigidità:

$$\vec{q} = M \vec{v}_G, \quad (25)$$

$$\vec{h}_O = M \vec{r}_{OG} \times \vec{v}_O + \underline{\underline{J}}^O \vec{\omega}, \quad (26)$$

$$\frac{d\vec{h}_O}{dt} = \vec{m}_O^e - M \vec{v}_O \times \vec{v}_G. \quad (27)$$

Se il polo O coincide con il centro di massa G , il termine \vec{r}_{OG} si annulla e si ha $\vec{h}_G = \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega}$.

6 Momenti e prodotti di inerzia

La matrice di inerzia si scrive in forma esplicita come

$$\underline{\underline{J}}^O = \begin{bmatrix} J_{11}^O & J_{12}^O & J_{13}^O \\ J_{21}^O & J_{22}^O & J_{23}^O \\ J_{31}^O & J_{32}^O & J_{33}^O \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Le componenti si distinguono in due categorie:

- **Momenti di inerzia** (elementi diagonali): $J_{11}^O, J_{22}^O, J_{33}^O$;
- **Prodotti di inerzia** (elementi extra-diagonali): $J_{12}^O = J_{21}^O, J_{13}^O = J_{31}^O, J_{23}^O = J_{32}^O$.

6.1 Momenti di inerzia

La definizione generale di momento di inerzia di una distribuzione di massa rispetto a un asse individuato dal versore $\hat{\nu}$ è

$$J_{\hat{\nu}} = \iiint_V \rho(\vec{r}) |\hat{\nu} \times \vec{r}|^2 dV = \iiint_V \rho(\vec{r}) D^2 dV, \quad (29)$$

dove $D = |\hat{\nu} \times \vec{r}| = r \sin \theta$ è la distanza del generico punto P dall'asse, essendo θ l'angolo tra \vec{r} e $\hat{\nu}$.

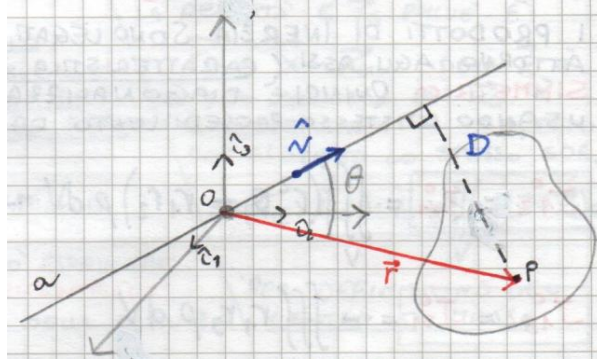


Figura 4: Illustrazione del momento di inerzia: il punto P del corpo dista $D = r \sin \theta$ dall'asse di rotazione individuato dal versore \hat{v} . Il vettore \vec{r} congiunge l'origine O al punto P .

Utilizzando la definizione (23) con $K = j$, e ricordando che $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, si ottengono le espressioni esplicite dei momenti di inerzia rispetto ai tre assi coordinati:

$$J_{11}^O = \iiint_V \rho (r^2 - r_1^2) dV = \iiint_V \rho (r_2^2 + r_3^2) dV, \quad (30)$$

$$J_{22}^O = \iiint_V \rho (r^2 - r_2^2) dV = \iiint_V \rho (r_1^2 + r_3^2) dV, \quad (31)$$

$$J_{33}^O = \iiint_V \rho (r^2 - r_3^2) dV = \iiint_V \rho (r_1^2 + r_2^2) dV. \quad (32)$$

Interpretazione fisica. Ciascun momento di inerzia dipende dalla somma dei quadrati delle distanze del generico punto dalle due coordinate ortogonali all'asse considerato. Ad esempio, J_{33}^O dipende da $r_1^2 + r_2^2$, ovvero dal quadrato della distanza dall'asse r_3 : la quantità $D = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ è proprio la distanza del punto dall'asse 3. La dipendenza quadratica da D implica che i punti del corpo più lontani dall'asse contribuiscono in misura molto più rilevante al momento di inerzia rispetto a quelli vicini.

6.2 Prodotti di inerzia

I prodotti di inerzia sono legati alle caratteristiche di simmetria della distribuzione di massa. Dalla (23) con $K \neq j$ (per cui $\delta_{Kj} = 0$) si ottiene

$$J_{12}^O = J_{21}^O = - \iiint_V \rho r_1 r_2 dV, \quad (33)$$

$$J_{13}^O = J_{31}^O = - \iiint_V \rho r_1 r_3 dV, \quad (34)$$

$$J_{23}^O = J_{32}^O = - \iiint_V \rho r_2 r_3 dV. \quad (35)$$

La matrice di inerzia è dunque **simmetrica** ($J_{Kj}^O = J_{jK}^O$), il che garantisce la sua diagonalizzabilità. È possibile scegliere un opportuno sistema di riferimento nel quale tutti i prodotti di inerzia si annullano e la matrice risulta diagonale: tale sistema individua le cosiddette *direzioni principali di inerzia*.

Riepilogo. Gli elementi della matrice di inerzia dipendono da tre fattori: la scelta del polo, il sistema di riferimento adottato e, in generale, il tempo (a causa del moto del corpo).

7 Teorema di Huygens–Steiner

Il teorema di Huygens–Steiner consente di esprimere il momento di inerzia rispetto a un asse generico in funzione del momento di inerzia rispetto a un asse parallelo passante per il centro di massa. Il risultato fondamentale è il seguente: la differenza tra il momento di inerzia J_α rispetto a un generico asse α , individuato dal versore $\hat{\nu}_\alpha$, e il momento di inerzia $J_{G\alpha}$ rispetto a un asse parallelo passante per il centro di massa G è pari al prodotto della massa totale del corpo per il quadrato della distanza Δ tra i due assi:

$$J_\alpha = J_{G\alpha} + M \Delta^2. \quad (36)$$

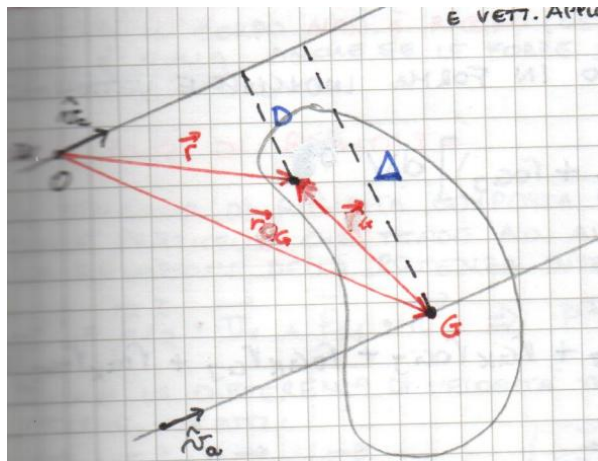


Figura 5: Geometria del teorema di Huygens–Steiner: il corpo ha centro di massa G e polo O . L'asse α passa per O con versore $\hat{\nu}_\alpha$; l'asse parallelo passa per G . La distanza tra i due assi è Δ .

7.1 Dimostrazione

Si parte dalla definizione del momento di inerzia rispetto all'asse α :

$$J_\alpha = \iiint_V \rho(\vec{r}) |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}|^2 dV. \quad (37)$$

Si decompone il vettore posizione come $\vec{r} = \vec{r}_{OG} + \vec{r}_G$, dove \vec{r}_{OG} congiunge il polo O al centro di massa G e $\vec{r}_G = \vec{x} - \vec{x}_G$ è la posizione relativa al centro di massa. Il modulo quadro del prodotto vettoriale diventa

$$\begin{aligned} |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}|^2 &= |\hat{\nu}_\alpha \times (\vec{r}_{OG} + \vec{r}_G)|^2 \\ &= |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_{OG}|^2 + |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_G|^2 + 2(\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_{OG}) \cdot (\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_G). \end{aligned} \quad (38)$$

Sostituendo nella (37):

$$J_\alpha = \underbrace{\iiint_V \rho |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_{OG}|^2 dV}_I + \underbrace{\iiint_V \rho |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_G|^2 dV}_II + \underbrace{\iiint_V 2\rho (\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_{OG}) \cdot (\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_G) dV}_III. \quad (39)$$

Il termine I non dipende dalla variabile di integrazione (se non attraverso ρ) e si riduce a $M |\hat{\nu}_\alpha \times \vec{r}_{OG}|^2 = M \Delta^2$, dove Δ è la distanza tra i due assi paralleli. Il termine II è per

definizione il momento di inerzia $J_{G\alpha}$ rispetto all'asse parallelo passante per G . Il termine III si annulla in virtù della proprietà (9) del centro di massa². Si ottiene dunque

$$J_\alpha = J_{G\alpha} + M \Delta^2, \quad (40)$$

valida per qualsiasi geometria tridimensionale. \square

Interpretazione fisica. Il momento di inerzia rispetto a un asse qualsiasi è sempre maggiore o uguale a quello rispetto all'asse parallelo baricentrico: il termine $M\Delta^2$ rappresenta il contributo inerziale di un punto materiale di massa M concentrato nel centro di massa e distante Δ dall'asse α . Il minimo momento di inerzia, per una data direzione, si ha dunque sempre rispetto all'asse passante per il centro di massa.

7.2 Generalizzazione tensoriale del teorema di Huygens–Steiner

Il teorema può essere generalizzato all'intera matrice di inerzia. Data la matrice \underline{J}^O calcolata rispetto a un polo generico O e la matrice \underline{J}^G calcolata rispetto al centro di massa G , con assi paralleli, vale la relazione componente per componente:

$$J_{Kj}^O = J_{Kj}^G + M (r_{OG}^2 \delta_{Kj} - r_{OGK} r_{OGj}), \quad (41)$$

dove r_{OGK} e r_{OGj} sono le componenti del vettore \vec{r}_{OG} e $r_{OG}^2 = |\vec{r}_{OG}|^2$.

La dimostrazione segue lo stesso schema della precedente. Partendo dalla definizione (23) e sostituendo $\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}_{OG}$ in forma indiciale:

$$J_{Kj}^O = \iiint_V \rho [(r_G^2 + 2\vec{r}_G \cdot \vec{r}_{OG} + r_{OG}^2) \delta_{Kj} - (r_{GK} + r_{OGK})(r_{Gj} + r_{OGj})] dV. \quad (42)$$

Sviluppando e raggruppando:

$$J_{Kj}^O = \iiint_V \rho (r_G^2 \delta_{Kj} - r_{GK} r_{Gj}) dV + \iiint_V \rho [r_{OG}^2 \delta_{Kj} + 2 \sum_i r_{Gi} r_{OGi} \delta_{Kj} - r_{GK} r_{OGj} - r_{OGK} r_{Gj} - r_{OGK} r_{OGj}] dV. \quad (43)$$

I termini contenenti $r_{Gi} = x_i - x_{Gi}$ (o analogamente r_{GK} , r_{Gj}) a fattore lineare si annullano per la proprietà (9), e i termini in \vec{r}_{OG} escono dall'integrale essendo costanti. Si ottiene infine:

$$J_{Kj}^O = \underbrace{J_{Kj}^G}_{\substack{\text{matrice di inerzia} \\ \text{rispetto a } G}} + \underbrace{M (r_{OG}^2 \delta_{Kj} - r_{OGK} r_{OGj})}_{\substack{\text{inerzia di massa } M \\ \text{concentrata in } G \text{ rispetto a } O}}. \quad (44)$$

8 Teoremi energetici per il corpo rigido

I teoremi energetici formulati per i sistemi N -particellari possono essere estesi al caso di corpi rigidi, a patto di tenere conto delle specificità introdotte dal vincolo di rigidità.

Per un sistema N -particellare valgono le relazioni

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I = \vec{0}, \quad \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \times \vec{f}_k^I = \vec{0}, \quad (45)$$

ovvero le forze interne costituiscono uno stato di sollecitazione globalmente equivalente a zero, sia come risultante sia come momento risultante.

²Nel termine III, il fattore $(\hat{v}_\alpha \times \vec{r}_{OG})$ è costante e può essere portato fuori dall'integrale; l'integrale rimanente contiene $\rho \vec{r}_G = \rho (\vec{x} - \vec{x}_G)$, il cui integrale su V è nullo.

8.1 Potenza delle forze interne

Tuttavia la potenza delle forze interne non è in generale nulla. Per un sistema di due particelle:

$$P^I = \vec{f}_{12}^I \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{21}^I \cdot \vec{v}_2. \quad (46)$$

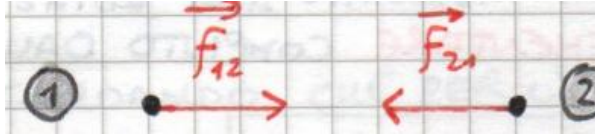


Figura 6: Due particelle interagenti: la forza \vec{f}_{12}^I agisce sulla particella 1 ed è diretta lungo la congiungente; $\vec{f}_{21}^I = -\vec{f}_{12}^I$ agisce sulla particella 2.

Se le particelle si avvicinano o si allontanano (corpo non rigido, cioè deformabile), le velocità hanno componenti lungo la congiungente e la potenza interna è non nulla.

Il vincolo di rigidità impone che non esista alcuna componente della velocità relativa nella direzione della congiungente. Poiché $\vec{f}_{12}^I = -\vec{f}_{21}^I$:

$$P^I = \vec{f}_{12}^I \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0, \quad (47)$$

in quanto, per l'atto di moto rigido, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_{12}$, che è ortogonale a \vec{r}_{12} , e le forze interne sono dirette lungo \vec{r}_{12} .

La stessa trattazione si estende a N particelle:

$$P^I = \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N \vec{f}_{kj}^I \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_j) = 0, \quad (48)$$

poiché per ogni coppia (k, j) la forza interna \vec{f}_{kj}^I è parallela a \vec{r}_{kj} e la differenza di velocità $\vec{v}_k - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_{kj}$ è ortogonale a \vec{r}_{kj} . Il risultato $P^I = 0$ si conserva nel passaggio al limite $N \rightarrow \infty$.

Interpretazione fisica. Nell'atto di moto rigido le forze interne non compiono lavoro: tutta la potenza è associata alle sole forze esterne. Questo è un risultato fondamentale che semplifica notevolmente la trattazione energetica dei corpi rigidi rispetto al caso di sistemi deformabili.

8.2 Potenza delle forze esterne

Scegliendo il centro di massa G come polo dell'atto di moto rigido e ricordando che $\vec{v}_k = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Gk}$, la potenza delle forze esterne si scrive

$$P^E = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot (\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Gk}) \right]. \quad (49)$$

Utilizzando la proprietà ciclica del prodotto misto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ si porta $\vec{\omega}$ fuori dall'integrale e si ottiene

$$P^E = \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \iiint_V \vec{r}_G(\vec{x}) \times \vec{f}(\vec{x}) dV = \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G + \vec{m}_G^E \cdot \vec{\omega}, \quad (50)$$

dove il primo termine è il contributo traslazionale e il secondo è il contributo associato alla rotazione.

Il lavoro elementare compiuto dalle forze esterne in un intervallo dt è pertanto

$$dL^E = (\vec{f}^E \cdot \vec{v}_G) dt + (\vec{m}_G^E \cdot \vec{\omega}) dt. \quad (51)$$

A partire da questa relazione si estendono al corpo rigido tutti i teoremi energetici validi per i sistemi N -particellari:

$$T_2 - T_1 = L_{1 \rightarrow 2}^E, \quad (52)$$

$$\frac{dE}{dt} = P^{E_{\text{NC}}}, \quad (53)$$

$$E_2 - E_1 = L_{1 \rightarrow 2}^{E_{\text{NC}}}, \quad (54)$$

dove T è l'energia cinetica, E l'energia meccanica e l'apice NC indica il contributo delle sole forze non conservative.

9 Teorema di König per il corpo rigido

9.1 Energia cinetica di una distribuzione continua

L'energia cinetica di un corpo rigido, inteso come distribuzione continua di massa, è

$$T = \iiint_V \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 dV. \quad (55)$$

9.2 Dimostrazione del teorema di König – caso 3D

Si riscrive $\vec{v} = \vec{v}_G + (\vec{v} - \vec{v}_G)$ e si sviluppa il modulo quadro:

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho |\vec{v}_G|^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \rho |\vec{v} - \vec{v}_G|^2 dV + \iiint_V \rho \vec{v}_G \cdot (\vec{v} - \vec{v}_G) dV. \quad (56)$$

Il terzo integrale si annulla: portando fuori la costante \vec{v}_G e riconoscendo sotto il segno di integrale la derivata temporale di $\rho(\vec{x} - \vec{x}_G)$, il cui integrale su V è nullo per la (9). Restano dunque i primi due termini:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \iiint_V \rho |\vec{v} - \vec{v}_G|^2 dV. \quad (57)$$

Per un corpo rigido, la velocità relativa al centro di massa è $\vec{v} - \vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_G$, dove $\vec{r}_G = \vec{x} - \vec{x}_G$. Sostituendo:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \iiint_V \rho |\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dV. \quad (58)$$

Il secondo integrale si elabora tramite l'identità vettoriale $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$, ottenendo

$$\iiint_V \rho |\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dV = \iiint_V \rho [\omega^2 r_G^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_G)^2] dV. \quad (59)$$

In forma indiciale, portando le componenti ω_i e ω_k (che non dipendono da V) fuori dall'integrale:

$$\iiint_V \rho |\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dV = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \omega_i \left[\iiint_V \rho (r_G^2 \delta_{ik} - r_{Gi} r_{Gk}) dV \right] \omega_k. \quad (60)$$

Il termine tra parentesi quadre è la componente ik -esima della matrice di inerzia rispetto al centro di massa, J_{ik}^G . Si riconosce dunque il prodotto quadratico:

$$\iiint_V \rho |\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dV = \vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{h}_G, \quad (61)$$

dove $\vec{h}_G = \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega}$ è il contributo rotazionale del momento della quantità di moto rispetto a G .

