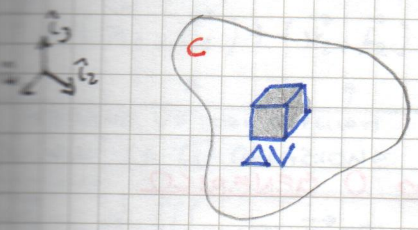
DINAMICA DEL CORPO RIGIDO - SISTEMA INERZIALE

IL CORPO RIGIDO, STUDIATO OMETTENDO IL CONCETTO DI MASSA DISTRIBUITA NELLO SPAZIO, SI PASSA ORA A STUDIARE QUINDI LA DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO AVENTE UNA PROPRIA DISTRIBUZIONE DI MASSA NELLO SPAZIO, I CUI PUNTI MATERIALI DEBBANO MANTENERE INVARIANTE LE LORO DISTANZE RELATIVE DURANTE IL MOTO.
QUINDI DAL SEMPLICE <u>ATTO DI MOTO RIGIDO</u>, I CUI PUNTI NON MODIFICANO LA LORO DISTANZA RELATIVA DURANTE IL MOTO, SI ASSOCIA LA <u>MECCANICA DEI PUNTI MATERIALI</u> DI <u>N PARTICELLE</u> AVENTI UNA CERTA MASSA m; LE PARTICELLE MATERIALI HANNO PERÒ IL VINCOLO DI <u>RIGIDITÀ</u>, QUINDI SI PARLA DI DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA.
I CORPI REALI, PER QUANTO RIGIDI, NON SODDISFANO MAI LE CONDIZIONI DI RIGIDITÀ IDEALE. QUINDI NOI IPOTIZZIAMO DI LAVORARE IN UN CERTO RANGE DI POSSIBILI ENTITÀ DI SOLLECITAZIONE IN CUI È POSSIBILE ACCETTARE IL MODELLO IDEALE DI CORPO RIGIDO, QUINDI CON RIGIDITÀ IDEALE.

DISTRIBUZIONE CONTINUA DI <u>MASSA</u> (O MATERIA)

COME DETTO IN PRECEDENZA, SI IPOTIZZA UN SISTEMA DI PARTICELLE N CON $N=\infty$ (INFINITI PUNTI) CHE SIANO VINCOLATE TRA LORO ATTRAVERSO IL VINCOLO DI RIGIDITÀ (LA LORO DISTANZA RELATIVA NON PUÒ VARIARE DURANTE IL MOTO). LE INFINITE PARTICELLE SI TROVANO IN UN DOMINIO C FINITO.



DEFINISCO ΔV COME:

$$\boxed{\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z}$$

ASSOCIATO AD UNA MASSA $\boxed{\Delta m}$

DEFINISCO IL <u>VOLUME TOTALE</u> $\hat{V}$ COME:

$$\hat{V} = \sum_{K=1}^{N} \Delta V_K$$

QUINDI LA <u>MASSA TOTALE</u> $\hat{M}$ È:

$$\hat{M} = \sum_{K=1}^{N} \Delta m_K \Rightarrow \text{CHE POSSO RISCRIVERE COME} \Rightarrow \hat{M} = \sum_{K=1}^{N} \frac{\Delta m_K}{\Delta V_K} \Delta V_K$$

IN CUI HO SEMPLICEMENTE MOLTIPLICATO E DIVISO PER LA STESSA Q.TÀ

È PARAMETRO CHE DEFINISCE LA RELAZIONE TRA VOLUME OCCUPATO E MASSA

POSSO PERÒ RISCRIVERLA COME:

$$M = \lim_{N\to\infty}\Big|_C \hat{M} = \lim_{\Delta V\to 0}\Big|_C \hat{M} = \lim_{\Delta V \to 0}\Big|_C \sum_{K=1}^{N} \frac{\Delta m_K}{\Delta V_K}\Delta V_K = \sum_{K=1}^{N} \frac{dm_K}{dV_K} dV_K$$

FACCIO DIVENTARE LE PARTICELLE SEMPRE PIÙ PICCOLE

CONSIDERO GLI INFINITESIMI

ADESSO, SE INVECE DELLA SOMMATORIA DELLE INFINITE PARTICELLE CONSIDERO L'INTEGRALE SU TUTTO IL DOMINIO (VOLUME):

$$\sum_{K=1}^{N} \frac{dm_K}{dV_K} dV_K \underset{N\to\infty}{\overset{lim}{=}} \iiint_C \frac{dm}{dV} dV = M$$

→ È INFATTI UN INTEGRALE TRIPLO IN QUANTO AD OGNI PUNTO DELLO SPAZIO DEL DOMINIO C ASSOCIO UNA MASSA

AL POSTO DEL PARAMETRO $\frac{dm}{dV}$ SI DEFINISCE LA DENSITÀ ρ:

$$\frac{dm}{dV} = \rho(\vec{x})$$

DENSITÀ ρ (VOLUMETRICA) $\propto$ AL MATERIALE CONSIDERATO

QUINDI:

$$\boxed{M = \iiint_C \rho(\vec{x}) \, dV}$$

MASSA ASSOCIATA A DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA

DOPO USO 'M' SIA PER INDICARE LA MASSA CHE I MOMENTI (CHE SOLO ANCHE m PICCOLO). LE MATRICI (TENSORI DI INERZIA HANNO O UNA SBARRA O DUE SOTTO MA È EQUIVALENTE

CENTRO DI MASSA

NON SOLO INDEFORM.

SI DEFINISCE CENTRO DI MASSA DI UNA DISTRIBUZIONE DI MATERIA QUALSIASI, DEFORMABILE

$$\vec{x}_G = \lim_{N\to\infty} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{M} \Delta m_K \vec{x}_K = \lim_{\Delta V\to 0} \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{M} \frac{\Delta m_K}{\Delta V_K} \Delta V_K \vec{x}_K = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{x}\, dV$$

QUINDI SINTETIZZANDO:

$$\boxed{\vec{x}_G = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{x}\, dV}$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec{q} = \lim_{\Delta V\to 0} \sum_{K=1}^{N} \Delta m_K \vec{v}_K(\vec{x}) = \iiint_C \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})\, dV$$

QUINDI:

$$\boxed{\vec{q} = \iiint_V \rho(\vec{x}) \vec{v}(\vec{x})\, dV}$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO AD UN POLO O GENERICO

$$\vec{h}_o = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{K=1}^{N} (\vec{x}_K - \vec{x}_o) \times \vec{v}_K \rho(\vec{x}) dV_K \right] = \iiint_V \rho(\vec{x}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_o) \times \vec{v}(\vec{x})\, dV$$

QUINDI:

$$\boxed{\vec{h}_o = \iiint_V \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{x}_o) \times \vec{v}\, dV}$$

INOLTRE VALE LA RELAZIONE:

$$\iiint_V \rho(\vec{x})(\vec{x} - \vec{x}_G)\, dV = 0$$

EQUAZIONI DI CONSERVAZIONE DI $\vec{q}$ E $\vec{h}_o$ PER UN SISTEMA RIGIDO DI PARTICELLE

UN CORPO RIGIDO LIBERO NELLO SPAZIO A TRE DIMENSIONI PUÒ ESSERE DETERMINATO (LA SUA CONFIG.) INDIVIDUANDO LA POSIZIONE DI UN SUO PUNTO (3 VARIABILI SCALARI) E L'ORIENTAMENTO DELLO STESSO CORPO INTORNO AL PUNTO (3 COSENI DIRETTORI DI UN ASSE SOLIDALE AL CORPO RISPETTO AD UNA TERNA INERZIALE). QUINDI IL CORPO RIGIDO HA IN TOTALE 6 GRADI DI LIBERTÀ, NE CONSEGUE CHE BISOGNA CONOSCERE 6 PARAMETRI VARIABILI NEL TEMPO, QUINDI 6 EQUAZIONI SCALARI.
LE EQUAZIONI CHE CONSIDERIAMO ANCHE IN QUESTO CASO SONO LE STESSE CHE SI SONO USATE PER I PROBLEMI DI DINAMICA DEI SISTEMI N-PARTICELLARI.

$$\boxed{\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}^E} \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{m}_o^E - m\vec{v}_o \times \vec{v}_G} \quad (2)$$

ANCHE PER SISTEMI RIGIDI LE EQUAZIONI AVRANNO LO STESSO SIGNIFICATO:

CAUSA (SOLLECITAZIONE) → EFFETTO (MOTO)

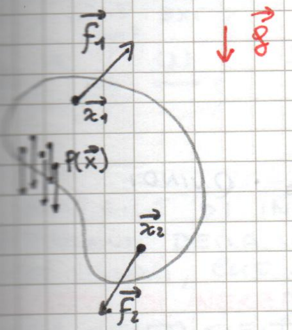
MA, CONCENTRANDOCI SU DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MASSA, SI DEVE TENER CONTO DEL FATTO CHE LA LORO CARATTERIZZAZIONE INERZIALE NON PUÒ ESSERE ASSOCIATA AD UN UNICO COEFFICIENTE DI MASSA.

OSSIA:

- PUNTO MATERIALE: LA FORZA APPLICATA IN UNA CERTA DIREZIONE AVRÀ COME CONSEGUENZA UN'ACCELERAZIONE CON LA STESSA DIREZIONE SCALATA DEL FATTORE m.

$\vec{F}$ OSSIA $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ INDIPENDENTEMENTE DALLA $\vec{F}$ IL RISULTATO NON CAMBIA

- DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA



DENTRO LA $\vec{F}$ VANNO DISTINTE DUE TIPOLOGIE DI FORZE: QUELLE PROVENIENTI DA UN CAMPO ($\rho(\vec{x})$ PER ESEMPIO) E QUELLE DEFINITE DA UN VETTORE APPLICATO ($\vec{f}_1$ E $\vec{f}_2$).

QUINDI DATO UN SISTEMA RIGIDO N-PARTICELLARE, SI HA CHE:

$$\frac{d}{dt}\sum_{K=1}^{N} m_K \vec{v}_K = \sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K \quad \text{DA CUI} \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}$$

ADESSO SI DISTINGUE IN $\vec{F}$ LE VARIE TIPOLOGIE DI FORZE:

$$\vec{F} = (\vec{x}_1, \vec{f}_1) + (\vec{x}_2, \vec{f}_2) + \iiint_V \vec{P}(\vec{x})\, dV$$

RISULTANTE DELLE FORZE RELATIVA ALL'INTERA DISTRIBUZIONE DI MASSA

INDICANO VETTORI APPLICATI

QUINDI LA ① RELAZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{v}(\vec{x})\, dV = \iiint_V \rho(\vec{x})\,\frac{d\vec{v}(\vec{x})}{dt}\, dV$$

① EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER LA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MATERIA

FACCIAMO UN ALTRO RAGIONAMENTO PER ARRIVARE ALL'EQ. DI CONSERVAZIONE DI $\vec{h}_o$.

CAMBIANDO DIREZIONE DEL MOMENTO, CAMBIERANNO LE ACCELERAZIONI ANGOLARI INDOTTE. LA DISTRIBUZIONE SPAZIALE DELLA MASSA IMPLICA CHE, PER QUALSIASI CORPO, INDURRE UNA CERTA ACCELERAZIONE ANGOLARE ATTORNO AD UN ASSE, RICHIEDE IN GENERALE UNA RISULTANTE DI MOMENTO CHE CAMBIA DA ASSE AD ASSE.
L'INTENSITÀ DEL MOMENTO CHE DEVO APPLICARE AD UNA DISTRIBUZIONE DI MASSA PER OTTENERE UNA CERTA ACCELERAZIONE ANGOLARE DIPENDE DALLA DISTRIBUZIONE DI MASSA ATTORNO ALL'ASSE COSTITUITO DALLA DIREZIONE DEL VETTORE ACCELERAZIONE ANGOLARE. SIGNIFICA CHE I COEFFICIENTI INERZIALI CHE LEGANO COMPONENTI DI MOMENTO A COMPONENTI DI ACCELERAZIONE ANGOLARE NON SONO COSTANTI DALL'ASSE MA DIPENDE DALLA DIREZIONE.

INIZIO DIMOSTRAZIONE MATRICE DI INERZIA

RIPRENDENDO LA RELAZIONE DI $\vec{h}_o$, MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO:

$$\vec{h}_o = \iiint_V \rho(\vec{x})\,(\vec{x} - \vec{x}_o) \times \vec{v}(\vec{x})\, dV$$

DEFINISCO $(\vec{x} - \vec{x}_o) = \vec{r}$ E $\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \underbrace{\vec{r}}_{(\vec{x}-\vec{x}_o)}$ ALLORA:

$$\vec{h}_o = \iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{r} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r})\, dV \quad \text{DIVIDENDOLA IN DUE TERMINI:}$$

$$\vec{h}_o = \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x})(\vec{r} \times \vec{v}_o)\, dV}_{A} + \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dV}_{B}$$

ANALIZZO I TERMINI SEPARATAMENTE:

A $\iiint_V \rho(\vec{x})(\vec{r} \times \vec{v}_o)\, dV \longrightarrow$ SOSTITUISCO A $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_o$ QUINDI

$$=\iiint_V \rho(\vec{x})(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{v}_0\, dV = \iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{x}\times\vec{v}_0\, dV - \iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{x}_0\times\vec{v}_0\, dV \Rightarrow$$ SPOSTO FUORI L'INTEGRALE I TERMINI CHE NON DIPENDONO DA V

$$=\left[\iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{x}\, dV\right]\times\vec{v}_0 - \left[\iiint_V \rho(\vec{x})\, dV\right](\vec{x}_0\times\vec{v}_0) = M\vec{x}_G\times\vec{v}_0 - M\,\vec{x}_0\times\vec{v}_0 \Rightarrow$$ RAGGRUPPO $\vec{v}_0$

TERMINE CHE È PARTE DELLA DEFINIZIONE DI $\vec{x}_G$

$$\left\{\iiint_V \rho(\vec{x}-\vec{x}_G)\, dV = \vec{0}\right\}$$

$$= M(\vec{x}_G-\vec{x}_0)\times\vec{v}_0 = (\vec{x}_G-\vec{x}_0)\times M\vec{v}_0$$ QUINDI

DEFINISCO

Ⓐ $$\boxed{\vec{g}_0 = (\vec{x}_G-\vec{x}_0)\times M\vec{v}_0 = \vec{r}_{0G}\times M\vec{v}_0}$$ OPPURE $-M\vec{r}_{0g}\times\vec{v}_0$

RAPPRESENTA IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO RISPETTO A G DI UN PUNTO MATERIALE DI MASSA PARI ALLA MASSA DEL CORPO M E CHE SI MUOVE (COINCIDE) CON IL POLO CINEMATICO O ISTANTE PER ISTANTE. SI NOTA CHE QUESTO TERMINE È NULLO SE IL POLO O È FERMO O COINCIDE CON IL CENTRO DI MASSA G.