Il **teorema di König** per corpi rigidi in tre dimensioni si scrive pertanto nella forma

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{h}_G. \quad (62)$$

Interpretazione fisica. L'energia cinetica di un corpo rigido si decompone in due contributi indipendenti: il primo, $\frac{1}{2} M v_G^2$, è l'energia cinetica di traslazione, pari a quella di un punto materiale di massa M che si muove con la velocità del centro di massa; il secondo, $\frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega}$, è l'energia cinetica di rotazione, la cui caratterizzazione inerziale è data dall'intera matrice di inerzia $\underline{\underline{J}}^G$ e non da un singolo scalare. Il coefficiente inerziale nella traslazione è la massa m ; nella rotazione è il momento di inerzia, che dipende non solo dalla quantità di massa, ma quadraticamente da come essa è distribuita rispetto all'asse di rotazione.

9.3 Esempio: rotazione pura attorno a un asse

Si consideri un corpo rigido in rotazione pura ($\vec{v}_G = \vec{0}$) attorno all'asse \hat{e}_3 con velocità angolare costante $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$. In tal caso il teorema di König si riduce a

$$T = \frac{1}{2} \{0, 0, \omega\} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} J_{33} \omega^2. \quad (63)$$

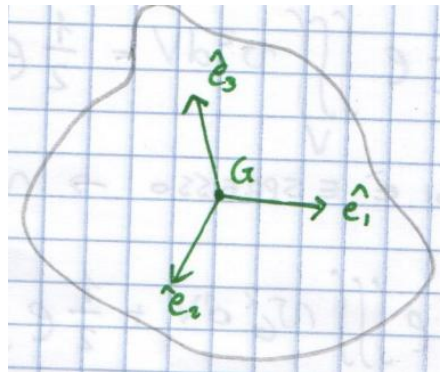


Figura 7: Corpo rigido in rotazione pura attorno all'asse \hat{e}_3 , solidale al centro di massa G .

Il contributo inerziale alla rotazione è il momento di inerzia J_{33} : a differenza della traslazione, dove il coefficiente è la sola massa m , il momento di inerzia dipende linearmente dalla massa ma quadraticamente dalla sua disposizione spaziale. Ad esempio, per un disco omogeneo di massa m e raggio R che ruota attorno all'asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco, $J = \frac{1}{2} m R^2$.

Interpretazione fisica. A parità di massa e di velocità angolare, è possibile aumentare l'energia cinetica di rotazione spostando la massa verso la periferia, aumentando così il momento

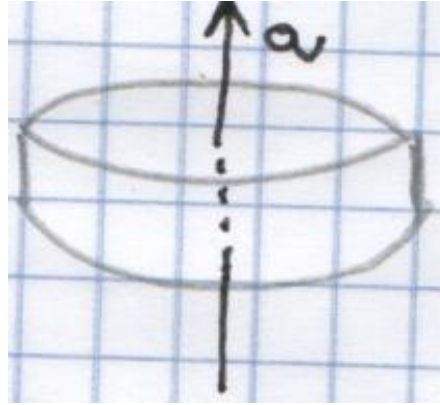


Figura 8: Disco omogeneo di massa m e raggio R : il momento di inerzia rispetto all'asse centrale è $J = \frac{1}{2}mR^2$.

di inerzia. Su questo principio si basa il *volano*: un disco di acciaio con la massa concentrata sulla corona esterna, progettato per immagazzinare la massima energia cinetica a parità di peso e velocità angolare³.

9.4 Teorema di König in 2D

Per un corpo rigido in moto piano, con densità ρ costante⁴, si ha

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V |\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dV. \quad (64)$$

Sviluppando il modulo quadro e sfruttando la proprietà del centro di massa per eliminare il termine misto, si ottiene

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2, \quad (65)$$

dove J_G è il momento di inerzia scalare rispetto all'asse perpendicolare al piano di moto passante per G ⁵.

Mentre per un punto materiale $T = \frac{1}{2}mv^2$, per un corpo rigido la caratterizzazione inerziale dipende dalla direzione nello spazio e dall'asse di rotazione: le diverse componenti della velocità angolare e del momento della quantità di moto sono legate tra loro attraverso le componenti della matrice di inerzia in modo differente per ciascuna direzione.

10 Equazioni di Eulero, terne centrali e principali, ellissoide di inerzia

Come discusso in precedenza, la matrice di inerzia \underline{J}^O dipende in generale dal tempo a causa del moto del corpo. Questa dipendenza temporale rende complessa l'applicazione dell'equazione (13): la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto porterebbe alla

³I volani sono talvolta definiti “serbatoi di energia cinetica”. Le tecnologie moderne ne hanno ridotto notevolmente le dimensioni, impiegando materiali compositi ad alta resistenza e velocità angolari molto elevate.

⁴L'ipotesi di densità costante semplifica la trattazione ma non è necessaria per la validità del teorema; il risultato finale vale anche per corpi non omogenei.

⁵Nel caso piano l'asse di rotazione è unico e la matrice di inerzia si riduce a un singolo scalare.

formazione di termini contenenti le derivate temporali delle componenti della matrice di inerzia, generando un sistema di equazioni differenziali a coefficienti variabili nel tempo, di difficile risoluzione.

Il problema si aggira scegliendo come terna di riferimento una **terna solidale al corpo**, nella quale i momenti e i prodotti di inerzia risultano costanti nel tempo. Tra le infinite terne possibili per ogni scelta del polo, ne esiste una in particolare, chiamata **terna principale di inerzia** (o **terna centrale di inerzia** se il polo coincide con il centro di massa), caratterizzata dal fatto che tutti i prodotti di inerzia rispetto ad essa sono nulli. La matrice di inerzia risulta dunque **diagonale**.

I momenti di inerzia rispetto a questi assi si chiamano **momenti principali** (o **centrali**) del corpo. La diagonalizzabilità è garantita dalla simmetria della matrice di inerzia. La determinazione delle direzioni degli assi principali è equivalente alla ricerca degli autovettori della matrice $\underline{\underline{J}}^O$.

Se gli autovettori sono $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$, il problema agli autovalori si scrive

$$\underline{\underline{J}}^O \vec{z}_k = \lambda_k \vec{z}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (66)$$

e la matrice risulta diagonale nella base degli autovettori:

$$\vec{z}_k^T \underline{\underline{J}}^O \vec{z}_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

dove ciascun autovalore λ_k rappresenta il momento di inerzia principale (o centrale) del corpo rispetto al k -esimo asse. La simmetria di $\underline{\underline{J}}^O$ garantisce che i tre autovettori siano ortogonali tra loro, formando una terna ortonormale.

Interpretazione fisica. Nella terna principale le componenti del momento della quantità di moto dipendono esclusivamente dalle componenti omologhe della velocità angolare: $h_k = \lambda_k \omega_k$, senza accoppiamento tra assi diversi. Vincolando questa terna al corpo si elimina la dipendenza dal tempo della matrice di inerzia, al prezzo di lavorare in un sistema non inerziale (il che porta alle equazioni di Eulero).

Se il polo è il centro di massa G si parla di **terna centrale di inerzia** e i relativi momenti si chiamano **momenti centrali di inerzia**; per ogni corpo rigido esiste una e una sola terna centrale. Se il polo è generico si parla di **terne principali di inerzia** e di **momenti principali di inerzia**.

10.1 Ellissoide di inerzia

Esiste una rappresentazione geometrica equivalente della matrice di inerzia basata sull'**ellissoide di inerzia**. Si consideri un corpo C con centro di massa noto e si traccino tutte le rette passanti per il centro di massa, formando una stella di rette. Ciascuna retta è individuata da un versore \hat{n} e ad essa è associato il momento di inerzia

$$J_\alpha = \iiint_V \rho |\hat{n} \times \vec{r}_G|^2 dV. \quad (68)$$

Su ciascuna semiretta si marca un punto a distanza $1/\sqrt{J_\alpha}$ dal centro di massa⁶. Ripetendo il procedimento per tutte le direzioni, il luogo dei punti così ottenuti genera un **ellissoide**,

⁶La scelta della lunghezza $1/\sqrt{J_\alpha}$ è convenzionale ma non arbitraria: essa garantisce che il luogo geometrico dei punti così definiti soddisfi l'equazione di un ellissoide.

qualunque sia la forma del corpo. Segmenti più lunghi corrispondono a momenti di inerzia minori.

Gli assi principali dell'ellissoide coincidono con gli assi principali di inerzia e le loro semilunghezze sono pari a $1/\sqrt{\lambda_k}$, dove λ_k sono i momenti principali. La determinazione degli assi dell'ellissoide equivale alla diagonalizzazione della matrice di inerzia.



Figura 9: Lamina quadrata omogenea: gli assi principali di inerzia nel piano della lamina risultano ruotati di 45° rispetto ai lati. Il centro di massa G coincide con il centro geometrico.

Dal punto di vista pratico, l'individuazione degli assi principali è spesso facilitata dalla presenza di simmetrie geometriche del corpo: ogni asse di simmetria di un corpo omogeneo è anche un asse principale di inerzia⁷. Ad esempio, per una lamina quadrata omogenea gli assi principali nel piano della lamina sono ruotati di 45° rispetto ai lati della lamina.

11 Equazioni di Eulero

Si è visto che la matrice di inerzia, se espressa rispetto a un sistema di riferimento fisso, varia nel tempo a causa del moto del corpo, rendendo complessa la risoluzione delle equazioni della dinamica. Si riscrive ora l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto in una forma particolarmente vantaggiosa per problemi tridimensionali complessi.

Si parte dall'equazione

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \vec{M}_G, \quad (69)$$

e si sceglie una **terna centrale di inerzia**, solidale al corpo, nella quale la matrice di inerzia \underline{J}_G è diagonale. In tale terna i versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sono funzioni del tempo poiché ruotano con il corpo. Il momento della quantità di moto e il momento delle forze si esprimono come

$$\vec{h}_G = \sum_K h_{GK} \hat{e}_K, \quad \vec{M}_G = \sum_K M_K \hat{e}_K. \quad (70)$$

La derivata temporale di \vec{h}_G tiene conto della variabilità sia delle componenti sia dei versori:

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \sum_K \left(\dot{h}_{GK} \hat{e}_K + h_{GK} \frac{d\hat{e}_K}{dt} \right) = \frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{h}_G, \quad (71)$$

⁷Questo criterio discende dal fatto che, se il corpo possiede un piano di simmetria, i prodotti di inerzia che coinvolgono la coordinata ortogonale a tale piano si annullano identicamente.

dove $\delta\vec{h}_G/\delta t$ è la **derivata relativa**, calcolata nel sistema di riferimento solidale al corpo (in cui i versori sono costanti), e il termine $\vec{\omega} \times \vec{h}_G$ è il contributo di **trascinamento**, con $\vec{\omega}$ velocità angolare del corpo⁸.

Sostituendo nella (69) e portando il termine di trascinamento a secondo membro, l'equazione diventa

$$\frac{\delta\vec{h}_G}{\delta t} = \vec{M}_G - \vec{\omega} \times \vec{h}_G. \quad (72)$$

Poiché si lavora nella terna centrale, la matrice di inerzia è diagonale e il momento della quantità di moto si scrive

$$\vec{h}_G = \underline{J}_G \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} J_{11} \omega_1 \\ J_{22} \omega_2 \\ J_{33} \omega_3 \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

ovvero ciascuna componente di \vec{h}_G dipende esclusivamente dalla componente omologa di $\vec{\omega}$.

Interpretazione fisica. La situazione è profondamente diversa da quella della quantità di moto $\vec{q} = M\vec{v}_G$, in cui il fattore di scala tra velocità e quantità di moto è un unico scalare M , indipendente dalla direzione. Nella rotazione, il fattore di proporzionalità tra le componenti di $\vec{\omega}$ e quelle di \vec{h}_G cambia da asse ad asse: possono esistere direzioni lungo le quali la rotazione è “più faticosa” (momento di inerzia maggiore). La scelta degli assi centrali disaccoppia le componenti di \vec{h}_G da quelle di $\vec{\omega}$, rendendo lo studio notevolmente più agevole.

11.1 Derivazione delle equazioni di Eulero

Si calcola il prodotto vettoriale $\vec{\omega} \times \vec{h}_G$ nella terna centrale:

$$\vec{\omega} \times \vec{h}_G = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ J_{11}\omega_1 & J_{22}\omega_2 & J_{33}\omega_3 \end{vmatrix} = (J_{33} - J_{22})\omega_2\omega_3 \hat{e}_1 + (J_{11} - J_{33})\omega_1\omega_3 \hat{e}_2 + (J_{22} - J_{11})\omega_1\omega_2 \hat{e}_3. \quad (74)$$

Nella terna solidale al corpo i versori non variano nel tempo, quindi la derivata relativa è semplicemente

$$\frac{\delta\vec{h}_G}{\delta t} = \sum_K J_{KK} \dot{\omega}_K \hat{e}_K. \quad (75)$$

Proiettando l'equazione (72) sui tre assi centrali si ottengono le **equazioni di Eulero** per la dinamica del corpo rigido:

$$\begin{cases} J_{11} \dot{\omega}_1 + (J_{33} - J_{22}) \omega_2 \omega_3 = M_1^G \\ J_{22} \dot{\omega}_2 + (J_{11} - J_{33}) \omega_1 \omega_3 = M_2^G \\ J_{33} \dot{\omega}_3 + (J_{22} - J_{11}) \omega_1 \omega_2 = M_3^G \end{cases} \quad (76)$$

Interpretazione fisica. Al primo membro compaiono le velocità angolari del corpo e i momenti principali di inerzia; al secondo membro i momenti di *tutte* le forze esterne — attive e vincolari — ma *non* le forze apparenti. I termini non lineari $(J_{33} - J_{22})\omega_2\omega_3$ ecc. nascono dal

⁸Si tratta della stessa decomposizione della derivata temporale vista per i sistemi di riferimento non inerziali: la differenza tra la derivata assoluta e quella relativa è il termine di trascinamento legato alla rotazione del sistema di riferimento.

trascinamento del sistema di riferimento solidale al corpo e incorporano automaticamente gli effetti che, nell'approccio classico, si manifestano come forze apparenti (centrifuga, Coriolis). Questa è la differenza fondamentale tra l'approccio euleriano e quello basato sulla meccanica relativa.

Condizioni di validità. Le equazioni di Eulero nella forma (76) richiedono che:

- il polo coincida con il centro di massa G , oppure sia un punto fisso⁹;
- gli assi scelti siano assi principali (o centrali) di inerzia, così che \underline{J} sia diagonale;
- la velocità angolare $\vec{\omega}$ sia quella *del corpo*, espressa nelle componenti della terna centrale, e non vada decomposta in contributi "relativi" e "di trascinamento".

12 Esempio: pendolo composto — approccio euleriano vs. approccio classico

Si riprende il problema del pendolo composto (sbarra omogenea di lunghezza L e massa m , incernierata in un punto O su un asse verticale rotante a velocità Ω costante) già risolto tramite meccanica relativa. Si mostra ora come le equazioni di Eulero conducano al medesimo risultato in modo più diretto.

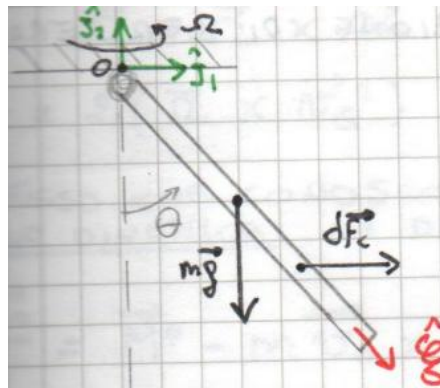


Figura 10: Pendolo composto: sbarra di lunghezza L incernierata nel punto O su un asse verticale rotante a Ω . Il sistema di riferimento solidale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ha \hat{e}_1 lungo la sbarra e \hat{e}_3 ortogonale al piano di oscillazione. L'angolo θ è misurato dalla verticale.

12.1 Scelta degli assi e calcolo dei momenti di inerzia

Si pone un sistema di riferimento solidale alla sbarra con origine nella cerniera O : \hat{e}_1 lungo la sbarra, \hat{e}_2 e \hat{e}_3 ortogonali ad essa. La sbarra è monodimensionale, perciò qualsiasi asse ortogonale a \hat{e}_1 passante per O è asse centrale. I momenti di inerzia risultano:

$$J_{11} = 0, \quad J_{22} = J_{33} = \int_0^L \rho \xi^2 d\xi = m \frac{L^2}{3}. \quad (77)$$

Il momento J_{11} è nullo poiché ogni punto della sbarra ha distanza nulla dall'asse \hat{e}_1 .

⁹Se il polo O è fisso ma non coincide con il centro di massa, le equazioni di Eulero mantengono la stessa struttura ma i momenti di inerzia e i momenti delle forze sono calcolati rispetto a O . In tal caso si possono determinare i momenti di inerzia rispetto a G e trasportarli con il teorema di Huygens-Steiner.

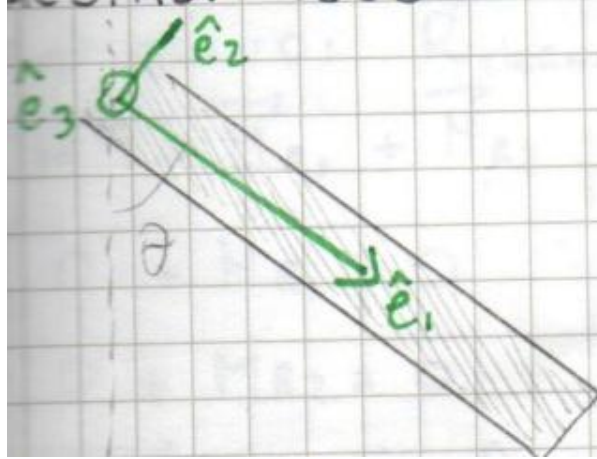


Figura 11: Sbarra monodimensionale di lunghezza L con sistema solidale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$: \hat{e}_1 è diretto lungo la sbarra.

12.2 Momento delle forze esterne

Le forze esterne attive si riducono al peso $m\vec{g}$. Il momento del peso rispetto a O è

$$\vec{M}_{\text{peso}}^O = -mg \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_3. \quad (78)$$

Il momento delle forze vincolari \vec{M}_V^O rimane per ora incognito. Il momento totale è dunque

$$\vec{M}^O = -mg \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_3 + \vec{M}_V^O. \quad (79)$$

12.3 Velocità angolare del corpo

Nell'approccio euleriano, $\vec{\omega}$ è la velocità angolare *totale* del corpo, espressa nella terna solidale. Il corpo compie simultaneamente la rotazione Ω attorno all'asse verticale e l'oscillazione $\dot{\theta}$ attorno a \hat{e}_3 . Proiettando $\vec{\Omega}$ sugli assi solidali:

$$\vec{\omega} = -\Omega \cos \theta \hat{e}_1 + \Omega \sin \theta \hat{e}_2 + \dot{\theta} \hat{e}_3, \quad (80)$$

e la sua derivata temporale:

$$\dot{\vec{\omega}} = \Omega \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_1 + \Omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_2 + \ddot{\theta} \hat{e}_3. \quad (81)$$

12.4 Applicazione delle equazioni di Eulero

Sostituendo (77), (80) e (81) nelle equazioni di Eulero (76) con polo O si ottiene, dopo semplificazione:

$$\begin{cases} 0 = M_{V1}^O \\ m \frac{L^2}{3} \Omega \dot{\theta} \cos \theta + m \frac{L^2}{3} \Omega \dot{\theta} \cos \theta = M_{V2}^O \\ m \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta + m \frac{L^2}{3} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (82)$$

La terza equazione è l'equazione del moto del pendolo composto: non contiene reazioni vincolari lungo \hat{e}_3 (per definizione di cerniera). Il termine $m \frac{L^2}{3} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta$ corrisponde esattamente

alla risultante della forza centrifuga ottenuta nell'approccio classico tramite integrazione, ma qui compare *automaticamente* senza che sia stato necessario calcolare o integrare alcuna forza apparente.

Interpretazione fisica. Le equazioni di Eulero inglobano nei termini non lineari $(J_{33} - J_{22})\omega_2\omega_3$ ecc. tutti gli effetti che nell'approccio classico si manifestano come forze centrifughe e di Coriolis. La differenza operativa è significativa: nell'approccio classico occorre identificare le forze apparenti, trovarne i punti di applicazione e integrarle sulla distribuzione di massa; nell'approccio euleriano è sufficiente conoscere la velocità angolare totale del corpo e i momenti di inerzia rispetto agli assi centrali.

13 Confronto sistematico tra approccio classico e approccio euleriano

Per un corpo rigido con un grado di libertà (ad esempio la sbarra incernierata su un asse rotante), i due approcci conducono alla stessa equazione del moto ma differiscono nel procedimento.

13.1 Approccio classico (meccanica relativa)

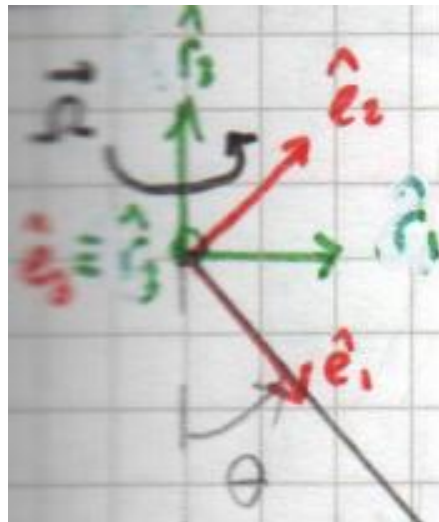


Figura 12: Schema dell'approccio classico: sistema di riferimento solido con $\vec{\Omega}$ di trascinamento, forze reali e forze apparenti agenti sul centro di massa G .

Si pone un sistema di riferimento solido in rotazione a $\vec{\Omega}$. La seconda legge di Newton, scritta nel sistema non inerziale, richiede l'introduzione esplicita delle forze apparenti:

$$\vec{F}^e - m\vec{a}_G^{\text{Tr}} - m\vec{a}_G^{\text{C}} = m\vec{a}_G^{\text{R}}, \quad (83)$$

dove \vec{a}_G^{Tr} è l'accelerazione di trascinamento, \vec{a}_G^{C} quella di Coriolis e \vec{a}_G^{R} quella relativa. Per l'equazione dei momenti rispetto a un polo fisso O si ha

$$\vec{OG} \times m\vec{g} + \vec{OP} \times \vec{F}_{\text{centr}} + \vec{M}_R + \vec{OQ} \times \vec{F}_{\text{Cor}} = \underline{\underline{J}}^O \dot{\vec{\omega}}^R, \quad (84)$$

dove occorre conoscere i punti di applicazione delle forze apparenti distribuite e integrarle sul volume del corpo.

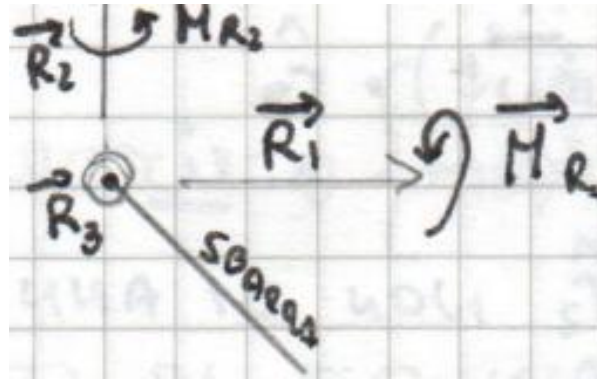


Figura 13: Cerniera tridimensionale: genera tre reazioni vincolari R_1 , R_2 , R_3 e due momenti di reazione M_{R1} , M_{R2} , eliminando cinque gradi di libertà.

13.2 Approccio euleriano

Si sceglie una terna di assi centrali (o principali) solidale al corpo. L'equazione di conservazione del momento della quantità di moto si riscrive come

$$\left. \frac{d\vec{h}_O}{dt} \right|_{SI} = \left. \frac{\delta\vec{h}_O}{\delta t} \right|_{SN} + \vec{\omega} \times \vec{h}_O, \quad (85)$$

dove SI indica il sistema inerziale e SN il sistema non inerziale solidale al corpo.

La grandezza fondamentale è la **velocità angolare del corpo** $\vec{\omega}$, che contiene sia la componente di “trascinamento” sia quella “relativa”, ma *non va decomposta*: essa è l'intera velocità angolare del corpo espressa nella terna centrale.

Le equazioni di Eulero (76) si applicano direttamente. Al secondo membro compaiono i momenti delle *sole* forze reali (attive e vincolari), senza forze apparenti. I termini non lineari al primo membro assorbono automaticamente tutti gli effetti cinematici.

Errore tipico. Nelle equazioni di Eulero la velocità angolare $\vec{\omega}$ *non* è la velocità angolare relativa $\vec{\omega}^R$ né quella di trascinamento $\vec{\Omega}$, bensì la velocità angolare totale del corpo rigido espressa nella terna principale¹⁰.

14 Esempio: pendolo composto a forma di rombo

Si consideri un pendolo composto a forma di rombo (quattro sbarrette uguali), incernierato su un vertice e posto su un asse verticale rotante a Ω costante. Il sistema possiede un solo grado di libertà, l'angolo θ .

14.1 Velocità angolare e condizioni di equilibrio

Come nel caso della sbarra, la velocità angolare totale del corpo nella terna solidale è

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} -\Omega \cos \theta \\ \Omega \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{Bmatrix} \Omega \dot{\theta} \sin \theta \\ \Omega \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (86)$$

¹⁰Una sorgente comune di errore è decomporre $\vec{\omega}$ in contributo relativo e di trascinamento come si farebbe nella meccanica relativa. In Eulero non si parla di “relativo” e “trascinamento”: $\vec{\omega}$ è la velocità angolare *del corpo*, intesa come grandezza unica.

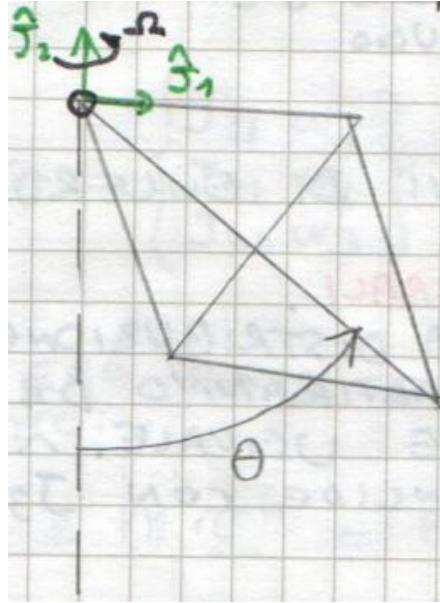


Figura 14: Pendolo composto a forma di rombo con diagonali D e d , incernierato su un vertice e posto su un asse verticale rotante a Ω costante. Il grado di libertà è l'angolo θ dalla verticale.

All'equilibrio ($\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$) si ha

$$\vec{\omega}|_{\text{eq}} = \begin{Bmatrix} -\Omega \cos \theta \\ \Omega \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}}|_{\text{eq}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (87)$$

14.2 Calcolo dei momenti di inerzia

Si scompone il rombo in quattro triangoli congruenti, ciascuno di massa $m = M/4$.

Per ciascun triangolo di base b e altezza a , il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il suo baricentro e parallelo alla base risulta¹¹

$$J_{11}^{\text{tri}} = \frac{1}{12} m b^2. \quad (88)$$

Per il rombo completo, sommando i contributi dei quattro triangoli:

$$J_{11}^{\text{tot}} = 4 \cdot \frac{1}{6} m \frac{D^2}{4} = \frac{1}{24} M D^2. \quad (89)$$

Analogamente:

$$J_{22}^{\text{tri}} = \frac{1}{12} m d^2, \quad J_{22}^{\text{tot,CM}} = \frac{1}{24} M d^2. \quad (90)$$

Poiché i momenti sono calcolati rispetto ai baricentri dei singoli triangoli e non rispetto al polo O (la cerniera), occorre applicare il **teorema di Huygens–Steiner**. Per J_{22} , la distanza tra l'asse passante per il centro di massa del rombo e quello passante per il polo è $D/2$, da cui

$$J_{22}^O = \frac{1}{24} M d^2 + M \frac{D^2}{4}. \quad (91)$$

¹¹Il calcolo si effettua tramite integrazione diretta sulla superficie del triangolo: $J_{11}^{\text{tri}} = \iint x_2^2 \rho dx_1 dx_2$.



Figura 15: Schema del pendolo a rombo con il sistema di riferimento solidale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ e l'angolo θ dalla verticale.

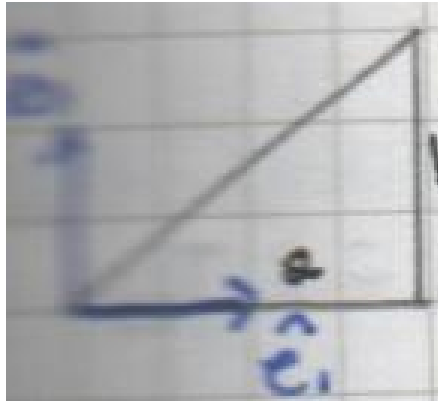


Figura 16: Triangolo elementare del rombo con base b e altezza a , con sistema di riferimento (\hat{e}_1, \hat{e}_2) nel baricentro.

14.3 Equazione di equilibrio

Il momento del peso rispetto al polo è

$$\vec{M}_{\text{peso}} = \vec{OG} \times M\vec{g}, \quad \vec{OG} = \frac{D}{2} \hat{e}_1, \quad (92)$$

dove $\vec{g} = -g\hat{J}_2$ e, proiettando il versore verticale sulla terna solidale, $\hat{J}_2 = -\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$.
Si ottiene

$$\vec{M}_{\text{peso}} \cdot \hat{e}_3 = -Mg \frac{D}{2} \sin\theta. \quad (93)$$

All'equilibrio le equazioni di Eulero (76), proiettate su \hat{e}_3 , danno

$$(J_{22} - J_{11}) \omega_2 \omega_1|_{\text{eq}} = M_3^O, \quad (94)$$

ovvero

$$-(J_{22} - J_{11}) \Omega^2 \cos\theta \sin\theta = -Mg \frac{D}{2} \sin\theta. \quad (95)$$

Interpretazione fisica. Il termine a sinistra contiene l'effetto della forza centrifuga, che emerge *spontaneamente* dai termini non lineari di Eulero senza essere stata introdotta esplicitamente. Il peso (a destra) è bilanciato dalla distribuzione centrifuga.

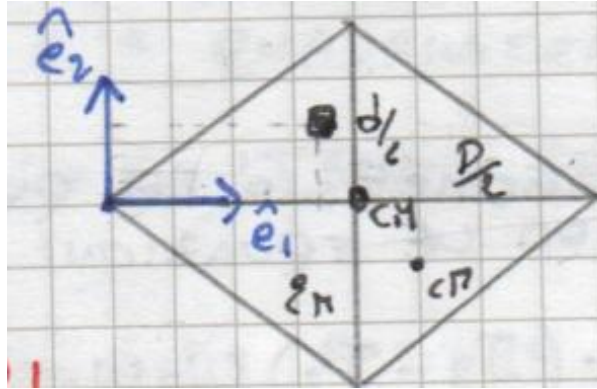


Figura 17: Rombo con le quattro regioni triangolari e il centro di massa CM. I momenti di inerzia dei singoli triangoli sono calcolati rispetto ai propri baricentri e poi trasportati al polo O tramite il teorema di Huygens–Steiner.

Raccogliendo $\sin \theta$:

$$\sin \theta \left[Mg \frac{D}{2} - (J_{22} - J_{11}) \Omega^2 \cos \theta \right] = 0. \quad (96)$$

Le soluzioni sono:

- $\sin \theta = 0$, da cui $\theta_{E1} = 0$ e $\theta_{E2} = \pi$ (posizioni pendolari classiche);
- la soluzione aggiuntiva

$$\cos \theta_E = \frac{Mg \frac{D}{2}}{(J_{22} - J_{11}) \Omega^2}, \quad (97)$$

che esiste soltanto se $|\cos \theta_E| \leq 1$, cioè quando

$$Mg \frac{D}{2} \leq (J_{22} - J_{11}) \Omega^2. \quad (98)$$



Figura 18: Configurazione di equilibrio del rombo per Ω inferiore alla soglia critica: il pendolo resta vicino alla verticale.

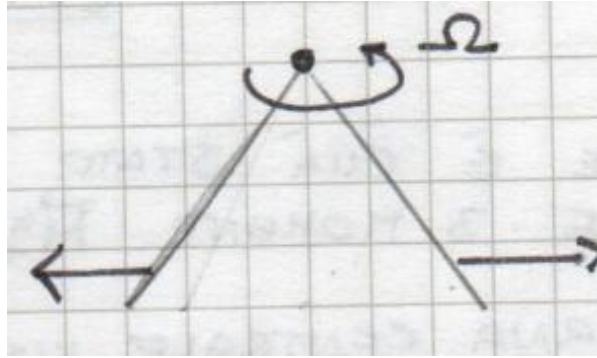


Figura 19: Configurazione di equilibrio del rombo per Ω superiore alla soglia: compare una posizione di equilibrio inclinata.

La differenza rispetto al caso della sbarra risiede nel calcolo di $J_{22} - J_{11}$, che per il rombo dipende da entrambe le diagonali D e d . In forma esplicita:

$$\cos \theta_E = \frac{Mg \frac{D}{2}}{\frac{M}{24} (7D^2 - d^2) \Omega^2} . \quad (99)$$

Interpretazione fisica. Il coseno può risultare anche negativo, corrispondente a un angolo di equilibrio $\theta > \pi/2$. Ciò accade quando le diagonali del rombo hanno proporzioni tali che la forza centrifuga agente sulle porzioni superiore e inferiore del corpo si bilancia parzialmente, consentendo equilibri “rovesciati”.