DIMOSTRAZIONE APPENDICE A MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO E MATRICE DI INERZIA

MENTRE ANALIZZANDO Ⓑ SI HA CHE:

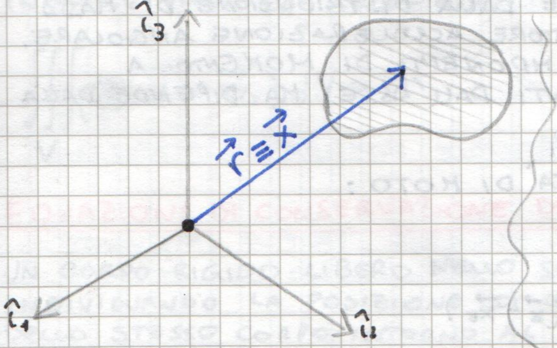
$$\iiint_V \rho(\vec{x})\,\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\, dV$$ RICORDANDO $a\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$=\iiint_V \rho(\vec{x})\left[\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right] dV = \iiint_V \rho(\vec{x})\Big[\vec{\omega}r^2 - \vec{r}\big(\underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{N} r_i\omega_i}_{(\vec{r}\cdot\vec{\omega})}\big)\Big] dV = \vec{h}'_0$$

{ È LEGAME TRA MOM. DELLA Q.TÀ DI MOTO E VELOCITÀ ANGOLARE

→ PER COMODITÀ DI RAPPRESENTAZIONE!!

ARRIVATI A QUESTO PUNTO SCELGO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN MODO TALE CHE L'ORIGINE COINCIDA CON IL POLO DEI MOMENTI; SI AVRÀ CHE



$\vec{r} = \vec{x}-\vec{x}_0$ MA $\vec{x}_0 = \vec{0}$ IN QUANTO $O_{polo} \equiv O$ DEL SDR

Ⓑ $$\vec{h}'_0 = \iiint_V \rho(\vec{x})\left[\vec{\omega}r^2 - \vec{r}\left(\sum_{i=1}^{N} r_i\omega_i\right)\right]$$

ALLA FORMA VARIANTE CORRISPONDE:

$$\boxed{\underline{h}'_0 = \begin{Bmatrix} h'_{01}\\ h'_{02}\\ h'_{03}\end{Bmatrix} \quad \underline{\omega} = \begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{Bmatrix} \quad \underline{r} = \begin{Bmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{Bmatrix}}$$

QUINDI RISCRIVENDO LA Ⓑ IN FORMA INDICIALE:

POTREI LASCIARE ANCHE $\vec{x}$, È UGUALE

$$h'_{0K} = \iiint_V \rho(x_i)\left[\omega_K r^2 - r_K\left(\sum_{J=1}^{N} r_J\omega_J\right)\right] dV =$$

PORTO FUORI LA SOMMATORIA, SPOSTO PER SEMPLICITÀ ρ ALLA FINE:

$$\Rightarrow \sum_{J=1}^{N}\left[\iiint_V (\omega_K r^2\delta_{KJ} - r_K r_J\omega_J)\,\rho\, dV\right]$$

ADESSO, CONSIDERANDO CHE $\delta_{KJ} \rightarrow 1$ SE $K=J$ E 0 SE $K\neq J$ ALLORA SI PUÒ DIRE CHE:

$\omega_K = \omega_J$ QUINDI SPOSTO FUORI ω_J (NON DIPENDE DA dV): ↗ VARIABILE DI INTEGRAZIONE

$$\underbrace{\sum_{J=1}^{N}\left[\iiint_V (r^2\delta_{KJ} - r_K r_J)\,\rho\, dV\right]}_{\text{MATRICE DI INERZIA } J_{0KJ}}\omega_J \ *$$ DOVE IL TERMINE TRA LE PARENTESI QUADRATE È UNA MATRICE $K\times J$ (NEL NOSTRO CASO 3×3)

SI RISCRIVE IL TUTTO COME:

3D

$$\boxed{\underline{h}_o' = \underline{\underline{J}}^o\, \underline{\omega}}$$

(B) DOVE $\vec{h}_o'$ È IL LEGAME TRA IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE $\vec{\omega}$ DEL CORPO E IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO

IN PARTICOLARE SI TRATTA DI UN'EQUAZIONE TENSORIALE, INFATTI, CASO 3D:

$$\underline{h}_o' = \overset{3\times3}{\underline{\underline{J}}^o}\ \overset{3\times1}{\underline{\omega}}$$

DOVE: • J^o È LA MATRICE DI INERZIA: È MATRICE CHE RAPPRESENTA IL TENSORE DI INERZIA NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO (QUINDI J^o DIPENDE DA SDR) E DIPENDE DAL POLO SCELTO.

LA MATRICE DI INERZIA J^o È COSTITUITA DA VALORI CHE METTONO IN RELAZIONE LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ ANGOLARE CON LE COMPONENTI DI SOLLECITAZIONE. QUESTI VALORI, CHE SONO LE COMPONENTI DELLA MATRICE, SI DEFINISCONO MOMENTI E PRODOTTI DI INERZIA DEL CORPO RIGIDO RISPETTO GLI ASSI COORDINATI DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO.

• $\underline{\omega}$ È LA VELOCITÀ ANGOLARE CHE QUINDI RAPPRESENTA LA V. ANGOLARE NEL SDR SCELTO.

INFINE SI PUÒ DEFINIRE LA Q.TÀ DI MOTO E IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO COME:

$$\boxed{\underline{q} = m\, \underline{v}_G}$$

(1) QUANTITÀ DI MOTO PER DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MASSA CON VINCOLO DELLA RIGIDITÀ

E

$$\boxed{\underline{h}_o = \underline{g}_o + \underbrace{\underline{\underline{J}}^o\, \underline{\omega}}_{h_o'}}$$

(2) MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO PER DISTRIBUZIONI CONTINUE DI MASSA CON VINCOLO DELLA RIGIDITÀ

$$\boxed{\frac{dh_o}{dt} = \frac{d}{dt}(g_o) + \frac{d}{dt}(\underline{\underline{J}}^o)\,\underline{\omega} + \underline{\underline{J}}^o \frac{d}{dt}(\underline{\omega})}$$

(3) EQ. DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DI Q.TÀ DI MOTO PER DISTRIBUZIONI CON...

MATRICE DI INERZIA J^o

LA MATRICE DI INERZIA PUÒ ESSERE SCRITTA IN FORMA MATRICIALE COME:

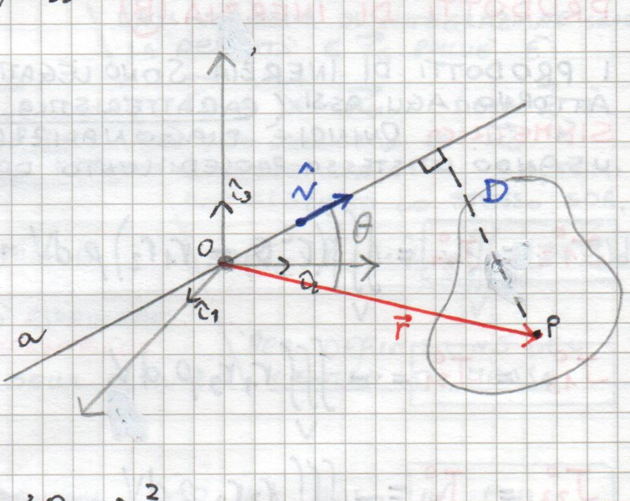
$$J^o = \begin{bmatrix} J_{11}^o & J_{12}^o & J_{13}^o \\ J_{21}^o & J_{22}^o & J_{23}^o \\ J_{31}^o & J_{32}^o & J_{33}^o \end{bmatrix}$$

PER CALCOLARE LE COMPONENTI DELLA MATRICE SI DEFINISCONO 2 COMPONENTI:

- MOMENTI DI INERZIA: $J_{11}^o, J_{22}^o, J_{33}^o$ (A)
- PRODOTTI DI INERZIA: $J_{12}^o, J_{13}^o, J_{21}^o, J_{23}^o, J_{31}^o, J_{32}^o$ (B)

(A) MOMENTI DI INERZIA

LA DEFINIZIONE GENERALE DI MOMENTO DI INERZIA DI UNA GENERICA DISTRIBUZIONE DI MASSA RISPETTO ALL'ASSE DEFINITO DAL VERSORE $\hat{v}$ È:



$$\boxed{J_a = \iiint_V \rho(\vec{x})\, |\hat{v} \times \vec{r}|^2\, dV = \iiint_V \rho(\vec{x})\, D^2\, dV}$$

DOVE D È LA DISTANZA DEL GENERICO PUNTO P E L'ASSE a DEFINITO DAL VERSORE $\hat{v}$.

$\hat{v} \times \vec{r} = 1 \cdot \|\vec{r}\| \sin\theta = r\sin\theta = D \rightarrow r^2 \sin^2\theta = D^2$

QUESTA È LA DEFINIZIONE GENERALE MA RIPRENDENDO LA * (PAGINA PRECEDENTE): OSSIA:

$$h'_O = \sum_{J=1}^{N} \underbrace{\left[\iiint_V (r^2 \delta_{KJ} - r_K r_J) \rho \, dV \right]}\omega_J$$

CONSIDERANDO SOLO QUESTO TERMINE CON LA SOMMATORIA E FACENDO VARIARE J DA [1;3] CON K = J ALLORA OTTENGO TUTTI I TERMINI DELLA DIAGONALE, OSSIA I MOMENTI DI INERZIA; INFATTI:

es.

$$\iiint_V (r^2 \delta_{KJ} - r_K r_J) \rho \, dV$$ SE PONGO $K = J = 1$ SI OTTIENE:

$$\iiint_V (r^2 \cdot 1 - r_1 r_1) \rho \, dV = \iiint_V (r^2 - r_1^2) \rho \, dV$$ CHE INFATTI È PROPRIO J^o_{11}, QUINDI:

MOMENTI DI INERZIA (A)

$$\boxed{J^o_{11}} = \iiint_V (r^2 - r_1^2) \rho \, dV = \iiint_V (r_2^2 + r_3^2) \rho \, dV$$

$$\boxed{J^o_{22}} = \iiint_V (r^2 - r_2^2) \rho \, dV = \iiint_V (r_1^2 + r_3^2) \rho \, dV$$

$$\boxed{J^o_{33}} = \iiint_V (r^2 - r_3^2) \rho \, dV = \iiint_V (r_1^2 + r_2^2) \rho \, dV$$

IN CUI SI È SFRUTTATA LA RELAZIONE

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

QUINDI es J^o_{11}:

$$r^2 - r_1^2 = r_2^2 + r_3^2$$

LA RELAZIONE TRA LA FORMULA DI PRIMA CIOÈ:

$$J_a = \iiint_V \rho |\hat{n} \times \vec{r}| dV = \iiint_V \rho D^2 dV$$

es.

$D^2 = r^2 - r_1^2$ NEL CASO DI J^o_{11}

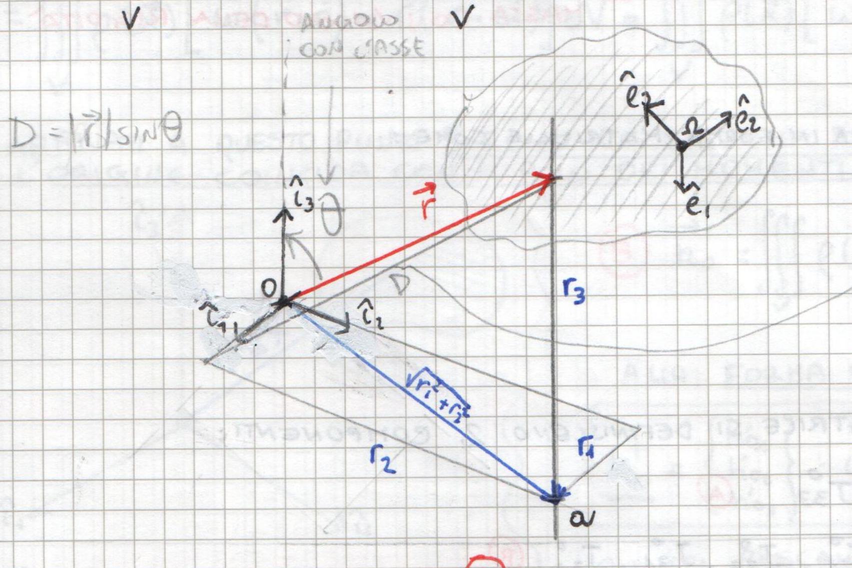
QUINDI

$$D^2 = r_2^2 + r_3^2$$

MENTRE NEL CASO PIÙ SEMPLICEMENTE GRAFICAMENTE IN

$$J^o_{33} \rightarrow D^2 = r_1^2 + r_2^2$$

QUINDI $D = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$



PIÙ IL CORPO DISTA DALL'ASSE E PIÙ L'EFFETTO È GRANDE IN QUANTO DIPENDE QUADRATICAMENTE DA D (CIOÈ LA LA DISTANZA TRA ASSE E PUNTO).

PRODOTTI DI INERZIA (B)

I PRODOTTI DI INERZIA SONO LEGATI ALLE CARATTERISTICHE DELLA DISTRIBUZIONE DI MASSA ATTORNO AGLI ASSI (CARATTERISTICA SIMMETRICA DEI CORPI). LA MATRICE DI INERZIA È SIMMETRICA QUINDI È DIAGONALIZZABILE. È POSSIBILE SCEGLIERE UN OPPORTUNO SDR AFFINCHÉ SIA DIAGONALE USANDO LO STESSO PROCEDIMENTO DA *:

$$\boxed{J^o_{12} = J^o_{21}} = \iiint_V (r^2 0 - r_1 r_2) \rho \, dV = -\iiint_V r_1 r_2 \rho \, dV$$ POICHÉ $\delta_{KJ} = 0$ IN QUANTO $K \neq J$

$$\boxed{J^o_{13} = J^o_{31}} = -\iiint_V r_1 r_3 \rho \, dV$$

$$\boxed{J^o_{23} = J^o_{32}} = -\iiint_V r_2 r_3 \rho \, dV$$

IN DEFINITIVA QUINDI SI PUÒ AFFERMARE CHE GLI ELEMENTI DELLA MATRICE DI INERZIA DIPENDONO DAI:

- SCELTA DEL POLO
- SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO
- TEMPO A CAUSA DEL MOTO DEL CORPO

SE IL POLO O COINCIDE CON IL BARICENTRO G ALLORA:

$$\boxed{\underline{\Gamma}_G = \underline{\underline{J}}_G \, \underline{\omega}}$$

~~TEIRA~~ ~~HUIGHENS~~ AIGHENS

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER 3D

IL TEOREMA CI PERMETTE DI ESPRIMERE DEI MOMENTI DI INERZIA TRAMITE ALTRI ASSI (QUINDI DA UNA SCELTA PASSIAMO AD UN'ALTRA).

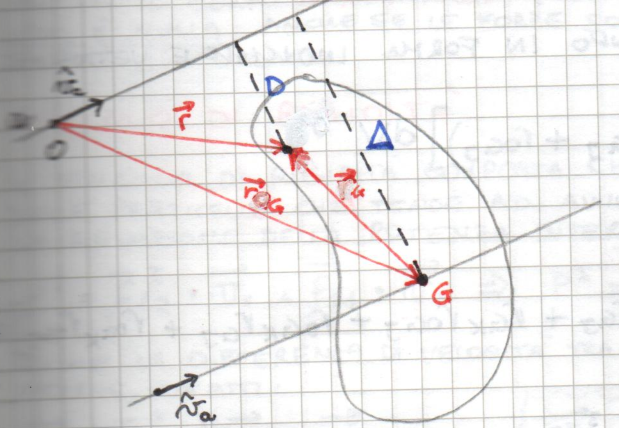
IL TEOREMA AFFERMA CHE LA DIFFERENZA TRA IL MOMENTO DI INERZIA J_a RISPETTO AD UN GENERICO ASSE a, INDIVIDUATO DAL VERSORE $\hat{v}_a$, E QUELLO (MOMENTO) RISPETTO AD UN ASSE PARALLELO AD a PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA $\vec{x}_G$ (OSSIA IL MOMENTO DI INERZIA J_{Ga}) È PARI AL PRODOTTO DELLA MASSA DEL CORPO PER IL QUADRATO DELLA DISTANZA TRA I DUE ASSI:

$$\boxed{J_a - J_{Ga} = M\Delta^2} \iff \boxed{J_a = J_{Ga} + M\Delta^2}$$

IPOTIZZO POLO O (NON NECESS. APP. AL CORPO RIGIDO) E IMMAGINO ASSE DEFINITO DA $\hat{v}_e$ NE CALCOLO IL MOMENTO DI INERZIA

DIMOSTRAZIONE

VERSORE NON È VETT. APPLICATO



IN PRECEDENZA SI ERA GIÀ DEFINITO J_a COME: MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE a

- $$J_a = \iiint_V \rho(\vec{x}) \, |\hat{v}_a \times \vec{r}|^2 \, dV = \iiint_V \rho(\vec{x}) \, D^2 \, dV$$

NOTO IL CENTRO DI MASSA E FACCIO LO STESSO. MENTRE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE PARALLELO AD a PASSANTE PER G È:

- $$J_{Ga} = \iiint_V \rho(\vec{x}) \, |\hat{v}_a \times \vec{r}_G|^2 \, dV$$

RIPRENDENDO LA PRIMA EQUAZIONE J_a, LA SI PUÒ ESPRIMERE DIVERSAMENTE COME:

DEFINITO $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_{OG} + \vec{r}_G}$ ALLORA IL TERMINE $|\hat{v}_a \times \vec{r}|^2$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME:

$$|\hat{v}_a \times \hat{r}|^2 = |\hat{v}_a \times (\vec{r}_{OG} + \vec{r}_G)|^2 = |\hat{v}_a \times (\vec{r}_{OG} + \vec{r}_G)| \cdot |\hat{v}_a \times (\vec{r}_{OG} + \vec{r}_G)| =$$

$$= |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG} + \hat{v}_a \times \vec{r}_G| \cdot |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG} + \hat{v}_a \times \vec{r}_G| = |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG}|^2 + |\hat{v}_a \times \vec{r}_G|^2 + 2|\hat{v}_a \times \vec{r}_G| \cdot |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG}|$$

QUINDI SOSTITUENDO QUESTA RELAZIONE IN J_a:

$$J_a = \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x}) \, |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG}|^2 \, dV}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\iiint_V \rho(\vec{x}) \, |\hat{v}_a \times \vec{r}_G|^2 \, dV}_{\mathrm{II}} + \cancel{\underbrace{\iiint_V 2\rho \, |\hat{v}_a \times \vec{r}_G| \cdot |\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG}| \, dV}_{\mathrm{III}}}$$

I: $M|\hat{v}_a \times \vec{r}_{OG}|^2$ → $M\Delta^2$

IN CUI Δ È QUINDI LA DISTANZA TRA I DUE ASSI

È IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA MASSA PUNTIFORME PARI ALLA MASSA DELL'INTERO CORPO CONCENTRATA NEL CM RISPETTO ALL'ASSE a

II: J_{Ga}

MOMENTO DI INERZIA DELLA STESSA DISTRIBUZIONE DI MASSA RISPETTO AD UN ASSE PARALLELO A $\hat{v}_a$ PASSANTE PER G

III: LE UNICHE INCOGNITE CHE DIPENDONO DALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE SONO LA DENSITÀ E $\vec{r}_G$ POICHÉ È:

$\vec{r}_G = \vec{x} - \vec{x}_G$ DOVE $\vec{x}$ È IL P.TO GENERICO E $\vec{x}_G$ È LA POSIZIONE DEL CM, TUTTO CIÒ RISPETTO LO STESSO SOR.

$$= 2(\hat{v}_a \times \hat{r}_{OG}) \cdot \hat{v}_a \times \iiint_V \rho(\vec{x} - \vec{x}_G) \, dV$$

PER DEFINIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

DA CUI:

$$\boxed{J_a = J_{Ga} + M\Delta^2}$$

VALIDO PER QUALSIASI CASO SPAZIALE

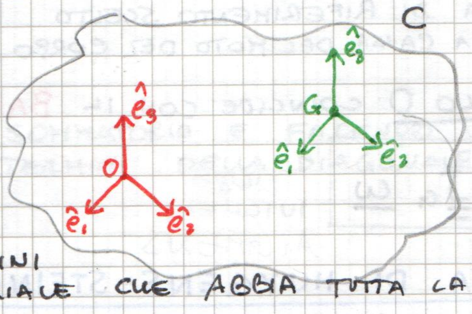
IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AD UN QUALSIASI ASSE SI PUÒ ESPRIMERE SOMMANDO AL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AD UN ASSE BARICENTRALE PARALLELO AD a IL PRODOTTO TRA MASSA E IL QUADRATO DELLA DISTANZA TRA I DUE ASSI.

TUTTO CIÒ SE CONOSCIAMO IL CENTRO DI MASSA.

A QUESTO PUNTO SI PUÒ GENERALIZZARE IL TEOREMA PER IL CASO IN CUI VOLESSIMO CALCOLARE [...] TERNA QUALSIASI

CHE ABBIA COME ORIGINE IL CENTRO DI MASSA CON QUINDI UN ASSE PASSANTE PER G PARTENDO DALLA CONOSCENZA DI UNA MATRICE DI INERZIA CON ASSI PARALLELI PERÒ CON ORIGINE IN POLO GENERICO.

SE CONOSCO $\underline{J}^O = J^O_{KJ}$



SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ELEMENTO APPARTENENTE ALLA MATRICE $\underline{J}^O$:

$$\boxed{J^O_{KJ} = J^G_{KJ} + M\left(r^2_{OG}\delta_{KJ} - r_{OG_K} r_{OG_J}\right)}$$

QUINDI LA DIFFERENZA TRA LE DUE MATRICI CI DÀ ALTRA MATRICE DI INERZIA CHE RAPPRESENTA I TERMINI DI INERZIA RELATIVI AD UN IPOTETICO PUNTO MATERIALE CHE ABBIA TUTTA LA MASSA CONCENTRATA IN ESSA

RELAZIONE $\underline{J}^O$ E $\underline{J}^G$

HO QUINDI DUE TERNE CON ASSI PARALLELI E ORIGINI O E G.

PARTENDO DALLA DEFINIZIONE DI MOMENTO DI INERZIA KJ-ESIMO:

$$J_{OKJ} = \iiint_V \rho\left(r^2\delta_{KJ} - r_K r_J\right) dV$$

MA RICORDANDO CHE $\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}_{OG}$ SOSTITUENDO IN FORMA INDICIALE E VETTORIALE

$$J_{OKJ} = \iiint_V \rho\left[\left(\vec{r}_G + \vec{r}_{OG}\right)^2\delta_{KJ} - \left(r_{G_K} + r_{OG_K}\right)\left(r_{G_J} + r_{OG_J}\right)\right] dV$$

SVILUPPANDOLO:

$$J_{OKJ} = \iiint_V \rho\left[\left(r_G^2 + 2\vec{r}_G\cdot\vec{r}_{OG} + r^2_{OG}\right)\delta_{KJ} - \left(r_{G_K}r_{G_J} + r_{G_K}r_{OG_J} + r_{OG_K}r_{G_J} + r_{OG_K}r_{OG_J}\right)\right]$$

RAGGRUPPANDO HO CHE:

$$J_{OKJ} = \iiint_V \rho\left(r_G^2\delta_{KJ} - r_{G_K}r_{G_J}\right) dV + \iiint_V \rho\left[r^2_{OG}\delta_{KJ} + 2\sum_{i=1}^{3} r_{G_i} r_{OG_i}\delta_{KJ} - r_{G_K}r_{OG_J} - r_{OG_K}r_{G_J}\right.$$

$$\left. - r_{OG_K}r_{OG_J}\right] dV$$

BASTA SOSTITUIRE A r_{G_i}, r_{G_K} E r_{G_J} $\to (\vec{x} - \vec{x}_G)$

RICORDANDO CHE $\iiint_V \rho(\vec{x} - \vec{x}_O)\,dV = \vec{0}$ E CHE $\vec{r}_{OG}$ NON DIPENDE DA V

SI OTTIENE

$$J_{OKJ} = \underbrace{\iiint_V \rho\left(r_G^2\delta_{KJ} - r_{G_K}r_{G_J}\right) dV}_{J_{GKJ}} + \underbrace{\left(r^2_{OG}\delta_{KJ} - r_{OG_K}r_{OG_J}\right)\iiint_V \rho\, dV}$$

J_{GKJ}: COMPONENTE KJ-ESIMA DELLA MATRICE DI INERZIA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA RELATIVA ALLA TERNA R (NON R_G)

COMPONENTE KJ-ESIMA DELLA MATRICE DI INERZIA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA DELL'INTERA MASSA SITUATA IN O

$$\boxed{J_{OKJ} = J_{GKJ} + M\left(r^2_{OG}\delta_{KJ} - r_{OG_K}r_{OG_J}\right)}$$

TEOREMI ENERGETICI PER IL CORPO RIGIDO

SI SONO ENUNCIATI IN PRECEDENZA I TEOREMI ENERGETICI PER I SISTEMI N-PARTICELLARI. È POSSIBILE ESTENDERE TALI TEOREMI ENERGETICI AL CASO DI CORPI RIGIDI. VANNO PERÒ FATTE ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL SIGNIFICATO CHE ASSUMONO LE GRANDEZZE SOTTO L'IPOTESI DI RIGIDITÀ (DISTANZA RELATIVA COSTANTE).

PER I SISTEMI N-PARTICELLARI VALGONO LE SEGUENTI RELAZIONI:

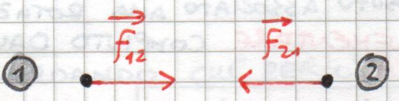
$$\boxed{\sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^{\,I} = \vec{0}} \quad \text{E} \quad \boxed{\sum_{K=1}^{N} \vec{m}_K^{\,INT} = \vec{0}} \quad \text{OSSIA}$$

- LE FORZE INTERNE COSTITUISCONO UNO STATO DI SOLLECITAZIONE GLOBALMENTE EQUIVALENTE A 0.
- CON MOMENTO GLOBALMENTE EQUIVALENTE A 0.

POTENZA INTERNA (I)

TUTTAVIA LA POTENZA DELLE FORZE INTERNE P^I NON È UGUALE A 0 IN GENERALE, PERCHÉ I LAVORI ELEMENTARI NON SONO UGUALI A 0 NEL MOMENTO IN CUI QUESTE FORZE POSSANO AVVICINARSI O ALLONTANARSI.

$$\boxed{P^I = \vec{f}_{12}^{\,I} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{21}^{\,I} \cdot \vec{v}_2 \neq 0}$$



POTENZA GLOBALE

SE QUESTE PARTICELLE SI STANNO MUOVENDO AVVICINANDOSI O ALLONTANANDOSI, PERCHÉ IL CORPO NON È RIGIDO (OSSIA IL CORPO SI STA DEFORMANDO), QUESTA ESPRESSIONE NON È NULLA ANCHE SE LE FORZE SONO UGUALI E CONTRARIE O SE LE VELOCITÀ SONO UGUALI E CONTRARIE.

VINCOLO DI RIGIDITÀ

IL VINCOLO DI RIGIDITÀ COMPORTA CHE NON ESISTE ALCUNA COMPONENTE DELLE VELOCITÀ DELLE PARTICELLE CHE TENDE AD AVVICINARLE O AD ALLONTANARLE. LA RELAZIONE DELLA POTENZA INTERNA PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$P^I = \vec{f}_{12}^{\,I} \cdot \vec{v}_1 + \vec{f}_{21} \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow P^I = \boxed{\vec{f}_{12}^{\,I} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0} \quad \text{IN QUANTO } \vec{f}_{12}^{\,I} = -\vec{f}_{21}^{\,I}$$

QUINDI LA DIFFERENZA DI VELOCITÀ TRA LE DUE PARTICELLE È ORTOGONALE ($\perp$) ALLE FORZE INTERNE, INFATTI:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{12} \quad \text{OSSIA} \quad \boxed{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{12}} \quad \text{QUINDI} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \perp \vec{12}$$

QUINDI NELL'ATTO DI MOTO RIGIDO LE FORZE INTERNE NON CONTRIBUISCONO.