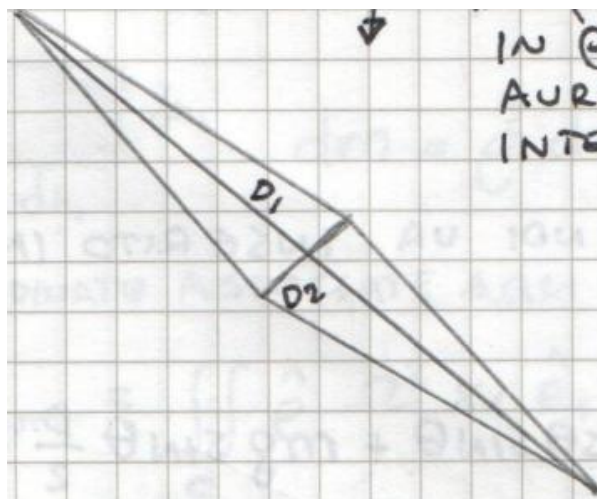


Figura 20: Rombo con diagonali D_1 e D_2 : la geometria delle due diagonali determina la possibilità di equilibri a $\theta > \pi/2$.

15 Problema inverso: lamina quadrata in rotazione

Si presenta ora un problema inverso: noto il moto, si vuole determinare lo stato di sollecitazione compatibile con esso. Questo tipo di analisi è fondamentale in progettazione, dove spesso si osserva un moto e si desidera conoscere le sollecitazioni che lo rendono possibile.



Figura 21: Lamina quadrata incernierata lungo una diagonale mediante perni fissi. La lamina ruota a $\omega = \text{cost}$ attorno a tale diagonale.

Si consideri una lamina quadrata omogenea incernierata lungo una diagonale tramite perni, vincolata a ruotare esclusivamente attorno a quella diagonale con velocità angolare ω costante. Si scelga il centro di massa G come polo e la terna centrale di inerzia con \hat{e}_1 lungo la diagonale di rotazione.

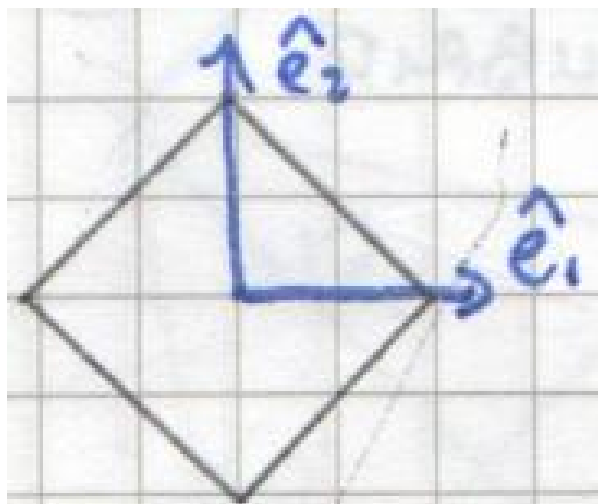


Figura 22: Lamina quadrata con terna centrale (\hat{e}_1, \hat{e}_2) : \hat{e}_1 è diretto lungo la diagonale di rotazione.

La velocità angolare nella terna centrale è

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (100)$$

Per la simmetria del quadrato, $J_{11} = J_{22}$ e $J_{33} = 2J_{11}$ ¹². Sostituendo nelle equazioni di Eulero (76):

$$\begin{cases} 0 = M_1^G \\ 0 = M_2^G \\ 0 = M_3^G \end{cases} \quad (101)$$

Il risultato fondamentale è che la rotazione a velocità angolare costante attorno a un asse di simmetria è compatibile con **momenti risultanti nulli** su tutti e tre gli assi. Il moto è quindi possibile senza alcuna sollecitazione esterna netta, a condizione che non vi siano dissipazioni (attrito nei perni).

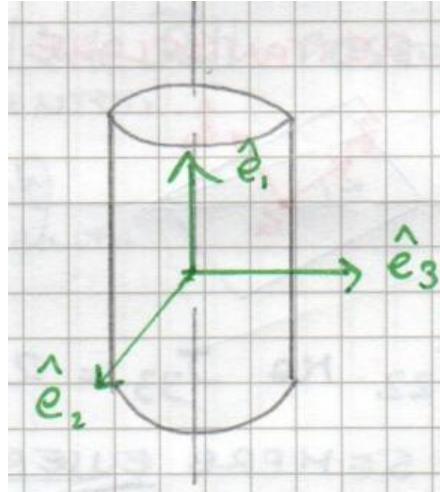


Figura 23: Cerniera cilindrica con i versori \hat{e}_1 , \hat{e}_2 , \hat{e}_3 : la rotazione è libera attorno a \hat{e}_1 .

15.1 Cerniera ideale e cerniera reale

Nel caso di **cerniera ideale**, i momenti di reazione vincolare sono nulli:

$$M_1^{\text{vinc}} = 0, \quad M_2^{\text{vinc}} = 0, \quad M_3^{\text{vinc}} = 0. \quad (102)$$

La cerniera è in grado di esercitare due momenti di reazione (lungo \hat{e}_2 e \hat{e}_3) e tre reazioni traslazionali, eliminando complessivamente cinque gradi di libertà.

Nel caso di **cerniera reale**, l'attrito introduce momenti dissipativi:

$$M_k^{\text{attrito}} = -M_k^{\text{vinc}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (103)$$

Se i momenti di reazione risultano nulli (come nel caso della lamina quadrata su asse di simmetria), non si generano nemmeno momenti di attrito: il moto a ω costante è dunque realizzabile anche con perni reali, purché le condizioni iniziali siano diverse da zero.

15.2 Indipendenza dalla scelta degli assi centrali

Per la lamina quadrata, essendo $J_{11} = J_{22}$, l'ellissoide di inerzia nel piano (\hat{e}_1, \hat{e}_2) è un cerchio (ellissoide rotondo). Ne consegue che *qualsiasi* coppia di assi ortogonali nel piano della lamina passanti per il centro di massa costituisce una terna centrale valida.

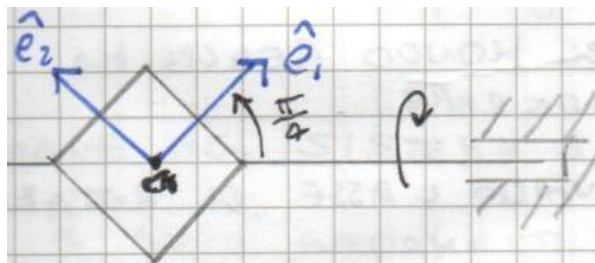


Figura 24: Scelta alternativa degli assi centrali per la lamina quadrata: \hat{e}_1 e \hat{e}_2 paralleli ai lati. La velocità angolare si proietta su entrambi gli assi.

¹²Per una lamina quadrata di lato ℓ e massa M , si ha $J_{11} = J_{22} = M\ell^2/12$ rispetto al centro di massa. La relazione $J_{33} = J_{11} + J_{22} = 2J_{11}$ è conseguenza del teorema degli assi perpendicolari per corpi piani.

Ad esempio, scegliendo gli assi paralleli ai lati del quadrato (ruotati di 45° rispetto alla scelta precedente), la velocità angolare diventa

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \cos(\pi/4) \\ -\omega \sin(\pi/4) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (104)$$

Poiché anche in questa terna $J_1 = J_2$ e $J_3 = 2J_1$, le equazioni di Eulero forniscono nuovamente $M_1^G = M_2^G = M_3^G = 0$: il risultato è invariante rispetto alla scelta degli assi centrali, come deve essere.

Se si sceglissero assi che non sono di simmetria, si scopre comunque che i prodotti di inerzia si annullano: suddividendo il dominio quadrato in quattro triangoli e quattro quadrilateri, i contributi positivi e negativi a J_{12} si compensano esattamente per simmetria. La lamina quadrata è dunque inscritta in un ellissoide di inerzia rotondo nel piano, e qualsiasi terna nel piano passante per il centro di massa è automaticamente una terna centrale.

Interpretazione fisica. Il fatto che l'ellissoide sia rotondo implica che la risposta inerziale del corpo alla rotazione è identica per ogni asse nel piano della lamina. Questo non accade per una lamina rettangolare, i cui momenti di inerzia lungo i due assi di simmetria sono in generale diversi.

16 Lamina rettangolare in rotazione

A differenza della lamina quadrata, per la quale qualsiasi coppia di assi ortogonali nel piano costituisce una terna centrale, una **lamina rettangolare** presenta momenti di inerzia diversi lungo i due assi di simmetria nel piano: $J_{11} \neq J_{22}$. Se la lamina ruota attorno a un asse che non coincide con uno degli assi centrali, si generano momenti vincolari non nulli.

Si consideri una lamina rettangolare omogenea incernierata lungo un asse che forma un angolo α con gli assi centrali \hat{e}_1, \hat{e}_2 . La velocità angolare nella terna centrale si scrive

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \sin \alpha \\ -\omega \cos \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (105)$$

Applicando le equazioni di Eulero con $J_1 \neq J_2$ si ottiene

$$\begin{cases} 0 = M_1^G \\ 0 = M_2^G \\ \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha (J_2 - J_1) = M_3^G \end{cases} \quad (106)$$

Il moto cinematico è identico a quello della lamina quadrata (rotazione a ω costante), ma la non simmetria della distribuzione di massa genera un **momento vincolare non nullo** lungo \hat{e}_3 , ortogonale al piano della lamina.

Interpretazione fisica. Per garantire $\omega = \text{cost}$ occorre un momento perpendicolare al piano della lamina, che ruota solidalmente con essa. Questo momento è fornito dalla coppia di reazioni nei perni di sostegno, di verso opposto, la cui intensità dipende dalla differenza $J_2 - J_1$ e dall'angolo α tra l'asse di rotazione e gli assi centrali. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$ (rotazione attorno a

un asse centrale), il momento si annulla; il valore massimo si raggiunge per $\alpha = \pi/4$. Nel caso reale, occorre inoltre considerare il momento di attrito M_G^{attrito} lungo l'asse di rotazione, che si oppone al moto.

17 Stabilità del moto di rotazione libera attorno a un asse centrale

Si consideri un corpo rigido in rotazione attorno a un asse centrale in assenza di momenti esterni (**moto libero**). Il problema fondamentale è stabilire se tale moto sia stabile: se il sistema viene perturbato con una piccola velocità angolare aggiuntiva, la perturbazione resta limitata nel tempo o cresce indefinitamente?

17.1 Formulazione del problema

Si supponga che il corpo ruoti inizialmente attorno all'asse \hat{e}_1 con velocità angolare costante $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_1$. Si introduce una piccola perturbazione $\vec{\omega}'(t)$, con $|\vec{\omega}'| \ll |\vec{\Omega}|$, cosicché la velocità angolare totale diventa

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}' = \begin{Bmatrix} \Omega + \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}'_1 \\ \dot{\omega}'_2 \\ \dot{\omega}'_3 \end{Bmatrix}. \quad (107)$$

Le equazioni di Eulero in assenza di momenti esterni ($M_k^G = 0$) diventano

$$\begin{cases} J_{11} \dot{\omega}'_1 + (J_{33} - J_{22}) \omega'_2 \omega'_3 = 0 \\ J_{22} \dot{\omega}'_2 + (J_{11} - J_{33}) (\Omega + \omega'_1) \omega'_3 = 0 \\ J_{33} \dot{\omega}'_3 + (J_{22} - J_{11}) (\Omega + \omega'_1) \omega'_2 = 0 \end{cases} \quad (108)$$

17.2 Linearizzazione

Poiché $|\vec{\omega}'| \ll |\vec{\Omega}|$, i termini di ordine superiore al primo nelle componenti perturbative possono essere trascurati: il prodotto $\omega'_2 \omega'_3$ è di ordine 2, e ω'_1 nella parentesi è trascurabile rispetto a Ω . Il sistema linearizzato risulta

$$\begin{cases} \dot{\omega}'_1 = 0 \\ \dot{\omega}'_2 = \frac{J_{33} - J_{11}}{J_{22}} \Omega \omega'_3 \\ \dot{\omega}'_3 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \Omega \omega'_2 \end{cases} \quad (109)$$

La prima equazione indica che la perturbazione lungo l'asse di rotazione rimane costante. Le altre due equazioni costituiscono un sistema accoppiato che si può riscrivere in forma matriciale:

$$\dot{\vec{\omega}}' = \underline{\underline{A}} \vec{\omega}', \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(J_{33} - J_{11})}{J_{22}} \Omega \\ 0 & \frac{(J_{11} - J_{22})}{J_{33}} \Omega & 0 \end{bmatrix}. \quad (110)$$

17.3 Analisi degli autovalori

La soluzione generale è $\vec{\omega}' = \sum_k \vec{z}_k e^{\lambda_k t}$, dove λ_k e \vec{z}_k sono autovalori e autovettori di $\underline{\underline{A}}$. Il polinomio caratteristico è

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = -\lambda \left[\lambda^2 - \frac{(J_{33} - J_{11})(J_{11} - J_{22})}{J_{22} J_{33}} \Omega^2 \right] = 0, \quad (111)$$

da cui $\lambda_1 = 0$ e

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{(J_{33} - J_{11})(J_{11} - J_{22})}{J_{22} J_{33}} \Omega^2}. \quad (112)$$

La natura delle radici dipende dal segno del prodotto $(J_{33} - J_{11})(J_{11} - J_{22})$:

- J_1 **massimo** ($J_1 > J_2$ e $J_1 > J_3$): i due fattori hanno segni opposti, il prodotto è negativo, e $\lambda_{2,3}$ sono **immaginari puri** coniugati. La perturbazione è oscillatoria e limitata: il moto è **stabile**.
- J_1 **minimo** ($J_1 < J_2$ e $J_1 < J_3$): entrambi i fattori hanno lo stesso segno negativo¹³, il prodotto è ancora negativo, e $\lambda_{2,3}$ sono **immaginari puri**: il moto è **stabile**.
- J_1 **intermedio**: i due fattori hanno lo stesso segno, il prodotto è positivo, e $\lambda_{2,3}$ sono **reali e distinti** (uno positivo e uno negativo). La componente con autovalore positivo cresce esponenzialmente: il moto è **instabile**.

Interpretazione fisica. La rotazione libera attorno all'asse di momento di inerzia *massimo* o *minimo* è stabile; la rotazione attorno all'asse di momento di inerzia *intermedio* è instabile. Questo risultato spiega numerosi fenomeni pratici: un frisbee viene lanciato in rotazione attorno all'asse di momento di inerzia massimo (perpendicolare al disco) per garantire stabilità; un pallone da football americano ha forma affusolata affinché il momento di inerzia attorno all'asse longitudinale sia il minimo, rendendo stabile la rotazione attorno a quell'asse; la rigatura all'interno della canna di un'arma da fuoco impone al proiettile una rotazione attorno al proprio asse di simmetria, che corrisponde all'asse di momento di inerzia minimo. L'insieme di questi fenomeni è noto come **stabilità del moto giroscopico**.

18 Approfondimento sulla matrice di inerzia e la sua diagonalizzazione

Si riprende la struttura della matrice di inerzia per esaminarne le proprietà e le conseguenze sull'equazione del moto, con particolare attenzione al ruolo della diagonalizzazione.

18.1 Dipendenza temporale dei coefficienti inerziali

A partire dalla relazione $\vec{h}'_O = \underline{\underline{J}}^O \vec{\omega}$, la K -esima componente del contributo rotazionale del momento della quantità di moto è

$$h'_{OK} = \sum_{J=1}^3 J_{OKJ} \omega_J, \quad (113)$$

¹³ $(J_{33} - J_{11}) > 0$ e $(J_{11} - J_{22}) < 0$, oppure viceversa a seconda dell'ordinamento, ma il prodotto risulta comunque negativo.

dove sia J_{OKJ} sia ω_J dipendono in generale dal tempo. La derivata temporale produce

$$\frac{dh'_{OK}}{dt} = \sum_{J=1}^3 \left(\dot{J}_{OKJ} \omega_J + J_{OKJ} \dot{\omega}_J \right) = m_{OK}, \quad (114)$$

generando un'equazione differenziale ordinaria a **coefficienti non costanti**, poiché i momenti e prodotti di inerzia cambiano al variare della posizione angolare del corpo rispetto al sistema di riferimento fisso.

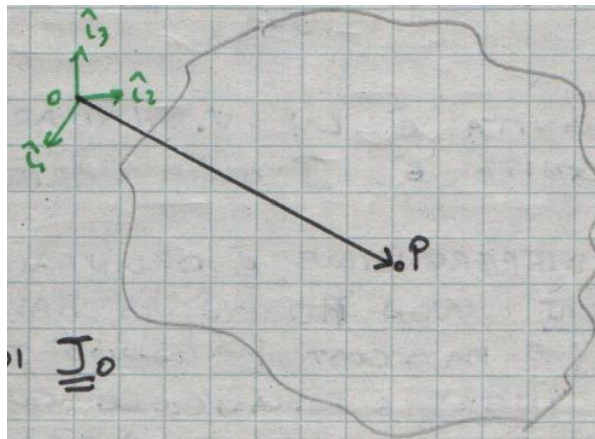


Figura 25: Corpo rigido con polo O e punto generico P: il vettore posizione r definisce la posizione del punto rispetto al polo. La distanza D dall'asse x_3 e la grandezza che interviene nel calcolo del momento di inerzia.

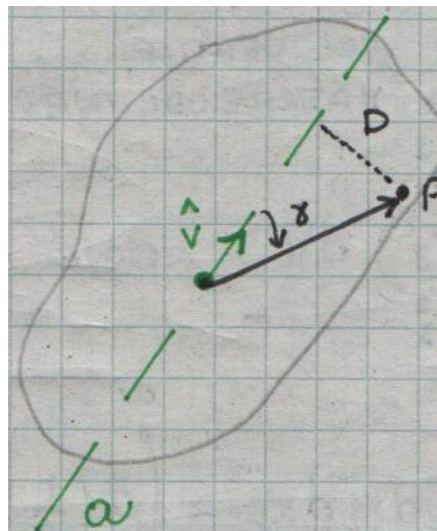


Figura 26: Angolo alpha tra il vettore posizione r e l'asse x_3 : la distanza $D = r \sin(\alpha)$ e la grandezza al quadrato che compare nell'integrando del momento di inerzia.

La strategia per eliminare la dipendenza temporale consiste nell'applicare il **teorema spettrale** alla matrice simmetrica \underline{J}^O , individuando un sistema di riferimento solidale al corpo (assi principali o centrali) nel quale la matrice è diagonale e i suoi elementi sono costanti nel tempo. L'equazione del moto diventa così a coefficienti costanti¹⁴.

¹⁴Questa è la motivazione fondamentale per l'introduzione delle equazioni di Eulero: trasformare un sistema a coefficienti variabili in uno a coefficienti costanti, a prezzo di lavorare in un sistema non inerziale solidale al corpo.

18.2 Esempio: parallelepipedo rettangolo

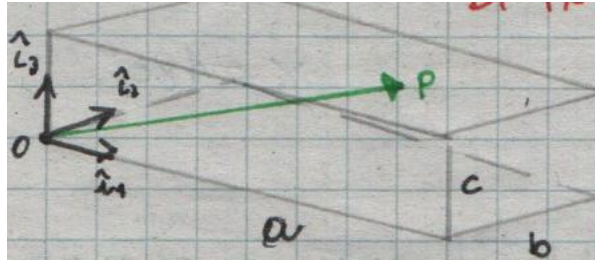


Figura 27: Parallelepipedo rettangolo di dimensioni $a \times b \times c$ con polo nel vertice O . Il sistema di riferimento ha gli assi allineati con gli spigoli.

Si consideri un parallelepipedo rettangolo omogeneo di dimensioni a, b, c , densità ρ e massa $m = \rho abc$, con polo nel vertice O e assi allineati agli spigoli.

Momenti di inerzia. Il calcolo di J_{11}^O si sviluppa integralmente:

$$\begin{aligned} J_{11}^O &= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho (r_2^2 + r_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^a \int_0^b \rho \left(r_2^2 c + \frac{c^3}{3} \right) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^a \rho \left(\frac{b^3 c}{3} + b \frac{c^3}{3} \right) dx_1 = \rho a b c \left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} \right) = \frac{m}{3} (b^2 + c^2). \end{aligned} \quad (115)$$

Per simmetria della struttura del calcolo:

$$J_{22}^O = \frac{m}{3} (a^2 + c^2), \quad J_{33}^O = \frac{m}{3} (a^2 + b^2). \quad (116)$$

Prodotti di inerzia. Il prodotto J_{12}^O si calcola come

$$J_{12}^O = - \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho r_1 r_2 dx_3 dx_2 dx_1 = -\rho \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} c = -\frac{m}{4} ab = J_{21}^O. \quad (117)$$

Se si sposta il polo al **centro di figura** (centro geometrico del parallelepipedo), gli estremi di integrazione diventano simmetrici rispetto all'origine e i prodotti di inerzia si annullano:

$$J_{12}^O|_{\text{centro}} = -\rho \int_{-a/2}^{a/2} r_1 dr_1 \int_{-b/2}^{b/2} r_2 dr_2 \int_{-c/2}^{c/2} dx_3 = 0 = J_{21}^O|_{\text{centro}}. \quad (118)$$

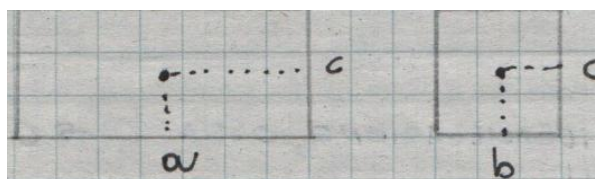


Figura 28: Parallelepipedo con polo nel centro di figura: gli estremi di integrazione simmetrici garantiscono prodotti di inerzia nulli e matrice diagonale.

Interpretazione fisica. La scelta del polo nel centro di figura rende la matrice di inerzia diagonale perché, per ogni coppia di coordinate, l'integrale del prodotto $r_K r_J$ su un dominio simmetrico rispetto all'origine si annulla (la funzione integranda è dispari in ciascuna variabile). Qualsiasi corpo con tre piani di simmetria possiede un punto (l'intersezione dei piani) per cui tutti i prodotti di inerzia sono nulli¹⁵.

18.3 Esempio: cilindro omogeneo

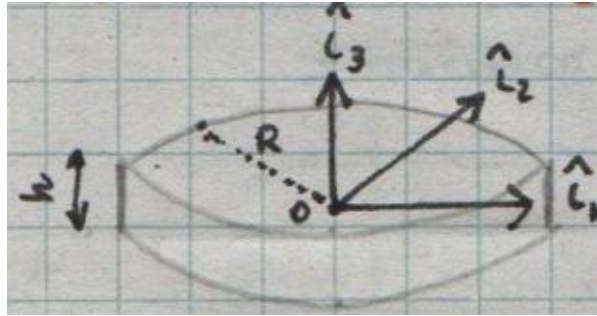


Figura 29: Cilindro omogeneo di raggio R e altezza h , con polo nel centro della base. L'asse x_3 è diretto lungo l'asse del cilindro.

Si calcoli il momento di inerzia J_{33}^O di un cilindro omogeneo di raggio R , altezza h e massa M , con polo nel centro geometrico e asse x_3 lungo l'asse del cilindro. L'integrando $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ suggerisce il passaggio a coordinate cilindriche, dove l'elemento di volume è $dV = r dr d\theta dh$:

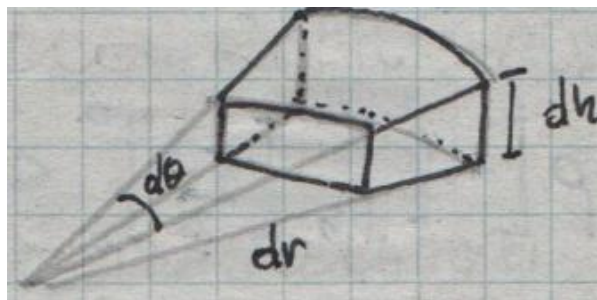


Figura 30: Elemento di volume in coordinate cilindriche: $dV = r dr d\theta dh$. Il fattore metrico r tiene conto della "dilatazione" dell'elemento al crescere della distanza dall'asse.

$$J_{33}^O = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^2 \cdot r dr d\theta dh = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot h = \frac{M}{2} R^2. \quad (119)$$

18.4 Idealizzazioni: lamine e sbarre

Nella trattazione dei corpi rigidi si incontrano frequentemente due idealizzazioni geometriche che semplificano il calcolo dei momenti di inerzia.

Lamina. Per **lamina** si intende un corpo il cui spessore h è trascurabile rispetto alle altre due dimensioni. Nel limite $h \rightarrow 0$, l'integrale di volume si riduce a un integrale di superficie

¹⁵Questo risultato non richiede che il corpo sia un parallelepipedo: vale per qualsiasi distribuzione di massa che possieda tre piani di simmetria ortogonali.

introducendo la **densità superficiale**

$$\hat{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dh = \rho h, \quad (120)$$

che rappresenta la massa per unità di superficie¹⁶.

Sbarra. Per **sbarra** si intende un corpo che ha una dimensione l molto maggiore delle altre due ($a, b \ll l$). Si introduce la **densità lineare**

$$\hat{\rho}_l = \rho a b, \quad (121)$$

e l'elemento di massa diventa $dm = \hat{\rho}_l ds$, dove s è l'ascissa curvilinea lungo la sbarra.

Momento di inerzia di una sbarra. Si consideri una sbarra omogenea di lunghezza l , sezione $a \times b$ ($a, b \ll l$), e polo nel centro geometrico. Il momento di inerzia J_{33}^O rispetto all'asse ortogonale alla sbarra si calcola con la formula esatta:

$$J_{33}^O = \rho a b l \left(\frac{l^2}{12} + \frac{b^2}{12} \right). \quad (122)$$

Nel limite $a, b \rightarrow 0$ il termine $b^2/12$ è trascurabile e, utilizzando la densità lineare, si ottiene

$$J_{33}^O = \hat{\rho}_l \frac{l^3}{12} = \frac{m l^2}{12}. \quad (123)$$

Le relazioni tra densità volumetrica, superficiale e lineare sono riassunte come segue:

$$\hat{\rho}_{\text{sup}} = \rho \cdot a, \quad \hat{\rho}_{\text{lin}} = \rho \cdot a \cdot b, \quad (124)$$

dove a e b sono le dimensioni trasversali trascurabili¹⁷.

18.5 Caso bidimensionale

Un oggetto tridimensionale si dice in **moto piano** quando tutte le grandezze cinematiche lungo una direzione (ad esempio \hat{e}_3) sono nulle. In tal caso $\vec{\omega} = \{0; 0; \omega_3\}$ e la matrice di inerzia, anche se non diagonalizzata, produce un momento della quantità di moto con una sola componente rilevante:

$$\vec{h}_O = \underline{\underline{J}}^O \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{13} \omega_3 \\ J_{23} \omega_3 \\ J_{33} \omega_3 \end{Bmatrix}. \quad (125)$$

Per un corpo bidimensionale (o tridimensionale con una dimensione trascurabile), i prodotti di inerzia J_{13} e J_{23} si annullano¹⁸, e si ritorna a una singola equazione scalare:

$$\frac{d(J_{33} \omega_3)}{dt} = M_3^O. \quad (126)$$

19 Pendolo composto in rotazione: trattazione completa

Si riprende il problema del pendolo composto (sbarra omogenea di lunghezza L , densità lineare $\hat{\rho}$, incernierata nel punto O su un asse verticale rotante a Ω costante) per svilupparne la trattazione completa, includendo il calcolo esplicito di tutte le forze e dei momenti.

¹⁶L'elemento di massa diventa $dm = \hat{\rho} dS$, dove dS è l'elemento di superficie nel piano della lamina.

¹⁷In un esercizio d'esame, quando viene fornita la densità volumetrica ρ ma il corpo è modellato come sbarra, occorre moltiplicare per la sezione trasversale per ottenere la densità lineare.

¹⁸Poiché l'estensione lungo \hat{e}_3 è nulla o trascurabile, l'integrale $\int \rho r_K r_3 dV$ si annulla per $K = 1, 2$.

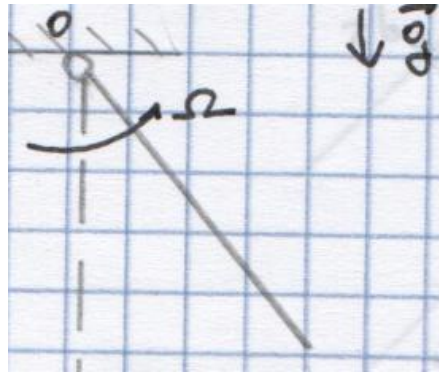


Figura 31: Pendolo composto: sbarra di lunghezza L incernierata nel punto O su un asse verticale rotante a Ω . L'angolo θ è misurato dalla verticale. Il sistema di riferimento solidale ha \hat{e}_3 lungo l'asse di rotazione del pendolo.

19.1 Struttura della matrice di inerzia

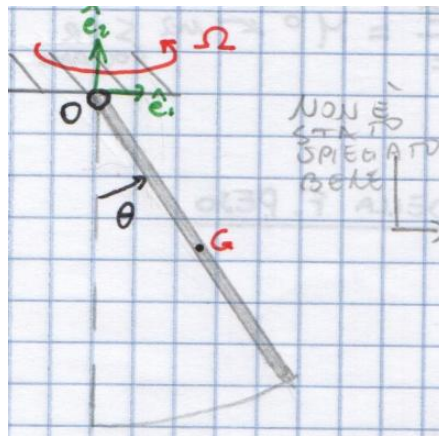


Figura 32: Pendolo composto con il sistema di riferimento solidale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$: \hat{e}_1 e \hat{e}_2 giacciono nel piano verticale di oscillazione, \hat{e}_3 è ortogonale al piano. Il centro di massa G si trova a distanza $L/2$ dalla cerniera.

Con il sistema di riferimento solidale definito in figura, la matrice di inerzia rispetto al polo O (cerniera) assume la struttura

$$\underline{\underline{J}}^O = \begin{bmatrix} J_{11}(t) & J_{12}(t) & 0 \\ J_{21}(t) & J_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (127)$$

I termini J_{11} , J_{12} , J_{22} dipendono dal tempo perché la distanza dei punti della sbarra dagli assi \hat{e}_1 e \hat{e}_2 varia con θ . Il momento J_{33} è invece costante, poiché la distanza di ogni punto dall'asse \hat{e}_3 non cambia durante il moto. I prodotti J_{13} e J_{23} sono nulli perché la sbarra è monodimensionale e l'estensione lungo \hat{e}_3 è nulla.

Poiché $\vec{\omega}^R = \dot{\theta} \hat{e}_3$, il momento della quantità di moto relativo si riduce a

$$\vec{h}_O = \underline{\underline{J}}^O \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{33} \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \frac{d\vec{h}_O}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{33} \ddot{\theta} \end{Bmatrix}. \quad (128)$$

La dipendenza temporale di J_{11} , J_{12} , J_{22} non influisce sull'equazione del moto grazie al moto piano: il contributo è "filtrato" dalla struttura di $\vec{\omega}$.

19.2 Reazioni vincolari della cerniera

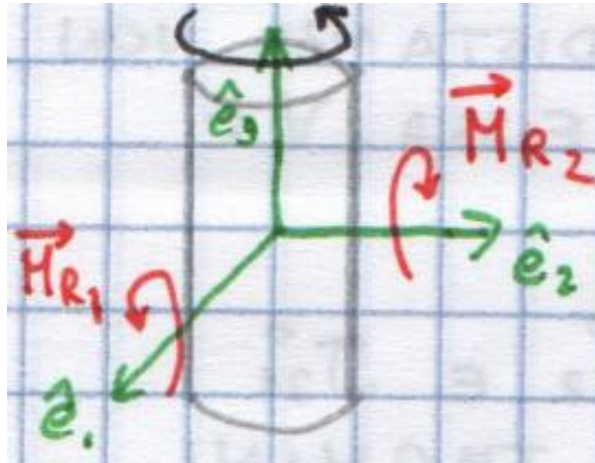


Figura 33: Cerniera tridimensionale: tre reazioni di forza R_1, R_2, R_3 e due momenti di reazione M_1, M_2 . Il momento lungo \hat{e}_3 è nullo (rotazione libera).

La cerniera tridimensionale elimina cinque gradi di libertà, lasciando libera la sola rotazione attorno a \hat{e}_3 . Essa genera tre reazioni di forza (R_1, R_2, R_3) e due momenti di reazione (M_1^R, M_2^R); il momento lungo \hat{e}_3 è nullo per definizione. Le tre equazioni di proiezione del momento della quantità di moto sono:

$$\hat{e}_1) \quad 0 = M_1^R + m_{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_1 + m_{\text{peso}} \cdot \hat{e}_1 + m_{\text{centr}} \cdot \hat{e}_1, \quad (129)$$

$$\hat{e}_2) \quad 0 = M_2^R + m_{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_2, \quad (130)$$

$$\hat{e}_3) \quad J_{33} \ddot{\theta} = m_{\text{peso}} \cdot \hat{e}_3 + m_{\text{centr}} \cdot \hat{e}_3. \quad (131)$$

19.3 Momento della forza peso

Il momento del peso rispetto a O proiettato su \hat{e}_3 è

$$\vec{m}_{\text{peso}} \cdot \hat{e}_3 = (\vec{OG} \times m\vec{g}) \cdot \hat{e}_3 = -mg \frac{L}{2} \sin \theta. \quad (132)$$

19.4 Momento della forza centrifuga

La forza centrifuga su un elementino di massa $dm = \hat{\rho} d\xi$ a distanza ξ dalla cerniera è

$$d\vec{F}_{\text{centr}} = dm \Omega^2 \xi \sin \theta \hat{r}_1, \quad (133)$$

dove \hat{r}_1 è il versore radiale nel piano di rotazione. Il momento infinitesimo rispetto a O è $d\vec{M}^O = \vec{OP} \times d\vec{F}_{\text{centr}}$, e integrandolo lungo la sbarra si ottiene la proiezione su \hat{e}_3 :

$$\vec{m}_{\text{centr}} \cdot \hat{e}_3 = \int_0^L \hat{\rho} \xi^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta d\xi = m \frac{L^2}{3} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (134)$$

19.5 Equazione del moto

Sostituendo (132) e (134) nella (131) si ottiene l'equazione del moto:

$$\boxed{J_{33} \ddot{\theta} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta + m \frac{L^2}{3} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta} \quad (135)$$

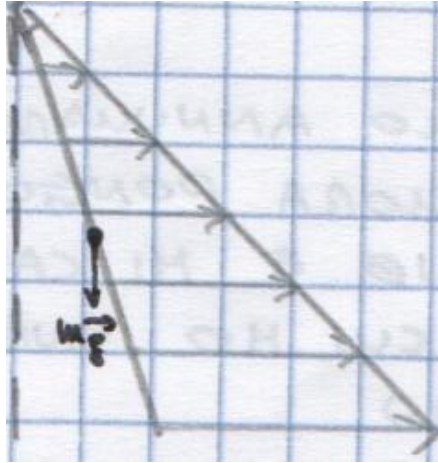


Figura 34: Forza centrifuga su un elemento di sbarra a distanza ξ dalla cerniera: $d\vec{F}_{\text{centr}} = dm \Omega^2 \xi \sin \theta \hat{r}_1$.

dove $J_{33} = mL^2/3$. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, ma **non lineare** a causa dei termini in $\sin \theta$ e $\sin \theta \cos \theta$.