STESSA TRATTAZIONE PUÒ ESSERE FATTA ESTENDENDO IL CASO A N PARTICELLE: (SOPRA SI È SEMPLIFICATO CONSIDERANDO SOLO 2.)

$$P^I = \sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^{\,I} \cdot \vec{v}_K = \sum_{K=1}^{N}\sum_{J=1}^{N} \vec{f}_{KJ}^{\,I} \cdot \vec{v}_K = \sum_{K=1}^{N}\sum_{J=K+1}^{N} \vec{f}_{KJ}^{\,I} \cdot (\vec{v}_K - \vec{v}_J)$$

IN CUI SI È MODIFICATA LA RELAZIONE COSÌ DA FAR APPARIRE UNA DIFF. TRA VELOCITÀ

POICHÉ COME SOPRA: $\vec{v}_K = \vec{v}_J + \vec{\omega} \times \vec{r}_{KJ}$ DOVE $\vec{r}_{KJ}$ CORRISPONDE AL VETTORE $\vec{12}$.

QUINDI ANCHE QUI $\vec{f}_{KJ}$ È $\parallel$ A $\vec{r}_{KJ}$ QUINDI $\vec{v}_K - \vec{v}_J$ È $\perp$ $\vec{r}_{KJ}$.

PORTANDO AL LIMITE N OSSIA $N \to \infty$ SI GIUNGE A $P^I = 0$.

POTENZA ESTERNA (II)

CONSIDERANDO ORA LA POTENZA ESTERNA, QUINDI CONSIDERO LE FORZE ESTERNE:

$$P^E = \sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^{\,E} \cdot \vec{v}_K$$

PORTANDO AL LIMITE, OSSIA $N \to \infty$:

$$P^E = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^{\,E} \cdot \vec{v}_K \right]$$

SCELTO IL CENTRO DI MASSA COME POLO CINEMATICO

SCEGLIENDO G COME POLO DELL'ATTO DI MOTO (G = C.M.) RICORDANDO POI CHE $\vec{v}_K = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{KG}$ SOSTITUENDO:

$$P^E = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^{\,E} \cdot (\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{GK}) \right] = \vec{f}^{\,E} \cdot \vec{v}_G + \iiint_V \vec{f}(\vec{x}) \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_G(\vec{x})]\, dV$$

USANDO ORA LA PROPRIETÀ VETTORIALE (VOLUME DI UN PARALLELEPIPEDO):

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot\underbrace{(\vec{c}\times\vec{a})}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$ RELAZIONE CICLICA

USIAMO LA 2° UGUAGLIANZA, QUINDI:

$$P^E=\vec{F}^E\cdot\vec{v}_G+\iiint_V\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_G(\vec{x})\times\vec{f}(\vec{x}))\,dV$$ IN CUI POSSO PORTARE FUORI ω:

$$P^E=\vec{F}^E\cdot\vec{v}_G+\vec{\omega}\cdot\iiint_V\vec{r}_G(\vec{x})\times\vec{f}(\vec{x})\,dV=$$

$$\boxed{=\vec{F}^E\cdot\vec{v}_G+\underbrace{\vec{m}_G^E\cdot\vec{\omega}}_{\text{contributo associato alla rotazione}}=P^E}$$ POTENZA ESTERNA

QUINDI IL LAVORO ELEMENTARE COMPIUTO DALLE F^E IN UN INTERVALLO dt È:

$$\boxed{d\mathcal{L}^E=(\vec{F}^E\cdot\vec{v}_G)\,dt+(\vec{m}_G^E\cdot\vec{\omega})\,dt}$$

DOVE APPAIONO I CONTRIBUTI DEL MOTO DEL BARICENTRO E DEL MOTO ATTORNO ADESSO.

DATA QUESTA RELAZIONE, SI POSSONO ESTENDERE TUTTE LE RELAZIONI ENERGETICHE DEI SISTEMI DI N-PUNTI MATERIALI, OSSIA:

- $\boxed{T_2-T_1=\mathcal{L}^E_{C(1\to2)}}$ DOVE $\mathcal{E}$ È L'EN. MECCANICA ASSOCIATA A F. NON CONSERVATIVE (DA QUI L'APICE NC).
- $\boxed{\dfrac{d\mathcal{E}}{dt}=P^{E^{NC}}}$
- $\boxed{\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1=\mathcal{L}^{E^{NC}}_{C(1\to2)}}$

TEOREMA DI KÖENIG (APPENDICE - DIMOSTRATO)

COME FATTO PER MASSA, CENTRO DI MASSA, Q.TÀ DI MOTO, ECC. SI SCRIVE LA RELAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA

ENERGIA CINETICA

$$\boxed{T=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{K=1}^{N}\frac{1}{2}(\vec{v}_K\cdot\vec{v}_K)\rho\Delta V_K\right]=\iiint_V\frac{1}{2}\rho v^2\,dV}\quad \text{I}$$

CHE QUINDI È L'ENERGIA CINETICA ASSOCIATA AD UN CORPO RIGIDO QUINDI AD UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI MASSA.

SI PARTE QUINDI DALLA RELAZIONE T IN CUI AL POSTO DI v^2 SI SCRIVE $|\vec{v}|^2$ FORMALMENTE IDENTICA

L'HO RISCRITTO IN MODO DIVERSO

$$T=\iiint_V\frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2dV=\iiint_V\frac{1}{2}\rho|\vec{v}+\vec{v}_G-\vec{v}_G|^2dV=\iiint_V\frac{1}{2}\rho|\vec{v}_G+\vec{v}-\vec{v}_G|\cdot|\vec{v}_G+\vec{v}-\vec{v}_G|\,dV$$

MOLTIPLICO TRA LORO I VARI TERMINI E PORTO FUORI $\frac{1}{2}$:

$$*=\underbrace{\frac{1}{2}\iiint_V\rho\,v_G^2\,dV}_{\text{I}}+\underbrace{\frac{1}{2}\iiint_V\rho|\vec{v}-\vec{v}_G|\cdot|\vec{v}-\vec{v}_G|\,dV}_{\text{II}}+\underbrace{\frac{1}{2}\iiint_V 2\rho|\vec{v}_G|\cdot|\vec{v}-\vec{v}_G|\,dV}_{\text{III}}$$

MA IL III TERMINE È NULLO POICHÉ:

$$\iiint_V \rho \vec{v}_G \cdot |\vec{v}-\vec{v}_G|\, dV = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{x}) \underbrace{(\vec{x}-\vec{x}_G)}\, dV$$ DA CUI:

$$\iiint_V \rho(\vec{x}-\vec{x}_G)\, dV = 0$$

QUINDI * DIVENTA:

$$T = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\, v_G^2\, dV + \frac{1}{2}\iiint_V \rho\, |\vec{v}-\vec{v}_G| \cdot |\vec{v}-\vec{v}_G|\, dV$$

$$T = \underset{I}{\frac{1}{2} M \vec{v}_G^2} + \frac{1}{2}\iiint_V \underset{II}{\rho\, |\vec{v}-\vec{v}_G| \cdot |\vec{v}-\vec{v}_G|}\, dV$$

ADESSO VA SEMPLIFICATO IL II TERMINE; RICORDANDO CHE PER L'ATTO DI MOTO RIGIDO:

$$\vec{v}-\vec{v}_G = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}\times(\vec{x}-\vec{x}_\Omega) - (\vec{v}_\Omega + \vec{\omega}\times(\vec{x}_G-\vec{x}_\Omega)) = \vec{\omega}\times(\vec{x}-\vec{x}_\Omega) - \vec{\omega}\times(\vec{x}_G-\vec{x}_\Omega)$$

$$= \vec{\omega}\times(\vec{x}-\vec{x}_\Omega-\vec{x}_G+\vec{x}_\Omega) = \vec{\omega}\times(\vec{x}-\vec{x}_G) = \vec{\omega}\times\vec{r}_G$$

QUINDI SOSTITUENDO $\boxed{\vec{v}-\vec{v}_G = \vec{\omega}\times\vec{r}_G}$ ALLORA: ← L'IMPORTANTE È QUELLO DA RICORDARE

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}\iiint_V \underset{II}{\rho\, (\vec{\omega}\times\vec{r}_G)\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_G)}\, dV \quad *$$

ANALIZZO SOLO IL II; EFFETTUO UNA SOSTITUZIONE USANDO L'IDENTITÀ VETTORIALE

$$II\ \frac{1}{2}\iiint \rho\, (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{r}_G\cdot\vec{r}_G) - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_G)(\vec{r}_G\cdot\vec{\omega})\, dV$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

USANDO LA F. INDICIALE:

$$\frac{1}{2}\iiint_V \rho \left[\sum_{i=1}^{3} \omega_i\omega_i r_G^2 - \left(\sum_{i=1}^{3}\omega_i r_{G_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\omega_k r_{G_k}\right)\right] dV$$

NON DIPENDONO DA V

SPOSTO FUORI ω_i E ω_k OSSIA SPOSTO FUORI LA DOPPIA SOMMATORIA:

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\underbrace{\left[\iiint_V \rho\,(r_G^2\,\delta_{ik} - r_{G_i} r_{G_k})\, dV\right]}\omega_i\omega_k$$

($\omega_i\omega_i = \omega_i\omega_k$ SPOSTANDOLO FUORI)

IL TERMINE TRA PARENTESI È LA COMPONENTE ik DELLA MATRICE DI INERZIA RISPETTO A G.
SI PUÒ QUINDI DEFINIRE QUESTO TERMINE COME J_{ik}^G

* CONTINUA SU FOGLIO

QUINDI:

$$\boxed{\iiint_V \rho\, |\vec{\omega}\times\vec{r}_G|^2\, dV = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\omega_i J_{ik}^G \omega_k = \underline{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \underline{\omega}}$$

$[1\times3][3\times3][3\times1]$

$[1\times3][3\times1]$

DOVE $\boxed{\underline{h}_G\, \underline{\omega}^T = \underline{\omega}^T \underline{\underline{J}}_G\, \underline{\omega}}$

QUINDI L'ENERGIA CINETICA È:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}\overbrace{\underline{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \underline{\omega}}^{\text{FORMA QUADRATICA}}}$$

2° TEOREMA DI KOENIG 3D PER CORPI RIGIDI

$$\Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{h}_G}$$

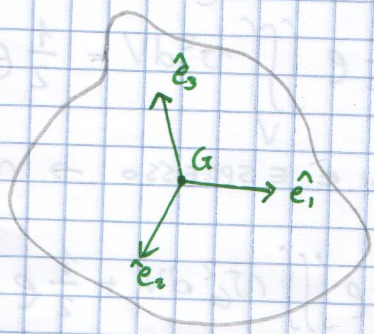
↳ CARATTERISTICA INERZIALE DELLA ROTAZIONE

QUINDI L'ENERGIA CINETICA È SOMMA DI E. CINETICA ASSOCIATA AD UN IPOTETICO PUNTO MATERIALE AVENTE TUTTA LA MASSA DEL CORPO (NEL SUO PUNTO) E UN TERMINE CHE È RELATIVO ALLA ROTAZIONE DI G.

* CONTINUO DEL TEOREMA DI KOENIG PER CORPI RIGIDI

IMMAGINANDO GENERICA DISTRIBUZIONE, SI DEFINISCE UN SDR SOLIDALE E CHE RUOTI A $\vec{\omega}$ = COSTANTE (NON STA TRASLANDO).

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$$



QUINDI UTILIZZANDO IL 2° TEOREMA DI KOENIG RIMANE SOLO LA FORMA QUADRATICA:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\{0,0,\omega\} \underset{=}{J} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

↓

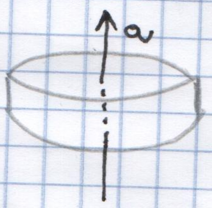
MATRICE DI INERZIA GENERALMENTE PIENA

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\{0,0,\omega\} \begin{Bmatrix} J_{13}\omega \\ J_{23}\omega \\ J_{33}\omega \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_{33}\,\omega^2}$$

QUINDI IL CONTRIBUTO INERZIALE È UN MOMENTO DI INERZIA MENTRE NEL CASO DELLA TRASLAZIONE IL COEFFICIENTE INERZIALE È LEGATO ALLA MASSA.

COME DA DEFINIZIONE IL MOMENTO DI INERZIA NON DIPENDE SOLO DALLA MASSA MA COME QUESTA È DISPOSTA. DIPENDE LINEARMENTE DA QUANTA MASSA C'È MA QUADRATICAMENTE DA COME È DISPOSTA.

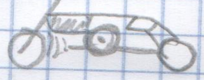
es. DISCO $\quad J^a = \frac{1}{2} m R^2$

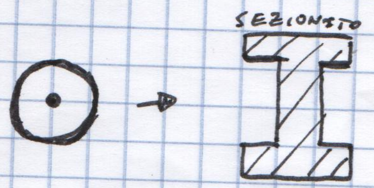


QUINDI SE FACCIO m PIÙ GRANDE, J^a AUMENTA MA SE DISPONGO LA STESSA MASSA MA IN UNA CORONA AD R MAGGIORE, AVRÒ UN MOMENTO DI INERZIA MAGGIORE.
A PARITÀ DI MASSA E DI MOTO, È POSSIBILE AUMENTARE L'ENERGIA CINETICA DI UN OGGETTO SPOSTANDO LA MASSA

SE HO OGGETTO CHE TRASLO, LA $\mathcal{T}$ È QUELLA CHE È. MA SE RUOTA E TRASLA, SE DISPONGO LA m IN MODO MIGLIORE, AUMENTERÒ $\mathcal{T}$.

SU QUESTO CONCETTO SI BASA IL VOLANO CHE È UN DISCO DI ACCIAIO, PESANTE, CON LA MASSA CONCENTRATA SULLA PERIFERIA





A PARITÀ DI ω, IL MOMENTO DI INERZIA È MOLTO ELEVATO, COSÌ DA FORNIRE ENERGIA CINETICA ELEVATA.

SONO TECNICAMENTE DEFINITI SERBATOI DI ENERGIA CINETICA. ORA SONO MOLTO PICCOLI

TEOREMA DI KOENIG 2D

SI CONSIDERA UN CORPO RIGIDO IN MOTO PIANO PER ATTO DI MOTO RIGIDO:
SI CONSIDERA ρ = COSTANTE POICHÉ CORPI OMOGENEI.