19.6 Punto di applicazione equivalente della forza centrifuga

Mentre la forza peso, essendo un campo uniforme, ha come punto di applicazione equivalente il centro di massa ($L/2$), la forza centrifuga ha un andamento lineare lungo la sbarra. La risultante della forza centrifuga è

$$\vec{F}_{\text{centr}} = \int_0^L \hat{\rho} \Omega^2 \xi \sin \theta d\xi \hat{r}_1 = \frac{m}{2} \Omega^2 L \sin \theta \hat{r}_1. \quad (136)$$

Si cerca il punto C a distanza ξ_C dalla cerniera tale che $\vec{OC} \times \vec{F}_{\text{centr}}$ produca lo stesso momento (134). Imponendo l'uguaglianza dei momenti:

$$\xi_C \cdot \frac{m}{2} \Omega^2 L \sin \theta \cos \theta = m \frac{L^2}{3} \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \implies \boxed{\xi_C = \frac{2}{3} L}. \quad (137)$$

Interpretazione fisica. Il concetto di **stato di sollecitazione equivalente** significa che la forza concentrata in C produce lo stesso effetto dinamico (stessa risultante e stesso momento) della distribuzione di forza centrifuga, ai fini delle equazioni cardinali. L'equivalenza non implica uguaglianza puntuale: le sollecitazioni interne al corpo saranno in generale diverse. Questa sostituzione è lecita nelle equazioni cardinali, ma non può essere utilizzata per calcolare le sollecitazioni interne (tensioni, deformazioni) senza ulteriori considerazioni¹⁹.

19.7 Calcolo della forza di Coriolis

La forza di Coriolis su un elemento infinitesimo di sbarra è

$$d\vec{F}_{\text{Cor}} = -2 dm \vec{\Omega} \times \vec{v}^R, \quad (138)$$

¹⁹Analogamente, anche per la forza peso la sostituzione con una forza concentrata nel centro di massa è valida solo ai fini delle equazioni cardinali, non per l'analisi delle sollecitazioni interne.

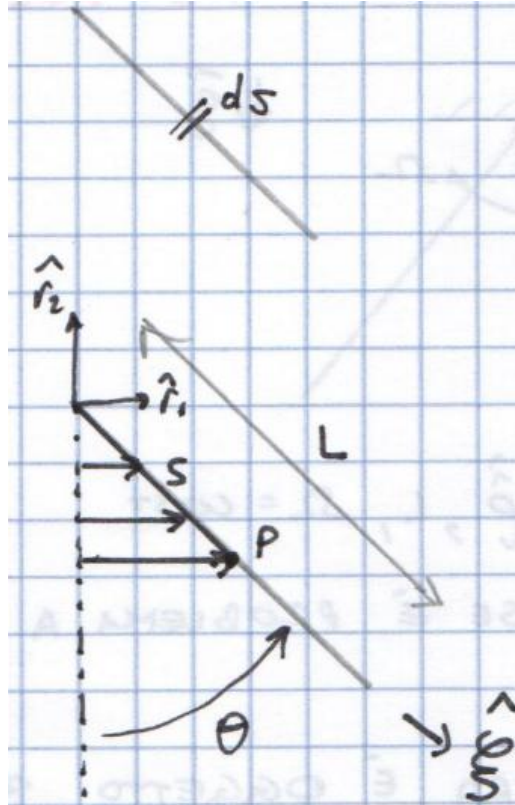


Figura 35: Sbarra con il punto C di applicazione della risultante centrifuga: C si trova a distanza $\xi_C = \frac{2}{3}L$ dalla cerniera.

dove $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_2$ e la velocità relativa del punto a distanza ξ dalla cerniera si ottiene derivando la posizione $\vec{y}_P(\xi) = \xi(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2)$:

$$\dot{\vec{y}}_P(\xi) = \xi \dot{\theta} (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2). \quad (139)$$

Integrando lungo la sbarra con $\hat{\rho}$ uniforme:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Cor}} &= -2 \int_0^L \hat{\rho} \Omega \hat{e}_2 \times [\xi \dot{\theta} (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2)] d\xi \\ &= -2 \hat{\rho} \Omega \dot{\theta} \cos \theta \int_0^L \xi d\xi (\hat{e}_2 \times \hat{e}_1) \\ &= 2m \frac{L}{2} \Omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_3 = mL \Omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (140)$$

La forza di Coriolis è diretta lungo \hat{e}_3 , ossia ortogonalmente al piano di oscillazione. Il suo momento rispetto alla cerniera produce la coppia cui la reazione vincolare si oppone per mantenere il pendolo nel piano.

20 Energia cinetica nel caso bidimensionale

Per un corpo rigido in moto piano, il teorema di König assume la forma particolarmente semplice già ricavata nel caso tridimensionale. Riprendendo il risultato generale:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \vec{\omega}, \quad (141)$$

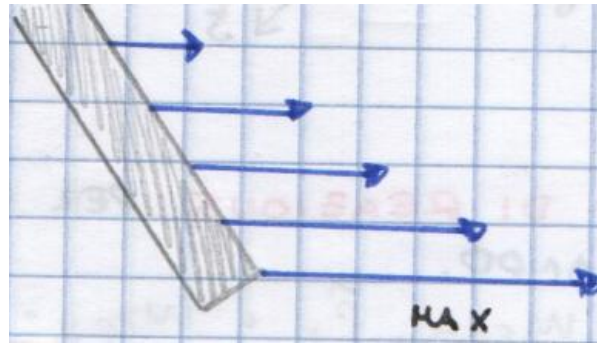


Figura 36: Distribuzione della forza centrifuga lungo la sbarra: l'intensità cresce linearmente da zero (cerniera) al valore massimo (estremo libero). Il punto di applicazione equivalente si trova a $2/3$ della lunghezza.

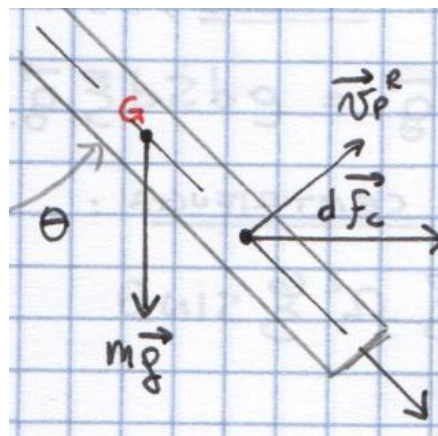


Figura 37: Forze agenti sull'elemento di sbarra nel sistema rotante: peso $m\vec{g}$, forza centrifuga $d\vec{F}_c$ (nel piano) e forza di Coriolis $d\vec{F}_{Cor}$ (uscente dal piano del foglio).

nel caso bidimensionale $\vec{\omega} = \{0; 0; \omega_3\}$ e, indipendentemente dalla diagonalizzazione della matrice, il prodotto quadratico si riduce a

$$\vec{\omega}^T \underline{J}^G \vec{\omega} = J_{33} \omega_3^2, \tag{142}$$

cosicché

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2. \tag{143}$$

Interpretazione fisica. Nel moto piano l'energia cinetica si decompone in un contributo traslazionale, proporzionale alla massa e al quadrato della velocità del centro di massa, e in un contributo rotazionale in cui il coefficiente inerziale è il singolo scalare $J_G = J_{33}$. Non è necessario diagonalizzare l'intera matrice: il moto piano “seleziona” automaticamente l'unica componente rilevante della matrice di inerzia.

21 Calcolo e diagonalizzazione della matrice di inerzia: esempio della lamina quadrata

Si illustra il procedimento completo di calcolo della matrice di inerzia e della sua diagonalizzazione su un esempio concreto: una lamina quadrata omogenea di lato a , densità superficiale $\hat{\rho}$ e massa $m = \hat{\rho} a^2$, con polo nel vertice O .

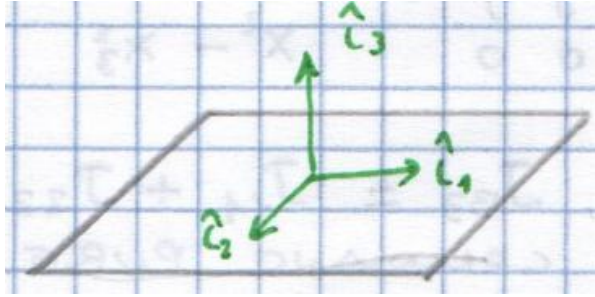


Figura 38: Corpo rigido in moto piano: la velocità angolare $\vec{\omega}$ è ortogonale al piano del moto e il vettore \vec{r}_G congiunge il centro di massa al generico punto del corpo.

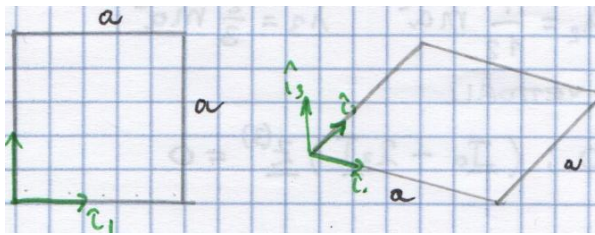


Figura 39: Lamina quadrata di lato a con polo nel vertice O e sistema di riferimento (x_1, x_2) allineato ai lati.

21.1 Calcolo dei momenti di inerzia

Il momento di inerzia J_{11}^O si calcola integrando sulla superficie della lamina:

$$J_{11}^O = \iint_S \hat{\rho} x_2^2 dx_1 dx_2 = \int_0^a \int_0^a \hat{\rho} x_2^2 dx_2 dx_1 = \int_0^a \hat{\rho} \frac{a^3}{3} dx_1 = \hat{\rho} \frac{a^4}{3} = \frac{m a^2}{3}. \quad (144)$$

Per simmetria $J_{22}^O = J_{11}^O = m a^2/3$. Il momento J_{33}^O si ottiene sfruttando la relazione, valida per corpi piani²⁰:

$$J_{33}^O = J_{11}^O + J_{22}^O = \frac{2}{3} m a^2. \quad (145)$$

Il prodotto di inerzia J_{12}^O si calcola come

$$J_{12}^O = - \iint_S \hat{\rho} x_1 x_2 dx_1 dx_2 = -\hat{\rho} \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = -\frac{m a^2}{4} = J_{21}^O. \quad (146)$$

La matrice di inerzia completa rispetto al vertice O è dunque

$$\underline{\underline{J}}^O = m a^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (147)$$

²⁰Per una lamina nel piano (x_1, x_2) , il momento di inerzia rispetto all'asse perpendicolare al piano è la somma dei momenti rispetto ai due assi nel piano: $J_{33} = J_{11} + J_{22}$. Questa proprietà è nota come *teorema degli assi perpendicolari*.

21.2 Diagonalizzazione

Per diagonalizzare $\underline{\underline{J}}^O$ si risolve il problema agli autovalori $(\underline{\underline{J}}^O - \lambda \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{z}} = \vec{0}$. Il polinomio caratteristico, fattorizzando ma^2 , è

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda' & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} - \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} - \lambda' \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda = ma^2 \lambda'. \quad (148)$$

Svolgendo il determinante si ottengono gli autovalori (momenti principali di inerzia):

$$\lambda_1 = \frac{1}{12} ma^2, \quad \lambda_2 = \frac{7}{12} ma^2, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} ma^2. \quad (149)$$

Gli autovettori corrispondenti, dopo normalizzazione, sono

$$\underline{\underline{z}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{z}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\underline{z}}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (150)$$

Si verifica l'ortonormalità: $(\underline{\underline{z}}^{(1)})^T \underline{\underline{z}}^{(2)} = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0$, e analogamente per le altre coppie.

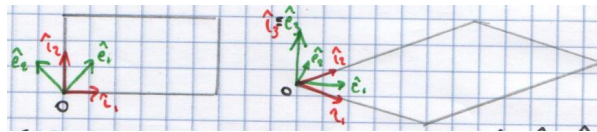


Figura 40: A sinistra: sistema di riferimento originale (x_1, x_2) allineato ai lati della lamina. A destra: sistema di riferimento principale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ruotato di 45° , nel quale la matrice di inerzia è diagonale.

La matrice di cambiamento di base è

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (151)$$

e si riconosce una rotazione di 45° attorno all'asse \hat{e}_3 , poiché $1/\sqrt{2} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.

Interpretazione fisica. Le direzioni degli autovettori nel piano della lamina coincidono con le diagonali del quadrato: si ritrovano così, per via algebrica, le direzioni principali già individuate per simmetria. Se il polo fosse stato il centro di massa anziché il vertice, le direzioni sarebbero state le stesse ma i momenti principali avrebbero assunto valori diversi; in tal caso si parlerebbe di **direzioni centrali** anziché principali.

22 Centri geometrici di figure omogenee

Nel caso di corpi omogenei ($\rho = \text{cost}$) in un campo gravitazionale uniforme ($\vec{g} = \text{cost}$), il centro geometrico coincide con il centro di massa e con il baricentro (punto di applicazione della forza peso). Si riportano le posizioni del centro geometrico per alcune figure di uso frequente.

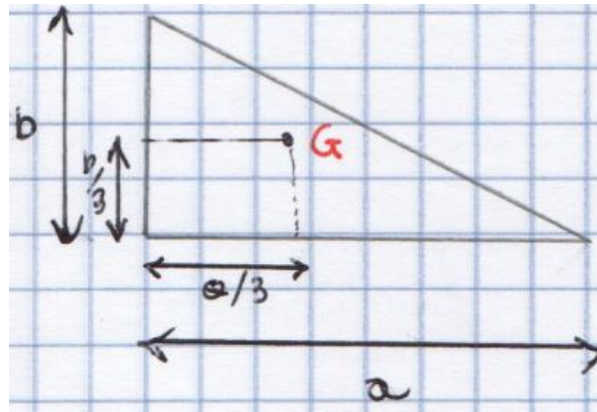


Figura 41: Triangolo rettangolo omogeneo con cateti a e b : il baricentro G si trova a distanza $a/3$ dal vertice lungo la base e $b/3$ lungo l'altezza.

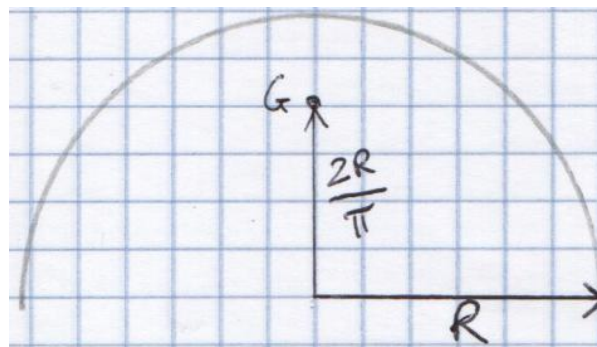


Figura 42: Semicirconferenza omogenea di raggio R : il baricentro G si trova sull'asse di simmetria a distanza $2R/\pi$ dal centro del diametro.

Triangolo rettangolo omogeneo. Dati i cateti a e b , il baricentro si trova nel punto $(a/3, b/3)$ rispetto al vertice dell'angolo retto.

Semicirconferenza omogenea (filo). Dato il raggio R , il baricentro si trova a distanza $2R/\pi$ dal centro del diametro, lungo l'asse di simmetria.

Semicerchio omogeneo (lamina). Dato il raggio R , il baricentro si trova a distanza $4R/(3\pi)$ dal centro del diametro.

23 Dimostrazione dell'ellissoide di inerzia

Si presenta ora la dimostrazione formale che il luogo dei punti costruiti a partire dai momenti di inerzia rispetto a tutte le rette passanti per un polo Ω è un ellissoide.

23.1 Momento di inerzia rispetto a una direzione generica

Si consideri un corpo rigido C ed un riferimento $R(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ solidale. Una retta ω passante per Ω è individuata dal versore $\vec{v}_\alpha = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3$, dove $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Il momento di

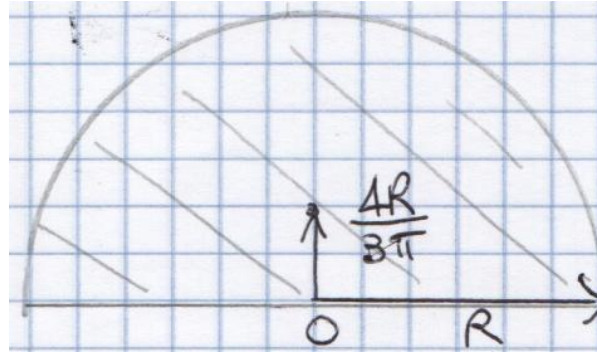


Figura 43: Semicerchio omogeneo (lamina) di raggio R : il baricentro G si trova sull'asse di simmetria a distanza $4R/(3\pi)$ dal centro del diametro.

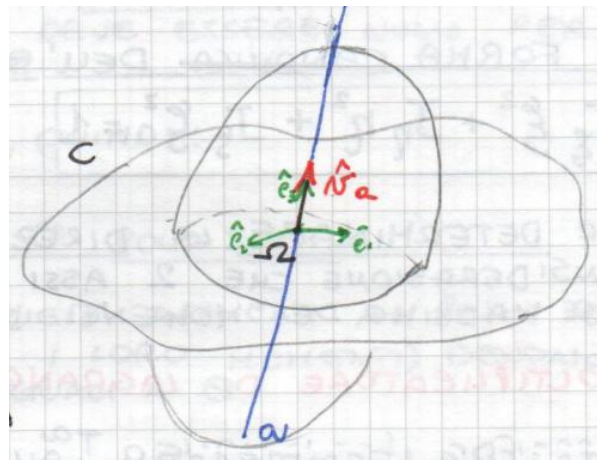


Figura 44: Corpo rigido C con polo Ω e riferimento solidale $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. La retta ω passante per Ω è individuata dal versore $\vec{v}_\alpha = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \gamma\hat{e}_3$, con α, β, γ coseni direttori. Il generico punto del corpo è \vec{X} .

inerzia rispetto a ω è

$$J^\alpha = \iiint_V \rho |\vec{v}_\alpha \times \vec{X}|^2 dV = \iiint_V \rho D^2 dV, \quad (152)$$

dove D è la distanza del generico punto $\vec{X} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$ dall'asse ω .

Calcolando esplicitamente il prodotto vettoriale:

$$\vec{v}_\alpha \times \vec{X} = (\beta z - \gamma y)\hat{e}_1 + (\gamma x - \alpha z)\hat{e}_2 + (\alpha y - \beta x)\hat{e}_3, \quad (153)$$

e prendendo il modulo quadro:

$$\begin{aligned} D^2 &= (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz - 2\alpha\beta xy. \end{aligned} \quad (154)$$

Sostituendo nella (152) e riconoscendo i momenti e prodotti di inerzia si ottiene il risultato fondamentale:

$$\boxed{J^\alpha = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\alpha\beta J_{xy} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\beta\gamma J_{yz}} \quad (155)$$

Interpretazione fisica. Noti i sei parametri indipendenti della matrice di inerzia (tre momenti e tre prodotti) rispetto a un dato polo Ω , è possibile calcolare il momento di inerzia rispetto a *qualunque* asse passante per Ω tramite la (155).

23.2 Costruzione dell'ellissoide

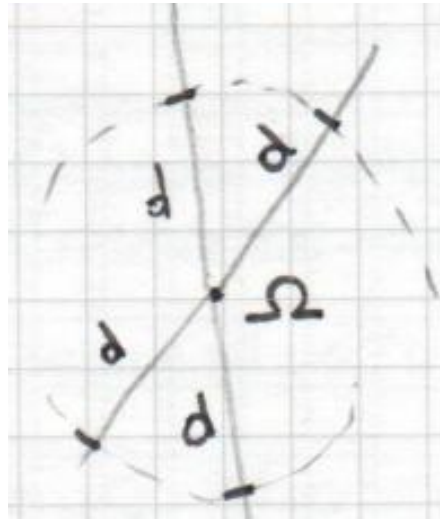


Figura 45: Stella di rette passanti per Ω : su ciascuna retta si marcano due punti a distanza $d = 1/\sqrt{J^\alpha}$ dal polo. Il luogo di tali punti genera l'ellissoide di inerzia.

Su ciascuna retta della stella passante per Ω si individuano due punti a distanza $d = 1/\sqrt{J^\alpha}$ dal polo. Le coordinate del generico punto così definito sono

$$\vec{X}^\alpha = d\vec{v}_\alpha, \quad \text{ovvero} \quad x = d\alpha, \quad y = d\beta, \quad z = d\gamma. \quad (156)$$

Invertendo: $\alpha = x/d, \beta = y/d, \gamma = z/d$. Sostituendo nella (155) e ricordando che $d^2 = 1/J^\alpha$:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1. \quad (157)$$

Questa è l'equazione di una **quadrica** centrata in Ω . Poiché i momenti di inerzia sono quantità strettamente positive²¹, la forma quadratica è definita positiva e la quadrica è un **ellissoide**: l'**ellissoide di inerzia**.

Nella terna principale (prodotti di inerzia nulli) l'equazione assume la forma canonica:

$$J_1 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = 1, \quad (158)$$

dove J_1, J_2, J_3 sono i momenti principali di inerzia. Le semilunghezze degli assi dell'ellissoide sono $1/\sqrt{J_k}$.

23.3 Determinazione delle direzioni principali tramite moltiplicatori di Lagrange

Le direzioni principali corrispondono agli estremi (massimo e minimo) di J^α sotto il vincolo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, con $f = J^\alpha$ e $g = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$, le condizioni di stazionarietà sono

$$\begin{cases} J_x \alpha - J_{xy} \beta - J_{xz} \gamma = \lambda \alpha \\ J_y \beta - J_{xy} \alpha - J_{yz} \gamma = \lambda \beta \\ J_z \gamma - J_{xz} \alpha - J_{yz} \beta = \lambda \gamma \end{cases} \quad (159)$$

²¹I momenti di inerzia sono somme di termini $\rho D^2 dV$ con $\rho > 0$ e $D^2 \geq 0$; la positività stretta è garantita per distribuzioni di massa non degeneri.

che, definendo $\vec{w} = \{\alpha, \beta, \gamma\}^T$, si riscrivono come

$$\underline{\underline{J}}^\Omega \vec{w} = \lambda \vec{w}. \quad (160)$$

Si ritrova dunque il problema agli autovalori già incontrato nella diagonalizzazione della matrice di inerzia: gli autovalori λ sono i momenti principali e gli autovettori \vec{w} individuano le direzioni principali. La simmetria di $\underline{\underline{J}}^\Omega$ garantisce l'esistenza di tre autovettori ortogonali reali.

24 Elementi di statica del corpo rigido

Un corpo rigido si trova in **equilibrio statico** quando, in una data configurazione \vec{X}_E , la risultante delle forze e il momento risultante rispetto a qualsiasi polo sono identicamente nulli:

$$\vec{F}(\vec{X}_E, \vec{0}, t) = \vec{0} \quad \forall t, \quad (161)$$

$$\vec{M}^O(\vec{X}_E, \vec{0}, t) = \vec{0} \quad \forall t, \forall O. \quad (162)$$

In queste equazioni compaiono forze attive, vincolari e, se il sistema è osservato da un riferimento non inerziale, anche forze apparenti.

24.1 Metodo grafico di analisi statica

Per sistemi piani soggetti a un numero limitato di forze, l'equilibrio può essere verificato graficamente.

Due forze. L'equilibrio richiede che le due forze siano uguali e contrarie, con rette d'azione coincidenti (braccio della coppia nullo).

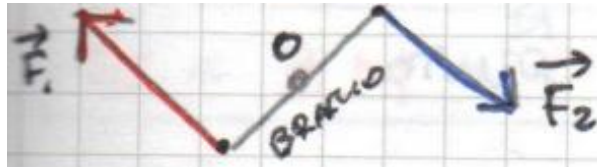


Figura 46: Coppia di forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 : l'equilibrio richiede che il braccio sia nullo, ossia che le rette d'azione coincidano.

Tre forze. Le condizioni necessarie per l'equilibrio sono: (i) le tre forze devono essere complanari; (ii) le loro rette d'azione devono avere un punto in comune (condizione concorrente); (iii) i tre vettori, traslati testa-coda, devono formare un triangolo chiuso.

24.2 Esempio: lamina con cerniera e collare

Si consideri una lamina omogenea fissata con una cerniera in O (che inibisce le due traslazioni nel piano) e un collare sul bordo inferiore (che blocca l'unico grado di libertà residuo). In assenza di attrito, sono note la retta d'azione del peso e la direzione della reazione del collare: la reazione della cerniera si determina graficamente chiudendo il triangolo delle forze.

L'equilibrio impone

$$m\vec{g} + \vec{R}^O + \vec{R}^k = \vec{0}. \quad (163)$$

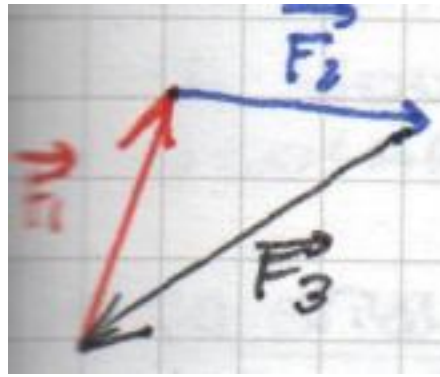


Figura 47: Tre forze in equilibrio: le rette d'azione convergono in un punto e i vettori formano un triangolo chiuso.

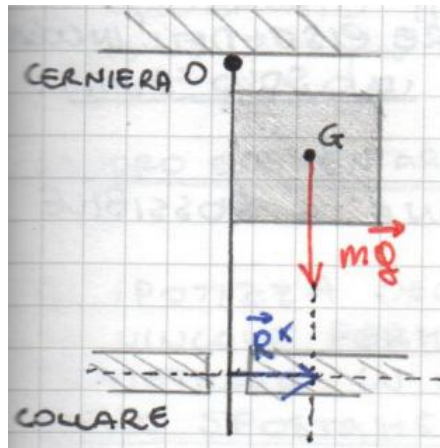


Figura 48: Lamina omogenea fissata con cerniera in O (asse ortogonale al foglio) e collare sul bordo inferiore. La forza peso $m\vec{g}$ agisce nel centro di massa G ; la reazione del collare \vec{R}^k è diretta lungo il suo asse.

24.3 Ruolo dell'attrito nell'equilibrio

Se le superfici di appoggio sono lisce (prive di attrito), le reazioni sono esclusivamente normali. Per una sbarra appoggiata su due superfici, le tre rette d'azione (peso e due reazioni normali) possono non avere un punto comune: in tal caso l'equilibrio è impossibile.

In presenza di **attrito statico**, la reazione vincolare può avere una componente tangenziale R^t oltre a quella normale R^n , purché sia rispettata la condizione

$$R^t \leq \phi_s R^n \quad \iff \quad \alpha \leq \arctan \phi_s, \quad (164)$$

dove ϕ_s è il coefficiente di attrito statico e α è l'angolo tra la reazione complessiva e la normale alla superficie. La regione ammissibile per la reazione forma un **cono di attrito** (in 3D) o un triangolo (in 2D).

Quando l'attrito è presente in entrambi i punti di appoggio, il punto di intersezione delle rette d'azione deve cadere nella regione comune ai due coni di attrito. Se tale regione si riduce a un solo punto, il problema è determinato; se è estesa, il problema è **staticamente indeterminato**²².

²²Un sistema è staticamente indeterminato quando le equazioni di equilibrio non sono sufficienti a determinare univocamente tutte le reazioni vincolari. La soluzione richiede informazioni aggiuntive sulla deformabilità del corpo.

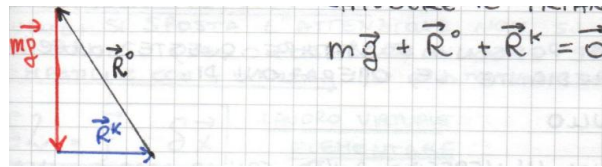


Figura 49: Triangolo delle forze: il peso $m\vec{g}$ (rosso), la reazione del collare \vec{R}^k (blu) e la reazione della cerniera \vec{R}^O (nero) formano un triangolo chiuso.

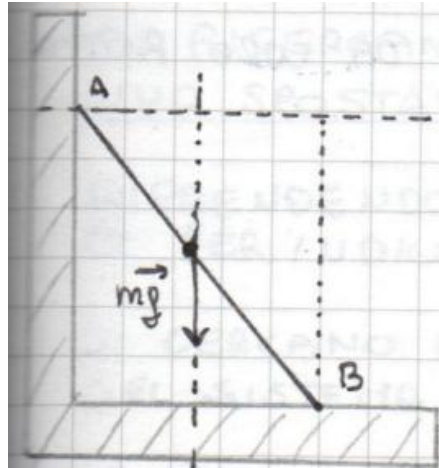


Figura 50: Sbarra omogenea appoggiata su due superfici lisce in A e B : le reazioni sono normali alle superfici e, in assenza di attrito, le tre rette d'azione non hanno un punto comune — l'equilibrio non è possibile.

Operazioni di equivalenza statica. Nella ricerca dell'equilibrio è lecito sostituire un sistema di forze con uno equivalente tramite le seguenti operazioni:

- aggiunta di una coppia di forze a braccio nullo;
- sostituzione di più forze applicate nello stesso punto con la loro somma;
- spostamento del punto di applicazione lungo la retta d'azione.

Si ricorda inoltre che il **trinomio invariante** $\vec{M}_O \cdot \vec{F}$ è una quantità scalare che non varia al variare del polo O .

25 Meccanica lagrangiana

La meccanica newtoniana, basata sulle equazioni cardinali, richiede l'introduzione esplicita delle reazioni vincolari come incognite ausiliarie. Per un sistema di M punti materiali con P vincoli, le incognite del moto sono $N = 3M - P$ (gradi di libertà residui), ma le equazioni contengono anche le P incognite vincolari. L'approccio lagrangiano propone una formulazione alternativa: scrivere direttamente N equazioni nei soli N gradi di libertà, "filtrando" le reazioni vincolari. Una volta determinata la legge del moto, le reazioni si ricavano per sostituzione.

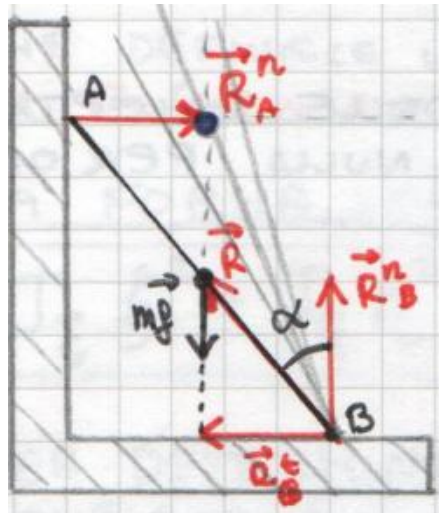


Figura 51: Sbarra appoggiata con attrito in B : la reazione in B ha componente normale R^n e tangenziale R^t . L'angolo α tra la reazione complessiva e la normale deve soddisfare $\alpha \leq \arctan \phi_s$.

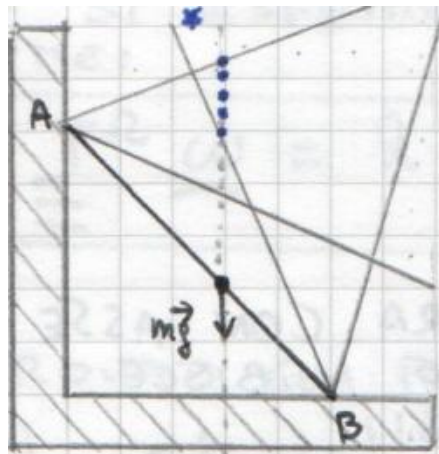


Figura 52: Sbarra con attrito in A e B : le reazioni devono giacere nei rispettivi coni di attrito e le tre rette d'azione devono avere un punto in comune nella regione di intersezione dei coni.

25.1 Spostamento virtuale e lavoro virtuale

Si consideri un punto materiale vincolato. Lo **spostamento virtuale** $\delta \vec{x}$ è uno spostamento infinitesimo compatibile con i vincoli, in una data configurazione, a tempo fissato²³.

Se la posizione del k -esimo punto del sistema è espressa tramite N parametri lagrangiani indipendenti q_1, \dots, q_N :

$$\vec{x}_k(t) = \vec{x}_k[q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)], \quad k = 1, \dots, M, \quad (165)$$

lo spostamento virtuale si scrive

$$\delta \vec{x}_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (166)$$

²³A differenza dello spostamento reale $d\vec{x}$, che avviene nel tempo, lo spostamento virtuale è un concetto geometrico: rappresenta tutti gli spostamenti *possibili* a tempo congelato.