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint_V v^2\,dV = \frac{1}{2}\rho\iiint_V |\vec{v}_G + \vec{\omega}\times\vec{r}_G|^2\,dV$$

RISPETTO AL CM

DOVE SI È ESPRESSO $\rightarrow v^2 = |\vec{v}|^2 = |\vec{v}_G + \vec{\omega}\times\vec{r}_G|^2$, QUINDI:

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint_V v_G^2\,dV + \frac{1}{2}\rho\iiint_V |\vec{\omega}\times\vec{r}_G|^2 dV + \frac{1}{2}\rho\iiint_V \vec{v}_G\cdot(\vec{v}-\vec{v}_G)\,dV$$

PER DEFINIZIONE DI $\vec{X}_G$ È NULLO (BASTA PORTARE FUORI LA DERIVATA).

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint_V v_G^2\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V |\vec{\omega}\times\vec{r}_G|^2\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}M v_G^2 + \frac{1}{2}J^G\omega^2$$

BASTA SCOMPORLO IN DUE PRODOTTI VETTORIALI E DI USARE L'IDENTITÀ VETTORIALE $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$

QUINDI FINCHÉ PARLIAMO DI PUNTI MATERIALI (QUINDI DATO UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI) LA CARATTERIZZAZIONE INERZIALE DI OGNI PUNTO È DATA DALLA SUA MASSA OSSIA:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

ADESSO, INVECE, PARLANDO DI CORPI RIGIDI, DATO UN GENERICO CORPO IN GRADO DI MUOVERSI, LA SUA CARATTERIZZAZIONE INERZIALE (OSSIA IL RAPPORTO CHE ESISTE TRA L'INTENSITÀ DELLA SOLLECITAZIONE E L'INTENSITÀ DELLA ACCELERAZIONE CHE NE CONSEGUE) DIPENDE DALLA DIREZIONE NELLO SPAZIO E DALL'ASSE DI ROTAZIONE, PERCIÒ ESISTE UNA MATRICE DI INERZIA. LE DIFFERENTI COMPONENTI DI VELOCITÀ ANGOLARE E LE COMPONENTI DEL VETTORE MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO DIPENDONO IN MANIERA DIVERSA DALLE COMPONENTI DELLA MATRICE.

EQUAZIONI DI EULERO, TERNE CENTRALI E PRINCIPALI, ELLISSOIDE DI INERZIA

COME ACCENNATO PRIMA, LA MATRICE DI INERZIA DIPENDE DAL TEMPO A CAUSA DEL MOTO DEL CORPO.
LA DIPENDENZA DAL TEMPO RENDE COMPLESSO APPLICARE L'EQUAZIONE:

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{m}_o^e - m\vec{v}_o \times \vec{v}_G$$

IN QUANTO LA DERIVATA RISPETTO AL TEMPO DI $\vec{h}_o$ PORTEREBBE ALLA FORMAZIONE DI TERMINI NELLE DERIVATE TEMPORALI DELLE COMPONENTI DELLA MATRICE DI INERZIA J, FORMANDO UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI DIPENDENTI DAL TEMPO (DIFFICILI DA RISOLVERE).

SI PUÒ AGGIRARE IL PROBLEMA SCEGLIENDO COME TERNA DI RIFERIMENTO UNA TERNA SOLIDALE AL CORPO NELLA QUALE I MOMENTI E PRODOTTI DI INERZIA SONO COSTANTI.

TRA LE INFINITE TERNE CON 3 VARIABILI LIBERE (∞^3) POSSIBILI PER OGNI SCELTA DEL POLO, NE ESISTA UNA IN PARTICOLARE CHIAMATA TERNA PRINCIPALE O CENTRALE DI INERZIA (SE IL POLO COINCIDE CON IL CENTRO DI MASSA), CARATTERIZZATA DAL FATTO CHE I PRODOTTI DI INERZIA RISPETTO AD ESSA SONO NULLI.
CONSEGUENZA DI QUESTO FATTO È CHE LA MATRICE DI INERZIA È DIAGONALE.
I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO A QUESTI ASSI VENGONO CHIAMATI MOMENTI PRINCIPALI O CENTRALI DEL CORPO. È DIAGONALIZZABILE PERCHÉ SIMMETRICA.

LA DETERMINAZIONE DELLE DIREZIONI DEGLI ASSI PRINCIPALI O CENTRALI EQUIVALE ALLA RICERCA DEGLI AUTOVETTORI DELLA MATRICE DI INERZIA

LA TERNA RAPPRESENTA UNA TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE $\underline{\underline{J}}_o$ CHE LA RENDE DIAGONALE.
È QUINDI PASSAGGIO CHE AVVIENE TRAMITE MATRICE DI PASSAGGIO O TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE DEGLI ASSI ORIGINALI (RISPETTO AI QUALI LA MATRICE DI INERZIA AVEVA I PRODOTTI DI INERZIA NON NULLI) AD UN NUOVO SISTEMA DI RIFERIMENTO INDIVIDUATO NELLO SPAZIO DALLE DIREZIONI DEGLI AUTOVETTORI NEL QUALE LA MATRICE È DIAGONALE.
QUINDI LE COMPONENTI, RISPETTO ALLA TERNA FISSA PRESCELTA, DEI 3 VERSORI DELLA TERNA CENTRALE SONO LE COMPONENTI DEI 3 AUTOVETTORI $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3$ DI $\underline{\underline{J}}_o$.

OSSIA:

$$\underline{z} = \left\{ \underline{z}^{(1)} \;\vdots\; \underline{z}^{(2)} \;\vdots\; \underline{z}^{(3)} \right\}$$

QUINDI SE SCELGO TERNA SOLIDALE LA MATRICE DI INERZIA NON È PIÙ TEMPO DIPENDENTE.

AUTOVETTORI DELLA MATRICE J_o

QUINDI LE COMPONENTI DEI 3 AUTOVETTORI $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \underline{z}_3$ SONO LE SOLUZIONI DEI SISTEMI OMOGENEI:

$$\boxed{\underline{\underline{J}}_o \underline{z}_k = \lambda_k \underline{z}_k} \quad \text{CON } k = 1, 2, 3$$

$$\rightarrow \underline{z}^T \underline{\underline{J}}_o \underline{z} = \text{DIAGONALE} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

LO SCALARE λ_k, AUTOVALORE ASSOCIATO AL K-ESIMO AUTOVETTORE, RAPPRESENTA IL MOMENTO DI INERZIA CENTRALE O PRINCIPALE DEL CORPO RISPETTO AL K-ESIMO ASSE.
LA SIMMETRIA DI $\underline{\underline{J}}_o$ GARANTISCE CHE I SUOI AUTOVETTORI (3) RAPPRESENTINO UNA TERNA CARTESIANA.
QUESTI ASSI COINCIDONO CON GLI ASSI PRINCIPALI DELL'ELLISSOIDE DI INERZIA.

LE COMPONENTI DEL VETTORE $\underline{h}$, MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO, DIPENDONO ESCLUSIVAMENTE DALLE COMPONENTI OMOLOGHE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE ω_K.
INOLTRE SCEGLIENDO DI VINCOLARE AL CORPO QUESTI ASSI, OTTENGO UNA TERNA NON INERZIALE CHE SI MUOVE SOLIDALE AL CORPO MA ELIMINO COSÌ LA DIPENDENZA DAL TEMPO DELLA MATRICE DI INERZIA. QUINDI dh_K/dt DIPENDE DA $\dot{\omega}_K$

- SE IL POLO È G SI PARLA DI TERNA CENTRALE DI INERZIA

PER OGNI CORPO RIGIDO ESISTE UNA SOLA TERNA CENTRALE.

$$\underline{Z}^T \underline{\underline{J}}_G \underline{Z}$$

- SE IL POLO È GENERICO SI PARLA DI TERNE PRINCIPALI

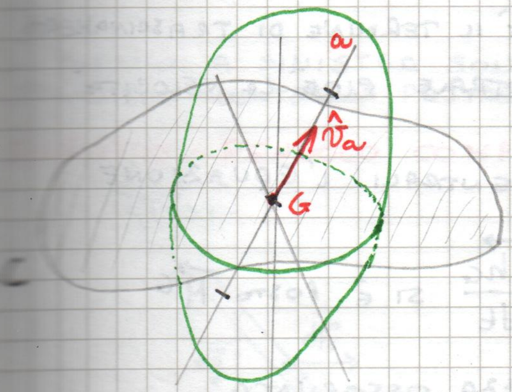
$$\underline{Z}^T \underline{\underline{J}}_O \underline{Z}$$

- λ_K SONO I MOMENTI DI INERZIA CENTRALI (O PRINCIPALI DA CUI λ_K^O)

CONTINUO CON LEZIONE LEMMA SU ELLISSOIDE

SI È DIMOSTRATA L'ESISTENZA DI DIREZIONI/ASSI PRINCIPALI O CENTRALI DI INERZIA AVENDO SCELTO COME POLO 'O' O IL CM.
PER TROVARE QUESTI ASSI SI È DIAGONALIZZATA LA MATRICE DI INERZIA TROVANDONE GLI AUTOVETTORI (LA NUOVA BASE) A CUI CORRISPONDONO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE (APPUNTO GLI ASSI O DIREZIONI).

ESISTE ALTRA VISIONE PER LA DEFINIZIONE DI MATRICE DI INERZIA EQUIVALENTE.
GLI ASSI O DIREZIONI PRINCIPALI/CENTRALI SONO ESTRATTI COME GLI ASSI DI UN ELLISSOIDE.
IPOTIZZO DI AVERE UN CORPO C CON DATO CM. TRACCIO LE RETTE CHE COSTITUISCONO UNA STELLA DI RETTE PASSANTI PER CM. OGNI RETTA HA VERSORE CHE DEFINISCE LA GIACITURA.
SI PUÒ CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA PER QUALUNQUE DI QUESTI ASSI.



$$J^a = \iiint_V \rho \, |\hat{N} \times \vec{r}_G| \, dV$$

IMMAGINO ORA DI STACCARE DUE SEGMENTI DALLE DUE SEMIRETTE CHE PARTONO DA G.

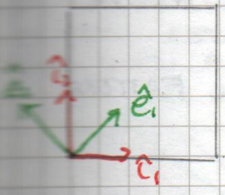
QUESTI SEGMENTI HANNO LUNGHEZZA PARI A $\frac{1}{\sqrt{J^a}}$ PIÙ LUNGO È IL SEGMENTO, MINORE È IL MOMENTO DI INERZIA.

IMMAGINANDO DI RIPETERE QUESTO PROCEDIMENTO PER TUTTE LE RETTE DEFINITE DALLA STELLA SI SCOPRE CHE I PUNTI DEFINITI DAI SEGMENTI GENERANO UN ELLISSOIDE QUALUNQUE SIA LA FORMA DEL CORPO.
L'ELLISSOIDE AVRÀ COME ASSI PRINCIPALI CHE HANNO LUNGHEZZA PARI A $\frac{1}{\sqrt{J^a}}$

LA DIMOSTRAZIONE SULLE APPENDICI È LUNGA MA ALLA FINE PORTA SEMPRE AL CALCOLO DI UNA DIAGONALIZZAZIONE.

DAL PUNTO DI VISTA PRATICO ESISTONO CRITERI FONDAMENTALI CHE CI PORTANO A CAPIRE QUALI SONO GLI ASSI CENTRALI.

ES. LAMINA QUADRATA: SI È SCOPERTO CHE GLI ASSI PRINCIPALI DELLA LAMINA SONO RUOTATI A 45°.



SCEGLIENDO OPPORTUNAMENTE L'SDR POSSIAMO INDIVIDUARE FACILMENTE GLI ASSI PRINCIPALI/CENTRALI

MA SE NON HO MATRICE DIAGONALE?

EQUAZIONI DI EULERO

SI RISCRIVE L'EQ. DI CONS. DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO IN UNA ALTRA FORMA PIÙ UTILE NEL MOMENTO IN CUI SI HANNO PROBLEMI MOLTO COMPLESSI SE APPROCCIATI CON ALTRI METODI.

SI PARTE DA:

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \vec{M}^G$$

MA SI USA UNA TERNA CENTRALE IN MODO TALE CHE IL TERMINE FUORI DIAGONALE È NULLO.

$$\vec{h}_G = \sum_K (\vec{h}_{GK} \cdot \hat{e}_K)\hat{e}_K$$

$$\vec{M}^G = \sum_K (\vec{M}^G_K \cdot \hat{e}_K)\hat{e}_K \leftarrow \text{QUI CI SONO TUTTI I MOMENTI}$$

ADESSO DEVO DERIVARE $\vec{h}_G$:

$$\frac{d\vec{h}_G(t)}{dt} = \sum_K \left(\frac{d\vec{h}_G(t)}{dt} \cdot \hat{e}_K(t) + \vec{h}_G(t) \cdot \frac{d\hat{e}_K(t)}{dt} \right)$$

LA TERNA SOLIDALE AL CORPO È QUINDI TERNA MOBILE

$$'' = \sum_K \dot{\vec{h}}_{GK} \hat{e}_K(t) + \sum_K h_{GK} \frac{d\hat{e}_K}{dt} = \boxed{\underbrace{\frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t}}_{\text{DERIVATA RELATIVA}} + \vec{\omega} \times \vec{h}_G = \frac{d\vec{h}_G}{dt}}$$

LA DIFFERENZA TRA LA DERIVATA DI $\vec{h}_G$ E $\frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t}$ È IL TERMINE DI TRASCINAMENTO $\vec{\omega}$ È LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO DEL SISTEMA CENTRALE CIOÈ LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL CORPO.

STUDIANDO QUINDI IL FENOMENO TRAMITE GLI ASSI CENTRALI L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\boxed{\frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t} = \vec{M}^G - \vec{\omega} \times \vec{h}_G}$$

IN CUI AL POSTO DI $\frac{d\vec{h}_G}{dt}$ SI È POSTO $\vec{M}^G$

IO, SOLIDALE, VEDO QUESTA VARIAZIONE DELLA GRANDEZZA OSSERVATA.

IN TEORIA A QUESTO PUNTO, COME FATTO PER LA RELATIVITÀ, SI DOVREBBE PARLARE DI MOMENTI APPARENTI MA NON SI FA COSÌ.

SI PRENDE $\underline{h}_G$ DEL SDR SOLIDALE:

$\underline{h}_G = \underline{\underline{J}}_G \, \underline{\omega}$ → MA CI SIAMO POSTI SUGLI ASSI CENTRALI QUINDI $\underline{\underline{J}}_G$ È DIAGONALE, HO QUINDI I MOMENTI DI INERZIA (DEFINITI CENTRALI).

↓

$$\underline{h}_G = \begin{Bmatrix} J_{11}\,\omega_1 \\ J_{22}\,\omega_2 \\ J_{33}\,\omega_3 \end{Bmatrix}$$

QUINDI $\underline{h}_G$ DIPENDE DALLE COMPONENTI OMOLOGHE A $\underline{\omega}$

SI ERA VISTO LO STESSO PER UN CORPO QUALSIASI QUANDO SI ~~...~~ AVEVA DETTO:

$$\underline{q} = m\,\underline{v}^G = m \begin{Bmatrix} v_1^G \\ v_2^G \\ v_3^G \end{Bmatrix}$$

DOVE PERÒ IL COEFFICIENTE, ANZI IL FATTORE DI SCALA È m

OVVIAMENTE SE $\underline{\underline{J}}_G$ NON È DIAGONALE, COMPAIONO TUTTI I TERMINI LEGATI A $\underline{\omega}$.

DIAGONALIZZANDO SCOPRIAMO CHE TRAMITE GLI ASSI CENTRALI SI PUÒ AVERE UNA RELAZIONE PIÙ SEMPLICE.

SE PARLIAMO DI TRASLAZIONE QUINDI DI $\underline{q}$, LA DISTRIBUZIONE DELLA MATERIA NON INFLUISCE, INFATTI IL FATTORE DI PROPORZIONALITÀ È m MENTRE NEL CASO DI ROTAZIONE CI POSSONO ESSERE ASSI LUNGO IL QUALE LA ROTAZIONE È PIÙ FATICOSA.
DISACCOPPIANDO LE GRANDEZZE $\underline{q}$ E $\underline{h_G}$ È PIÙ COMODO STUDIARLE.

ANALIZZO ORA $\underline{\vec{\omega} \times \vec{h_G}}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{h_G} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ J_{11}\omega_1 & J_{22}\omega_2 & J_{33}\omega_3 \end{vmatrix} = \hat{e}_1 (J_{33} - J_{22}) \omega_2 \omega_3 + \hat{e}_2 (J_{11} - J_{33}) \omega_1 \omega_3 + \hat{e}_3 (J_{22} - J_{11}) \omega_2 \omega_1$$

MENTRE NEL CASO DELLA DERIVATA RELATIVA:

$$\frac{\delta \vec{h_G}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \underbrace{\sum_K J_{KK} \omega_K}_{\dot{h}_{GK}} \hat{e}_K$$

← NEL SDR MOBILE GLI E_K NON VARIANO NEL TEMPO

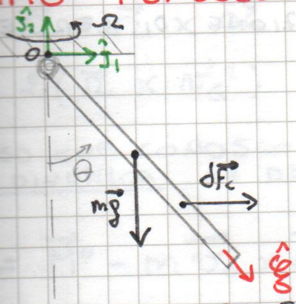
QUINDI A QUESTO PUNTO PROIETTANDO SUGLI ASSI:

$$\begin{cases} J_{11} \dot{\omega}_1 + (J_{33} - J_{22}) \omega_2 \omega_3 = M_1^G \\ J_{22} \dot{\omega}_2 + (J_{11} - J_{33}) \omega_1 \omega_3 = M_2^G \\ J_{33} \dot{\omega}_3 + (J_{22} - J_{11}) \omega_1 \omega_2 = M_3^G \end{cases} = \frac{d\vec{h_G}}{dt}$$

EQUAZIONI DI EULERO PER LA DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO

I TERMINI A SINISTRA SONO: ω VELOCITÀ ANGOLARI DEL CORPO E MOMENTI PRINCIPALI MENTRE A DESTRA HO I MOMENTI DI TUTTE LE FORZE ATTIVE O VINCOLARI

ESEMPIO - PENDOLO COMPOSTO SVOLTO CON EULERO



QUANDO SI AVEVA SVOLTO L'ESERCIZIO SI ERA USATA LA RELATIVITÀ GALILEIANA.
POSTO UN SDR SOLIDALE, SI AVEVA CHE

① $\vec{\omega}^R = \dot{\theta} \hat{J}_3$

SI AVEVA POI $J_{33} = \int_0^L \hat{\hat{\rho}} \xi^2 d\xi = m \frac{L^2}{3}$ ②

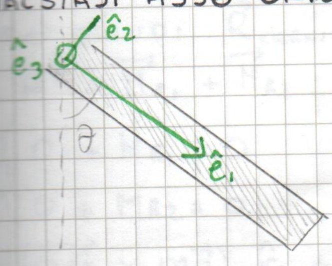
MENTRE I MOMENTI DELLE FORZE:

③ $\vec{m}_P^O = - mg \frac{L}{2} \sin\theta \hat{J}_3$

④ $\vec{m}_{C\,ENTR}^O = \int_0^L \xi (\sin\theta J_1 - \cos\theta J_2) \times \hat{\rho} \Omega^2 \xi \sin\theta \hat{J}_1] d\xi$ DOVE $d\vec{f}_{CEN} = \hat{\rho} d\xi \Omega^2 \xi \sin\theta \hat{J}_1$ SI ERA INTEGRATA TRA O E L

$= \hat{\rho} \Omega^2 \frac{L^3}{3} \cos\theta \sin\theta \hat{J}_3$ MOMENTO RISULTANTE PER LA F. CENTRIFUGA

PROVIAMO A RISOLVERE LO STESSO PROBLEMA TRAMITE EQUAZIONI DI EULERO, AVENDO SCELTO COME POLO IL PUNTO DI CERNIERA.
I MOMENTI DI INERZIA NON SARANNO QUELLI PRINCIPALI MA CENTRALI.
L'OGGETTO HA QUALCHE SIMMETRIA? È MONODIMENSIONALE E HA UNA DISTRIBUZIONE DI MASSA LUNGO L'ASTA. QUINDI SICURAMENTE GLI ASSI CENTRALI PARTIRANNO DA QUESTA ASTA. ANCHE SE AVESSIMO SBARRA CON SPESSORE, SAREBBE UGUALE. QUALSIASI ASSE ORTOGONALE AD $\hat{e}_1$ È ASSE CENTRALE. $\hat{e}_3$ COINCIDE CON $\hat{J}_3$ DI PRIMA.



SI CALCOLA J_{11}, J_{22}, J_{33}.

$J_{11} = 0$ POICHÈ PRESO QUALUNQUE PUNTO LA DISTANZA RISPETTO AD $\hat{e}_1$ È 0 (SBARRA MONODIMENSIONALE)

$$J_{22} = \int_0^L \hat{\rho}\, \xi_1^2 \, d\xi = \hat{\rho}\frac{L^3}{3} = m\frac{L^2}{3} = J_{33}$$

ADESSO CALCOLO I MOMENTI DELLE FORZE ESTERNE E REAZIONI VINCOLARI:

QUINDI CERCO $\vec{M}^o = \vec{M}^o_e + \vec{M}^o_v$

DOVE $\vec{F}^e = m\vec{g}$ (GIÀ CALCOLATO PRIMA)

$\vec{M}^o_{peso} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta\, \hat{e}_3$

QUINDI $\vec{M}^o = -mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{e}_3 + \vec{M}^o_v$ ← LASCIAMO COSÌ IL VETTORE DELLE F. VINCOLARI. NON LE CONOSCO PER ORA.

PRIMA SI AVEVA DETTO CHE Ω ERA LA V. ANGOLARE DI TRASCINAMENTO
LA ω CHE CERCO ORA NON È LA Ω DI TRASCINAMENTO MA LA VELOCITÀ ANGOLARE EFFETTIVA DEL CORPO, CIOÈ:

$$\boxed{\vec{\omega} = -\Omega\cos\theta\,\hat{e}_1 + \Omega\sin\theta\,\hat{e}_2 + \dot{\theta}\,\hat{e}_3}$$

È COMPOSIZIONE DELLA ROTAZIONE DEL FOGLIO + OSCILLAZIONE DEL PENDOLO

CONTIENE L'INTERA TRIDIMENSIONALITÀ DEL FENOMENO

SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI EULERO (PRIMA DERIVO $\vec{\omega}$):

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\theta}\Omega(\sin\theta\,\hat{e}_1 + \cos\theta\,\hat{e}_2) + \ddot{\theta}\,\hat{e}_3$$

QUINDI:

$$\begin{cases} 0 = (\vec{M}^o_v \cdot \hat{e}_1) \\ m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}\Omega\cos\theta + m\frac{L^2}{3}\Omega\dot{\theta}\cos\theta = (\vec{M}^o_v\cdot\hat{e}_2) \\ m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} - m\frac{L^2}{3}\sin\theta\cos\theta = -mg\frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$$

→ NON HO REAZ. VINCOLARI QUI LUNGO $\hat{e}_3$ PER DEFINIZIONE DI CERNIERA

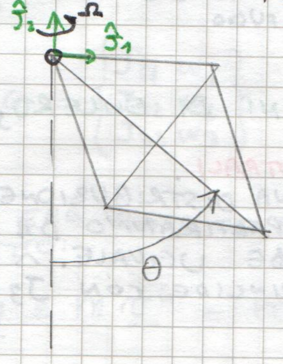
$$\begin{cases} 0 = (\vec{M}^o_v \cdot \hat{e}_1) \\ m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}\Omega\cos\theta = (\vec{M}^o_v\cdot\hat{e}_2) \\ m\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + m\frac{L^2}{3}\Omega^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

ERA LA $\dot{\theta}\hat{j}_3$

CORRISPONDE A RISULTANTE F. CENTRIFUGA

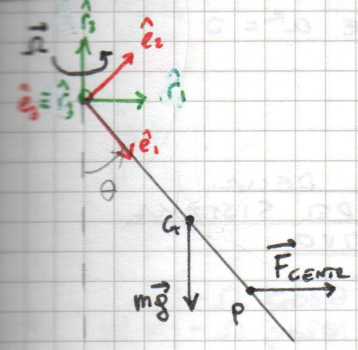
NON HO CALCOLATO PERÒ GRANDEZZE RELATIVE. NON HO EFFETTUATO SVOLGIMENTI TRAMITE MECCANICA RELATIVA. È TUTTO GIÀ INSERITO ALL'INTERNO DELLE EQUAZIONI DI EULERO.

LE EQUAZIONI DI EULERO, SE SI RIESCONO A DETERMINARE GLI ASSI CENTRALI, SONO COMODE. NON SEMPRE PERÒ È COSÌ.



PENDOLO COMPOSTO MA A FORMA DI ROMBO RUOTA A Ω INTORNO $\hat{j}_2$.
DETERMINARE LE POSIZIONI DI EQUILIBRIO UTILIZZANDO ASSI COME DEFINITI COME IN FIGURA O ALTRI ASSI (OVVIAMENTE QUELLI CENTRALI), MA VANNO SCELTI.

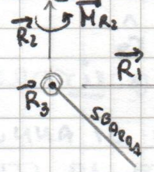
LEZ. BORGHI 29 MAGGIO



SI FA DIFFERENZA TRA I METODI DA USARE APPROCCIO CLASSICO O APPROCCIO EULERIANO.

SI HA SBARRA OMOGENEA, INCERNIERATA SU ASSE DI ROTAZIONE.

DAL PUNTO DI VISTA 3D LA CERNIERA È UN OGGETTO CHE ELIMINA 5 GDL.



QUINDI PERMETTE LA ROTAZIONE SOLO SUL PIANO $\hat R_1 \hat R_2$
GENERA 3 REAZIONI VINCOLARI $\vec R_1$, $\vec R_2$, $\vec R_3$ E 2 MOMENTI DI REAZIONE $\vec M_{R_1}$ E $\vec M_{R_2}$

TRAMITE EQUIVALENZA TROVO PUNTO P e G DOVE APPLICARE LE F. ATTIVA $m\vec g$ E APPARENTE F. CENTR.

INIZIAMO CON L'APPROCCIO CLASSICO: PONGO SDR SOLIDALE VERDE, HO $\vec\Omega$ DI TRASC., HO 1 GDL CHE È θ. IN QUESTO SDR HA SENSO PARLARE DI EQUILIBRIO PONENDOCI NEL SDR SOLIDALE AVREI 3 GDL (ROTAZIONE E 2 TRASLAZIONE) MA NEL MOMENTO IN CUI INSERISCO CERNIERA RIMANE 1 GDL.

SI AVRÀ QUINDI CHE:

$$\vec F^e = \frac{d q_{CM}}{dt} \underset{m=cost}{\overset{(HP)}{\Longrightarrow}} m\vec a_G^A \quad \text{VALIDA IN GENERALE}$$

DIFFERENZA TRA APPROCCIO NORMALE E APPROCCIO EULERIANO

QUINDI $\vec a_G^A = \vec a_G^R + \vec a_G^{TR} + \vec a_G^C$

ISOLIAMO IL TERMINE RELATIVO, QUINDI: $\vec F^e - m\vec a_G^{TR} - m\vec a_G^C = m\vec a_G^R$

SPECIALIZZANDOCI AL PROBLEMA:

$\vec a^R = \ddot s\,\hat t + \frac{\dot s^2}{R}\hat n$

$\vec a^{TR} = \vec\Omega \times \vec\Omega \times \vec y$ $\qquad \vec\Omega$ È VELOCITÀ DEL PIANO

$\vec\Omega \times \vec\Omega \times \vec{OG}$ $\quad \rightarrow$ G È IL P.TO DI APPLICAZIONE

$\vec a^C = 2(\vec\Omega \times \vec v_G^R)$

ADESSO CHE CONOSCO LE FORZE ATTIVE E APPARENTI, PER OTTENERE LA EQUAZIONE DELLA DINAMICA NE DEVO CALCOLARE I MOMENTI.

$$\frac{d\vec h_0}{dt} = \vec M^0 - m\vec v_0 \times \vec v_G \quad \text{DOVE HO SIA F. ATTIVE CHE APPARENTI}$$

$\vec v_0 = 0$

$$\boxed{\vec{OG} \times m\vec g + \vec{OP} \times \vec F_\Omega + \vec M^R + \vec{OQ} \times \vec F_{COR} = \vec{\vec J}^0 \cdot \dot{\vec\omega}^R}$$

$\vec \rho_0 = 0 \Rightarrow \vec r_{OG} \times M\vec v_0$
PER LA SCELTA DI O HO $\vec v_0 = 0$

HO QUINDI TROVATO L'EQ. DELLA DINAMICA
HO FATTO FINTA DI CONOSCERE IL P.TO Q DI APPL. DI CORIOLIS.
SE STUDIASSIMO IL CASO DELL'EQUILIBRIO, QUINDI SUI TRE ASSI.