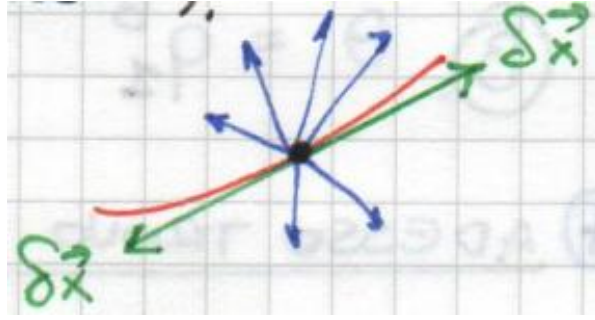


Figura 53: Spostamento virtuale $\delta\vec{x}$ (verde): tra tutti gli spostamenti infinitesimi possibili (blu), solo quelli compatibili con il vincolo sono ammissibili.

Vincoli olonomi e scleronomi. Si parla di vincoli **olonomi** quando le relazioni tra le coordinate sono algebriche (o differenziali integrabili). Se tali relazioni non contengono esplicitamente il tempo, i vincoli sono anche **scleronomi**. In questo corso ci si limita a sistemi olonomi scleronomi²⁴.

25.2 Derivazione delle equazioni di Eulero–Lagrange

Si parte dall'equazione di Newton per il k -esimo punto, moltiplicata scalarmente per lo spostamento virtuale:

$$\sum_{k=1}^M (m_k \vec{a}_k - \vec{F}_k) \cdot \delta\vec{x}_k = 0. \quad (167)$$

Sostituendo l'espressione (166) per $\delta\vec{x}_k$ e invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^M m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^N \underbrace{\left(\sum_{k=1}^M \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \right)}_{Q_i} \delta q_i. \quad (168)$$

Il termine Q_i è la **forza generalizzata** associata al parametro q_i : rappresenta il lavoro per unità di spostamento virtuale δq_i , sommato su tutte le particelle. Il lavoro virtuale totale è

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i. \quad (169)$$

Si definisce l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k, \quad (170)$$

e si osserva che la velocità del k -esimo punto si esprime come

$$\vec{v}_k = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}. \quad (171)$$

²⁴Le definizioni di vincolo olonomo e scleronomo non sono universali in letteratura. Qui si adotta la convenzione per cui un vincolo olonomo è esprimibile come $\phi(q_1, \dots, q_N) = 0$ e un vincolo scleronomo non dipende esplicitamente dal tempo.

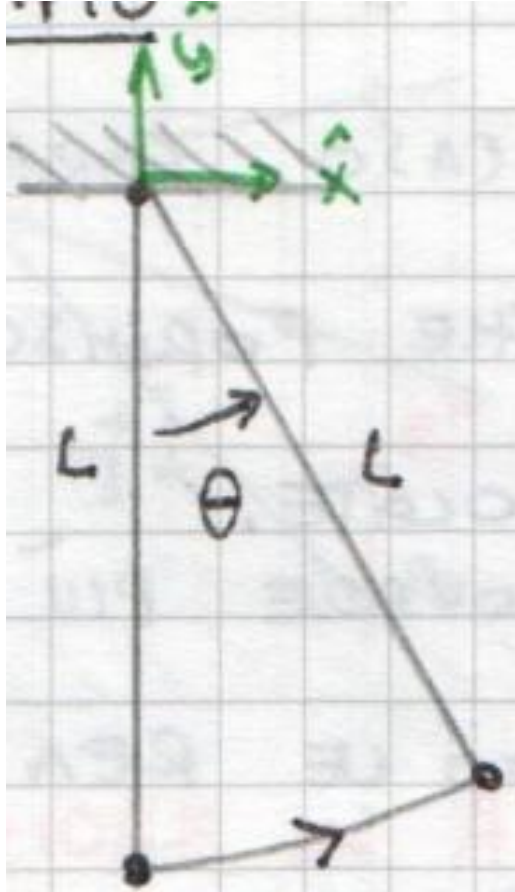


Figura 54: Pendolo semplice: il vincolo $|\vec{x}| = L$ è olonomo e scleronomo. Un unico parametro (θ o $s = L\theta$) descrive univocamente la configurazione.

Le derivate parziali dell'energia cinetica risultano:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}, \quad (172)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}. \quad (173)$$

Si elabora il membro sinistro della (168) utilizzando la derivata del prodotto²⁵:

$$\sum_{k=1}^M m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \right) - \sum_{k=1}^M m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (174)$$

Poiché gli spostamenti virtuali δq_i sono arbitrari e indipendenti, si ottengono le **equazioni di Eulero-Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, N} \quad (175)$$

²⁵Il passaggio chiave è l'identità: $m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}) - m_k \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}$, insieme a $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}$, che discende dall'uguaglianza delle derivate miste.

25.3 Forze conservative e funzione lagrangiana

Se le forze si decompongono in una parte conservativa e una non conservativa, $\vec{F}_k = \vec{F}_k^C + \vec{F}_k^{NC}$, con $\vec{F}_k^C = -\nabla U_k$, le forze generalizzate si scrivono

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^{NC}, \quad (176)$$

e le equazioni di Eulero–Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^{NC}. \quad (177)$$

Introducendo la **funzione lagrangiana** $\mathcal{L} = T - U$, si ottiene la forma compatta:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{NC}, \quad i = 1, \dots, N} \quad (178)$$

Interpretazione fisica. La funzione lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$ non è l'energia meccanica ($E = T + U$), bensì la differenza tra energia cinetica e potenziale. Essa misura, in un certo senso, il margine di trasferimento di energia tra i campi conservativi; il suo significato profondo risiede nel principio variazionale di Hamilton²⁶.

25.4 Esempio: pendolo semplice

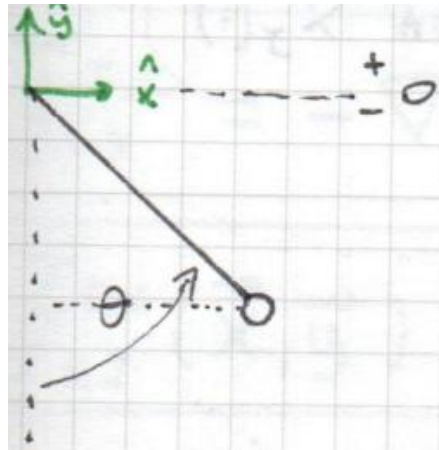


Figura 55: Pendolo semplice: massa m sospesa a un filo inestensibile di lunghezza L . Il parametro lagrangiano è $\theta(t)$.

Si sceglie come variabile lagrangiana $q = \theta$. L'energia cinetica e il potenziale gravitazionale sono

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2, \quad U = -mgL \cos \theta. \quad (179)$$

Le derivate necessarie sono:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m L^2 \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgL \sin \theta. \quad (180)$$

In assenza di forze non conservative ($Q^{NC} = 0$), l'equazione di Eulero–Lagrange fornisce:

$$m L^2 \ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0 \quad \implies \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (181)$$

²⁶Il principio di Hamilton afferma che il moto reale rende stazionario l'integrale d'azione $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$. Le equazioni di Eulero–Lagrange sono le condizioni necessarie di tale stazionarietà.

25.5 Esempio: punto materiale su guida sinusoidale

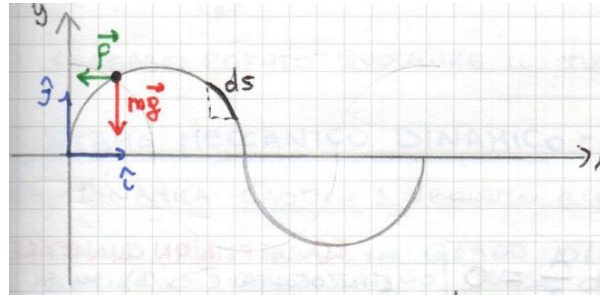


Figura 56: Punto materiale vincolato alla guida $y = \sin x$, soggetto alla forza peso $m\vec{g}$ e alla forza attrattiva $\vec{F} = -(A/x^2)\hat{i}$. La reazione normale \vec{N} non compare nelle equazioni lagrangiane.

Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una guida di equazione $y(x) = \sin x$, soggetto alla forza peso e a una forza attrattiva conservativa $\vec{F} = -(A/x^2)\hat{i}$ ($A > 0$). Il vincolo $y = \sin x$ è olonomo e scleronomo; si sceglie x come unico parametro lagrangiano.

La posizione e la velocità sono:

$$\vec{x}(t) = x \hat{i} + \sin x \hat{j}, \quad \dot{\vec{x}} = \dot{x} \hat{i} + \dot{x} \cos x \hat{j}. \quad (182)$$

L'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \cos^2 x). \quad (183)$$

L'energia potenziale totale (peso + forza attrattiva) è:

$$U = mg \sin x - \frac{A}{x}. \quad (184)$$

Calcolando le derivate necessarie e applicando l'equazione di Eulero-Lagrange (senza forze non conservative), si ottiene

$$m \ddot{x} (1 + \cos^2 x) - m \dot{x}^2 \cos x \sin x + mg \cos x + \frac{A}{x^2} = 0. \quad (185)$$

Punti di equilibrio. Si determinano ponendo $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, ovvero $\partial U / \partial x = 0$:

$$mg \cos x + \frac{A}{x^2} = 0 \quad \implies \quad x^2 \cos x = -\frac{A}{mg}. \quad (186)$$

Interpretazione fisica. La funzione $x^2 \cos x$ ha ampiezza crescente: per valori piccoli di x il termine A/x^2 domina e il punto viene attratto verso l'origine; per valori grandi la forza peso prevale. Gli equilibri esistono solo nei tratti in salita della guida, dove la componente tangenziale del peso si oppone alla forza attrattiva. Al crescere di x , i punti di equilibrio si avvicinano asintoticamente ai massimi della funzione coseno.

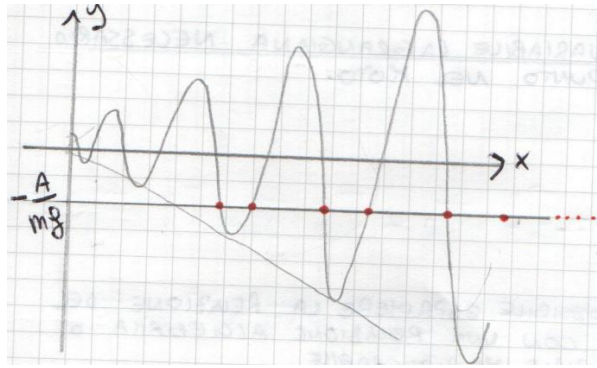


Figura 57: Grafico della funzione $x^2 \cos x$ e della costante $-A/(mg)$: i punti di equilibrio corrispondono alle intersezioni. Al di sotto di un certo valore critico di x non esistono equilibri; per x grande i punti di equilibrio si avvicinano ai vertici della funzione coseno.

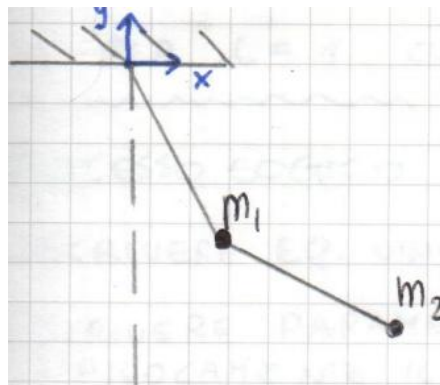


Figura 58: Doppio pendolo: due masse m_1, m_2 collegate da aste rigide inestensibili di lunghezze L_1, L_2 . I parametri lagrangiani sono gli angoli θ_1, θ_2 dalla verticale.

25.6 Esempio: doppio pendolo

Il doppio pendolo è un sistema con due gradi di libertà (θ_1, θ_2) e vincoli olonomi scleronomi $(|\vec{x}_1| = L_1, |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = L_2)$. L'approccio newtoniano richiederebbe quattro equazioni scalari con due incognite ausiliarie (le tensioni T_1, T_2); l'approccio lagrangiano fornisce direttamente due equazioni nei soli gradi di libertà.

Le posizioni sono

$$\vec{x}_1 = L_1 \sin \theta_1 \hat{i} - L_1 \cos \theta_1 \hat{j}, \quad (187)$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + L_2 \sin \theta_2 \hat{i} - L_2 \cos \theta_2 \hat{j}. \quad (188)$$

L'energia cinetica totale, dopo aver calcolato le velocità e sviluppato i prodotti scalari, risulta

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (189)$$

L'energia potenziale è

$$U = -g[(m_1 + m_2) L_1 \cos \theta_1 + m_2 L_2 \cos \theta_2]. \quad (190)$$

Punti di equilibrio. Ponendo $\partial U/\partial\theta_1 = 0$ e $\partial U/\partial\theta_2 = 0$ si trovano quattro configurazioni: $(\theta_1, \theta_2) \in \{(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)\}$. La stabilità si studia tramite la **matrice hessiana**

$$H = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2^2} \end{array} \right] \Big|_{\text{eq}} : \quad (191)$$

l'equilibrio è stabile se H è definita positiva (tutti i minori principali positivi).

Applicando l'equazione di Eulero–Lagrange $\frac{d}{dt}(\partial T/\partial\dot{q}_i) - \partial T/\partial q_i + \partial U/\partial q_i = 0$ per $i = 1, 2$ si ottengono le due equazioni del moto accoppiate e non lineari, la cui soluzione esibisce un comportamento **caotico**: il sistema è estremamente sensibile alle condizioni iniziali, cosicché traiettorie inizialmente vicine divergono esponenzialmente nel tempo²⁷.

Procedimento generale per l'approccio lagrangiano. Si riassumono i passi fondamentali:

1. Verificare che i vincoli siano olonomi (e scleronomi);
2. Scegliere N parametri lagrangiani indipendenti che descrivano univocamente la configurazione del sistema;
3. Esprimere T e U in funzione di q_i e \dot{q}_i , calcolarne le derivate parziali e applicare le equazioni di Eulero–Lagrange.

26 Energia meccanica dei sistemi di punti materiali

Si sviluppa la trattazione dell'energia meccanica per un sistema N -particellare soggetto a forze esterne e interne, ciascuna con componenti conservative e non conservative.

26.1 Energia potenziale delle forze esterne

Le forze esterne conservative sulla k -esima particella derivano da un potenziale che dipende dalla posizione della particella stessa:

$$\vec{F}_k^{E,C} = -\nabla U_k^E(\vec{x}), \quad \vec{x} = \vec{x}_k(t). \quad (192)$$

Il lavoro delle forze esterne da una configurazione 1 a una configurazione 2 si decompone come

$$L_{1 \rightarrow 2}^E = (U_1^E - U_2^E) + L_{1 \rightarrow 2}^{E,NC}. \quad (193)$$

26.2 Energia potenziale delle forze interne

Le forze interne conservative tra la k -esima e la j -esima particella dipendono dalle posizioni di entrambe:

$$\vec{F}_{kj}^{I,C} = -\nabla_x U_{kj}^I(\vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{x} = \vec{x}_k(t), \quad \vec{y} = \vec{x}_j(t), \quad (194)$$

dove ∇_x indica il gradiente rispetto a \vec{x} . L'energia potenziale U_{kj}^I soddisfa le proprietà di simmetria $U_{kj}^I(\vec{x}, \vec{y}) = U_{jk}^I(\vec{x}, \vec{y})$, da cui segue $\vec{F}_{kj}^{I,C} = -\vec{F}_{jk}^{I,C}$ (terzo principio).

²⁷Il doppio pendolo è uno degli esempi più classici di sistema caotico deterministico: le equazioni del moto sono perfettamente deterministiche, ma la sensibilità esponenziale alle condizioni iniziali rende impossibile la previsione a lungo termine.

La variazione temporale dell'energia potenziale interna è

$$\frac{dU_{kj}^I}{dt} = \nabla_x U_{kj}^I \cdot \vec{v}_k + \nabla_y U_{kj}^I \cdot \vec{v}_j = -\vec{F}_{kj}^I \cdot \vec{v}_k + \vec{F}_{kj}^I \cdot \vec{v}_j = \vec{F}_{kj}^I \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_k), \quad (195)$$

da cui

$$dU_{kj}^I = -(\vec{F}_{kj}^I \cdot d\vec{x}_k + \vec{F}_{jk}^I \cdot d\vec{x}_j). \quad (196)$$

Il lavoro delle forze interne conservative si esprime come

$$L_{1 \rightarrow 2}^{I,C} = - \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N (U_{kj,2}^I - U_{kj,1}^I) = U_1^I - U_2^I, \quad (197)$$

dove la somma con $j > k$ evita il doppio conteggio delle coppie.

26.3 Bilancio energetico

Combinando i risultati, la variazione di energia meccanica del sistema è

$$\boxed{E_2 - E_1 = L_{1 \rightarrow 2}^{E,NC} + L_{1 \rightarrow 2}^{I,NC}} \quad (198)$$

dove l'energia meccanica totale è

$$E = T + U^E + U^I. \quad (199)$$

In forma differenziale (bilancio di potenza):

$$\frac{dE}{dt} = P^{E,NC} + P^{I,NC}. \quad (200)$$

Interpretazione fisica. L'energia meccanica si conserva se e solo se tutte le forze (esterne e interne) sono conservative. In presenza di forze non conservative, la variazione di energia meccanica è pari al lavoro complessivo delle sole forze non conservative. Per un corpo rigido, la potenza delle forze interne è nulla ($P^I = 0$), quindi il bilancio (200) si riduce a $dE/dt = P^{E,NC}$.