ANCHE F. CORIOLIS È F. DISTRIBUITA. DOVREI TROVARNE IL PUNTO DI APPLICAZIONE PER AVERE UN'EQUIVALENZA. IN QUESTO CASO È UN CAMPO DI ACCEL. ORTOG. AL PIANO DELLA SBARRA

$$\vec{OG} \times m\vec g + \vec{OP} \times \vec F_{\Omega\,CENTR} + \vec M^R = 0$$

CORIOLIS NON C'È POICHÉ $v^R = 0$

POICHÉ L'EQUAZIONE SCALARE CHE CI INTERESSA È PROPRIO QUELLA SU $\hat r_3 \rightarrow$ QUINDI MOMENTO DI REAZIONE NULLO. $\rightarrow$ CERNIERA IDEALE

AVRÒ QUINDI $\vec R_{CERNIERA} = \vec R_1 + \vec R_2 + \vec R_3$

E $\vec M^R = \vec M_{R_1} + \vec M_{R_2}$, QUINDI PROIETTANDO

$$\begin{cases} \hat r_1) \; 0 + M_{R_1} = 0 \\ \hat r_2) \; 0 + M_{R_2} = 0 \\ \hat r_3) \; (\vec{OG} \times m\vec g)\cdot \hat r_3 + (\vec{OP} \times \vec F_{CENTR})\cdot \hat r_3 = 0 \end{cases}$$

CASO DI EQUILIBRIO

DOVE QUINDI PER TROVARE CASO DI EQUILIBRIO SI È POSTO v^R E $a^R = 0$

VEDENDO INVECE IL CASO GENERICO (NON DI EQUILIBRIO):

$$
\begin{cases}
\hat{r}_1) \; (\vec{OQ} \times \vec{F}_{cor}) \cdot \hat{r}_1 + M_{R_1} = (\vec{\vec{J}}^o \dot{\vec{\omega}}^R) \cdot \hat{r}_1 \\
\hat{r}_2) \; (\vec{OQ} \times \vec{F}_{cor}) \cdot \hat{r}_2 + M_{R_2} = (\vec{\vec{J}}^o \dot{\vec{\omega}}^R) \cdot \hat{r}_2 \\
\hat{r}_3) \; (\vec{OG} \times m\vec{g}) \cdot \hat{r}_3 + (\vec{OP} \times \vec{F}_{\Omega}) \cdot \hat{r}_3 = (\vec{\vec{J}}^o \dot{\vec{\omega}}^r) \cdot \hat{r}_3
\end{cases}
$$

EQUAZIONE DELLA DINAMICA DEL SISTEMA RELATIVO

C'È PURE QUI CORIOLIS O NO?

DOVE QUINDI I MOMENTI LUNGO $\hat{r}_1$ E $\hat{r}_2$ NON SI ANNULLANO AUTOMATICAMENTE.

POTREI USARE QUESTA EQUAZIONE PER STUDIARE UN PUNTO DI EQUILIBRIO, QUINDI POTREI LINEARIZZARE INTORNO ALLA POSIZIONE TROVATA PRIMA ALL'EQUILIBRIO E TROVARE UN'EQUAZIONE DEL GENERE.

$$\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

APPROCCIO EULERIANO

È RISCRITTURA DELLA 2° EQ. CARDINALE. NEI PROBLEMI TRIDIMENSIONALI LA MATRICE DI INERZIA VARIA DI ISTANTE IN ISTANTE.

$$\vec{h}_o = \vec{h}_o' + \vec{g}_o = \vec{\vec{J}}^o \vec{\omega} + \vec{g}_o$$

CHE INFATTI SE DERIVATA $\to \frac{d\vec{h}_o}{dt}$ PORTERÀ AD AVERE UNA DERIVATA ANCHE APPLICATA ALLA MATRICE (LA MASSA PUÒ ESSERE COSTANTE, MA NON LA SUA DISTRIBUZIONE).

AFFRONTATA COSÌ NON VA BENE

MI METTO QUINDI A CAVALLO DELL'OGGETTO DA STUDIARE.
DOVRÒ PERÒ APPLICARE UNA DERIVATA NEL SDR RELATIVO, INFATTI:

$$\left.\frac{d[\;]}{dt}\right|_{SI} = \left.\frac{\delta[\;]}{\delta t}\right|_{SN} + \vec{\omega} \times [\;]$$

EULERO LO POSSO USARE ANCHE CON POLO DIVERSO AL CM PURCHÉ SIA FISSO (COSÌ STA SCRITTO SULLA TEORIA). POSSO CALCOLARE EVENTUALMENTE I MOMENTI DI INERZIA TRAMITE G E POI USO HUYGENS-STEINER

DA DOVE NASCE QUESTA DIFF? POICHÈ:

$$\vec{h}_o = h_1^o(t)\hat{i}_1 + \dots$$

MENTRE

$$\vec{h}_o = h_{o_1}'(t)\hat{e}_1(t) + \dots$$

IL VETTORE È SEMPRE TEMPO INVARIANTE MA UNA COSA È ESPRIMERLO CON IL SDR ASSOLUTO (SOLO LE COMPONENTI VARIANTI) E UNA CON SDR RELATIVO PER CUI VARIANO LE COMPONENTI E VERSORI

A QUESTO PUNTO DEVO SCEGLIERE GLI ASSI COME CENTRALI $\to$ DA CUI HO MATRICE DI INERZIA DIAGONALE.

SIGNIFICA CHE STO LAVORANDO SUL PRIMO MEMBRO $\left(\frac{d\vec{h}^o}{dt}\right)$ LASCIANDO INALTERATO IL SECONDO MEMBRO OSSIA $(\vec{M}^o)$. NON HO NEANCHE IL TERMINE $-m\vec{v}^o \times \vec{v}_G$ POICHÈ O È FISSO.

? CHE CENTRA: STO USANDO EULERO

$$
\begin{cases}
J_{11}^o \dot{\omega}_1 + (J_{33}^o - J_{22}^o)\omega_3\omega_2 = M_1^o \\
J_{22}^o \dot{\omega}_2 + (J_{11}^o - J_{33}^o)\omega_1\omega_3 = M_2^o \\
J_{33}^o \dot{\omega}_3 + (J_{22}^o - J_{11}^o)\omega_2\omega_1 = M_3^o
\end{cases}
$$

MOMENTI DI REAZIONE

LA DERIVATA DI SOPRA FARÀ APPARIRE TUTTO L'INSIEME DI TERMINI APPARENTI CHE IO NON CONSIDERO CON EULERO

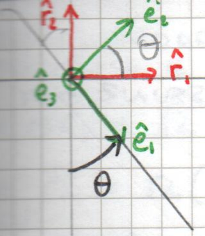
MA LA ω CHE CONSIDERO $\neq \Omega$ DI TRASCINAMENTO.

È SBAGLIATO QUESTO PROCEDIMENTO POICHÈ NON SI DEVE PIÙ PARLARE DI RELATIVO E DI TRASCINAMENTO

ω È LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL SISTEMA NON INERZIALE, VALE QUINDI:

$$\vec{\omega}^A = \vec{\omega}^R + \vec{\omega}^{TR} = \dot{\theta}\hat{e}_3 + \vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3 + (\vec{\Omega}\cdot\hat{e}_1)\hat{e}_1 + (\vec{\Omega}\cdot\hat{e}_2)\hat{e}_2$$

HO TROVATO LE 3 COMPONENTI [illegible] RISPETTO AL SDR SOLIDALE AL



CORPO RIGIDO. È LA VELOCITÀ ANGOLARE DEL CORPO.

> NON È VELOCITÀ ANGOLARE VISTA DAL SDR RELATIVO MA È LA VELOCITÀ DEL CORPO ESPRESSA CON IL SISTEMA DI RIFERIMENTO COMPOSTO DAGLI ASSI CENTRALI.

IMPORTANTE

QUINDI $\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} -\Omega\cos\theta \\ -\Omega\sin\theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$ E $\underline{\dot{\omega}} = \begin{Bmatrix} \Omega\dot{\theta}\sin\theta \\ -\Omega\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$

SE DOVESSI CALCOLARE PUNTI DI EQUILIBRIO → AVREI $\boxed{\dot{\theta}=0 \text{ E } \ddot{\theta}=0}$
OSSIA NON AVREI ACCEL. ANGOLARE.
QUINDI LE EQUAZIONI DIVENTANO:

LUNGO $\hat{e}_1$ NON SI GENERA ALCUN MOMENTO DI REAZIONE, LO STESSO PER $\hat{e}_2$;
LUNGO $\hat{e}_3$ ALLA FINE MI RIMANE CHE:

$$\underbrace{(J_{22}-J_{11})\omega_2\omega_1} = \underbrace{M_3^o}_{\text{C'È LA F. PESO}}$$

È TERMINE CHE RAPPRESENTA LA FORZA CENTRIFUGA MA IO NON L'HO INSERITO! È VENUTO FUORI DA SÈ. QUINDI LA F. PESO (MOMENTO DELLA F. PESO) È BILANCIATO DA QUELLO DELLA F. CENTRIFUGA.

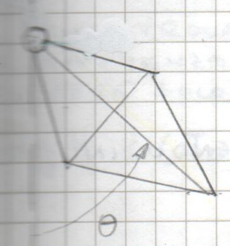
NEL CASO DELL'EQ. DINAMICA GENERICA:

$$\begin{cases} J_{11}^o\dot{\omega}_1 + \dots = M_1^o & \leftarrow \text{NASCE UNA COPPIA LUNGO } \hat{e}_1 \\ \dots\dots = M_2^o & \leftarrow \text{UGUALE AL CASO DI } \hat{e}_1 \\ \dots\dots = M_3^o \end{cases}$$

HO QUINDI REAZIONI (MOMENTI DI REAZIONI) NEL MOMENTO IN CUI APPLICO DEI MOMENTI

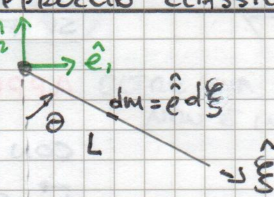
IMPORTANTE
QUANDO USO EULERO NEL CALCOLO DEI MOMENTI DELLE FORZE NON HO LE FORZE APPARENTI, SONO GIÀ CONSIDERATE SVOLGENDO I CALCOLI.
NELL'APPROCCIO NORMALE SI.

PENDOLO COMPOSTO - ROMBO



SI HA PENDOLO COMPOSTO A FORMA DI ROMBO, HA 1 SOLO GDL POICHÉ LA CERNIERA INIBISCE 5 GDL. HA $\Omega = \text{COST}$ INTORNO L'ASSE DI ROTAZIONE.
SI PONE IL SDR SOLIDALE SULLA CERNIERA
SI SCRIVE EQUAZIONE DELLA DINAMICA PER TROVARE ANCHE FORZE APPARENTI (CENTRIFUGA E CORIOLIS)
CON LA SBARRA ANDAVA POI INTEGRATO IL TUTTO
TUTTO CIÒ TRAMITE L'APPROCCIO CLASSICO O NORMALE

CASO SBARRA

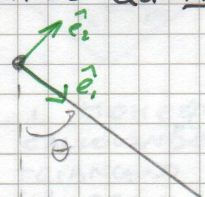


TUTTE LE GRANDEZZE ANDAVANO INTEGRATE:

$$\int_0^L \dots d\xi$$

POI SI ERA PASSATI AL CASO L'APPROCCIO EULERIANO CONSIDERANDO GLI ASSI CENTRALI

$$\left.\begin{aligned} J_{11}\dot{\omega}_1 + (J_{33}-J_{22})\omega_2\omega_3 &= M_1^o \\ J_{22}\dot{\omega}_2 + (J_{11}-J_{33})\omega_1\omega_3 &= M_2^o \\ J_{33}\dot{\omega}_3 + (J_{22}-J_{11})\omega_2\omega_3 &= M_3^o \end{aligned}\right\} \text{MOMENTI FORZE ATTIVE E VINCOLARI}$$



$\underline{\omega}$ È VELOCITÀ ANGOLARE DEL CORPO

LA ω CONTIENE SIA QUELLA DI TRASCINAMENTO CHE RELATIVA.

NON VANNO INSERITE LE FORZE APPARENTI, NON VANNO FATTE ASSUNZIONI SU VELOCITÀ RELATIVE O DI TRASCINAMENTO.

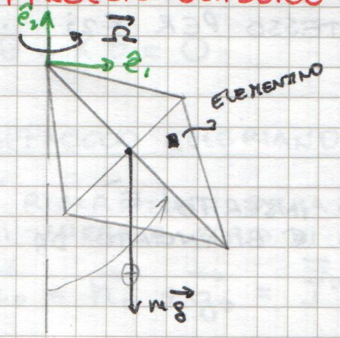
PER ARRIVARE ALLE EQ. DI EULERO SI È PARTITI DA:

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{h}_G$$

OSSERVATA DAL SDR CENTRALE O PRINCIPALE

TERMINE DI TRASCINAMENTO RISPETTO V. ANGOLARE DEL CORPO

APPROCCIO CLASSICO



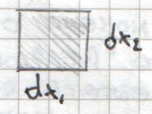
CI BASTA SOLO LA 3° PROIEZIONE, CIOÈ LUNGO $\hat{e}_3$ (SI SONO SALTATI DEI PASSAGGI):

$$J_{33}\ddot{\theta} = (M^{o}_{PESO} \cdot \hat{e}_3) + (M^{o}_{CENTR} \cdot \hat{e}_3)$$

DOVRÒ INTEGRARE LA FORZA CENTRIFUGA INFINITESIMA APPLICATA AD UN ELEMENTINO:

$$df_{CENTR} = dm\, \vec{\Omega}\, x_1 \hat{e}_1$$

x_1 È COMP. LUNGO $\hat{e}_1$



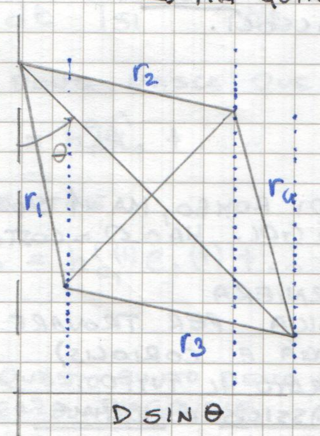
$$dm = \hat{\rho}\, dx_1 dx_2 = \underbrace{\rho\, d\ell}_{\hat{\rho}}\, dx_1 dx_2$$

ALTEZZA

COORDINATE ASSOCIATE AGLI ASSI $\hat{e}_1$ ED $\hat{e}_2$

$$\vec{f}_{CENTR} = \iint_S \hat{\rho}\, \Omega^2 x_1 \hat{e}_1\, dx_1 dx_2$$

↳ MA QUALI ESTREMI CI METTO? SE USO GLI ASSI CON COORDINATE

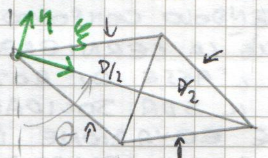


DOVREI SUDDIVIDERE IL DOMINIO IN PIÙ PARTI

DOVREMMO TROVARE LE EQUAZIONI DELLE RETTE BLU

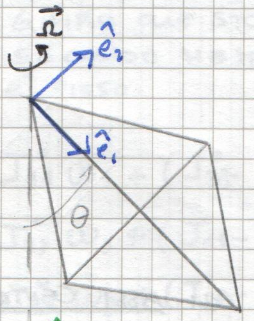
ESSENDO UN PROCEDIMENTO LUNGO, NON CONVIENE

SI SCELGONO QUINDI ASSI MIGLIORI:



BASTA INTEGRARE TRA 0 E ξ MA DIVIDENDO IN DUE PARTI TRA 0 E D/2 SI FA MA È PIÙ COMPLESSO

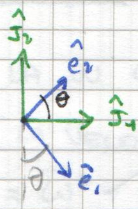
APPROCCIO EULERIANO



CON EULERO IN TEORIA NON DOVREI TROVARE LA $\vec{\omega}$ SOMMANDO QUELLA "RELATIVA" A QUELLA DI "TRASCINAMENTO"

PRIMA DI TUTTO SE MI PONGO SUGLI ASSI, NON VEDO ω^R.

SI USA ω^{TR} SOLO NELLA DEFINIZIONE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO:



$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \frac{\delta \vec{h}_G}{\delta t} + \vec{\omega}^{TR} \times \vec{h}_G$$

PER DEFINIZIONE DI ASSI PRINCIPALI NON AVREI ω^R

DEVO GUARDARE IL CORPO COME SE FOSSE UNICO E NON DOVREI SUDDIVIDERLO IN SOLIDALE E TRASCINAMENTO. HO ROTAZIONE + OSCILLAZIONE, QUINDI:

$$\vec{\omega} = \dot\theta\hat e_3 + \vec\Omega$$

DOVE $\vec\Omega = \Omega(\hat J_2\cdot\hat e_1) + \Omega(\hat J_2\cdot\hat e_2) = -\Omega\cos\theta\,\hat e_1 + \Omega\sin\theta\,\hat e_2$

DA CUI:

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} -\Omega\cos\theta \\ \Omega\sin\theta \\ \dot\theta \end{Bmatrix} \quad \text{E POI} \quad \underline{\dot\omega} = \begin{Bmatrix} +\Omega\dot\theta\sin\theta \\ \Omega\dot\theta\cos\theta \\ \ddot\theta \end{Bmatrix}$$

ADESSO STUDIO GLI EVENTUALI <u>PUNTI DI EQUILIBRIO</u> $\to \theta_E,\ \dot\theta = 0$ E $\ddot\theta = 0$

↳ È QUINDI LEGATO ALL'UNICO GDL DEL CORPO
È EQUILIBRIO RELATIVO ALLO SPAZIO IN MOTO.

QUINDI:

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} -\Omega\cos\theta \\ -\Omega\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{E} \quad \underline{\dot\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

QUINDI IL SISTEMA DELLE EQUAZIONI DI EULERO DIVENTA:

$$\begin{cases} 0 = M^o_1 \\ 0 = M^o_2 \\ 0 + (J_2 - J_1)\,\omega_2\omega_1 = M^o_3 \to -(J_2-J_1)\Omega^2\sin\theta\cos\theta = M^o_3 \,{}^{*} \end{cases}$$

$\sim$ MOMENTO DELLE F. ATTIVE E VINCOLARI (ABBIAMO SOLO F. PESO)

$\vec M_{peso} = \vec{OG}\times m\vec g \to$ DOVE $m\vec g = -mg\hat J_2 \Rightarrow$ DOVE $\hat J_2 = -\cos\theta\,\hat e_1 + \sin\theta\,\hat e_2$

$= -mg\cos\theta\,\hat e_1 - mg\sin\theta\,\hat e_2$

$\vec{OG} = \frac{D}{2}\hat e_1$ DA CUI $\vec M^o_{peso} = -mg\sin\theta\frac{D}{2}\hat e_3$ CHE QUINDI VA INSERITO IN *

PRENDENDO L'EQ. SCALARE DI EULERO:

$$-(J_2-J_1)\Omega^2\cos\theta\sin\theta = -mg\sin\theta\frac{D}{2} \to -(J_2-J_1)\Omega^2\cos\theta\sin\theta + mg\sin\theta\frac{D}{2} = 0$$

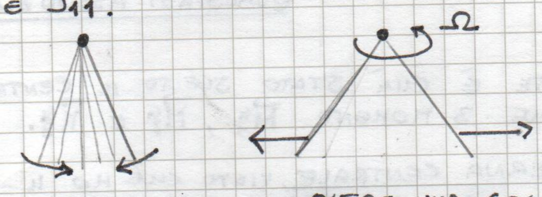
$$\sin\theta\left[mg\frac{D}{2} - (J_2-J_1)\Omega^2\cos\theta\right] = 0 \to \sin\theta = 0 \to \theta_{E_1} = 0 \quad \theta_{E_2} = \pi$$

MENTRE STUDIANDO LA PARENTESI:

$$\cos\theta = \frac{mg\frac{D}{2}}{(J_{22}-J_{11})\Omega^2}$$

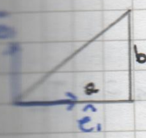
SI SONO TROVATI 2 PUNTI UGUALI AL CASO DELLA SBARRA MA ANCHE UN TERZO. LA DIFFERENZA STA NEL CALCOLO DI J_{22} E J_{11}. ESISTERÀ SOLO NEL MOMENTO IN CUI:

$$mg\frac{D}{2} \le (J_{22}-J_{11})\Omega^2$$

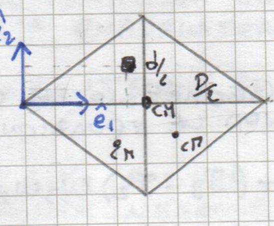


ENTRO UNA CERTA SOGLIA È IN EQUILIBRIO — OLTRE UNA SOGLIA NON È IN EQUILIBRIO

CALCOLO J_{11} E J_{22}:



$$J_{11} = \int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}x_1}\hat e\, x_2^2\, dx_2\, dx_1 = \frac13\int_0^a \hat e\frac{b^3}{a^3}x_1^3\, dx_1$$



$$= \frac{1}{12}\hat e\frac{b^3}{a^3}a^4 = \frac{1}{12}\hat e\, b^3 a = \boxed{\frac{1}{12}mb^2}$$

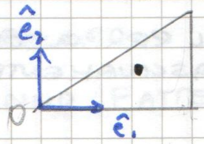
LA DIMENSIONE DEL MOMENTO DI INERZIA È SEMPRE $[M]\cdot[L^2]$

BASTA POI MOLTIPLICARE PER 4:

$$J_{11} = 4\left(\frac16 m\frac{d^2}{4}\right) = \frac16 md^2 = \frac{1}{24}Md^2 = J_{11}^{TOT}$$

$M = 4m$

I MOMENTI LI STO CALCOLANDO PER CIASCUN TRIANGOLO RISPETTO AL CM DEL TRIANGOLO E NON DEL ROMBO. QUINDI VA POI USATO HUYGENS.



$\boxed{J_{22}}$ => SARÀ FORMALMENTE IDENTICO MA CON D^2

$$J_{22} = \frac{1}{24} M D^2$$

USANDO HUYGENS: $\frac{\Delta^2}{4}$ DISTANZA TRA I DUE ASSI

$$J_{22}^{TOT} = \frac{1}{24} M D^2 + M \frac{D^2}{4}$$

PERCHÈ? L'HO CALCOLATO RISPETTO AL POLO O NON AL CM
SECONDO ME È SBAGLIATO POICHÈ VA CALCOLATO PRIMA NEL CM E POI TRASPORTATO

DA CUI:

$$\cos\theta = \frac{Mg\frac{D}{2}}{\frac{M}{24}\left(7D^2 - d^2\right)\Omega^2}$$

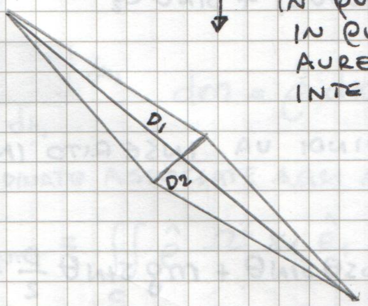
COSENO PUÒ ESSERE ANCHE NEGATIVO QUINDI CON $\theta_E > \frac{\pi}{2}$
IN REALTÀ SCRIVERE D E d È RELATIVO. UNA POTREBBE ESSERE PIÙ GRANDE E UNO PIÙ PICCOLO E VICEVERSA.

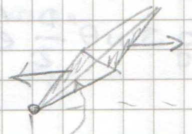
$$\downarrow$$

$$\cos\theta = \frac{Mg\frac{D_1}{2}}{\frac{M}{24}\left(7D_1 - D_2\right)\Omega^2}$$

$$\downarrow$$

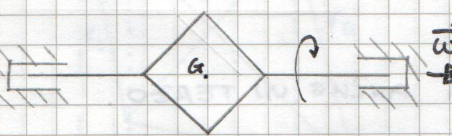
IN QUESTE CONDIZIONI POTREI AVERE PUNTO DI EQUILIBRIO A $\theta_E > \frac{\pi}{2}$ IN QUANTO PRENDENDO DUE PORZIONI DEL ROMBO SI AVREBBE UNA F. CENTRIFUGA OPPOSTA.
INTEGRANDO LE F. CENTRIFUGHE SI BILANCIANO.





SI VEDE UN PROBLEMA INVERSO: SI VUOLE CONOSCERE LO STATO DI SOLLECITAZIONE COMPATIBILE CON IL MOTO, CONOSCENDO IL MOTO. CAPITA SPESSO CHIEDERSI QUALI SONO LE SOLLECITAZIONI GUARDANDO UN CERTO MOTO. È MOLTO IMPORTANTE NELLA PROGETTAZIONE.

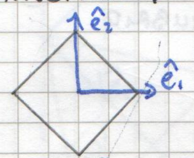
ESEMPIO LAMINA QUADRATA DI $\ell = a$



LUNGO UNA DIAGONALE CI SONO PERNI FISSATI TALI CHE LA LAMINA PUÒ SOLO RUOTARE INTORNO A QUELLA DIAGONALE.
DETERMINARE I MOMENTI RELATIVI AL PROBLEMA
QUALSIASI ASSUNZIONE È ERRORE

$\vec{\omega}$ = COSTANTE
IMPLICITAMENTE È GIÀ STATO SCELTO IL CENTRO DI MASSA G
AVRÒ IN GENERALE 3 MOMENTI $\vec{M}_1^G$, $\vec{M}_2^G$ E $\vec{M}_3^G$.

VA SCELTA LA TERNA CENTRALE, VISTO CHE HO IL CENTRO DI MASSA, ESSENDO OGGETTO SIMMETRICO.



AVRÒ CHE $\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ E $\underline{\dot{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ VISTA LA SCELTA DEGLI ASSI CENTRALI

DATA LA GEOMETRIA DEL QUADRATO AVRÒ CHE $J_{11} = J_{22}$ MENTRE $J_{33} = 2J_{11} = 2J_{22}$
RIPRENDENDO LE EQUAZIONI DI EULERO:

$$\begin{cases} J_{11}\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_3\omega_2 = M_1^G \\ J_{22}\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 = M_2^G \\ J_{33}\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_2\omega_1 = M_3^G \end{cases} \xrightarrow{\text{APPLICANDO CIÒ CHE SI È SCRITTO SOPRA}} \begin{cases} 0 = M_1^G \\ 0 = M_2^G \\ 0 = M_3^G \end{cases}$$

QUINDI SE ω = COST, ... È COMPATIBILE SOLO PER STATI DI

SOLLECITAZIONE NULLI. NON CI INTERESSA SAPERE SE C'È QUALCOSA CHE SI BILANCIANO MOMENTI BENSÌ IL FATTO CHE I MOMENTI RISULTANTI SONO NULLI.

COME PUÒ ESISTERE QUESTO MOTO A STATI DI SOLLECITAZIONE NULLI?

RISPETTO AL CASO REALE, LA DIFFERENZA È CHE NON C'È ALCUNA DISSIPAZIONE, ATTRITO, SE PERÒ ELIMINIAMO LE DISSIPAZIONI, QUESTO MODELLO È VALIDO NEL MOMENTO IN CUI SI DANNO CONDIZIONI INIZIALI DIVERSE DA 0.

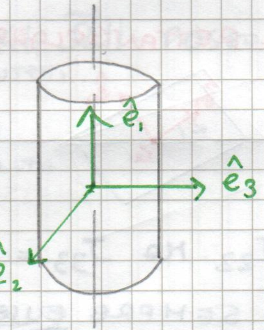
IN UNA CONFIGURAZIONE REALISTICA → HO ATTRITO DEI PERNI

CERNIERA IDEALE E CERNIERA REALE

NEL CASO IDEALE SI HA CHE: 1

$$\begin{cases} M_1^{G\,\text{vincolare}} = 0 \\ M_2^{G\,\text{vincolare}} \neq 0 \\ M_3^{G\,\text{vincolare}} \neq 0 \end{cases}$$

È IN GRADO DI ESERCITARE 2 MOMENTI DI REAZIONE $(\hat{e}_3, \hat{e}_2)$ E 3 DI REAZIONE A TRASLAZIONE $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$



RIDISEGNATA CON VERSORI COME NELL'ESERCIZIO

NEL CASO IN CUI HO IL CASO REALE: 2

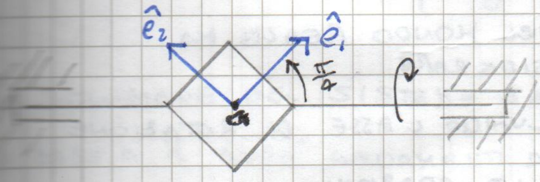
$$\begin{cases} M_1^{G\,A} = -\boxed{M_1^{G}}^{\text{ATTRITO}} \\ M_2^{G\,A} = -M_2^{G\,\text{VINCOLARE}} \\ M_3^{G\,A} = -M_3^{G\,\text{VINCOLARE}} \end{cases}$$

← NON HO PIÙ 0 MA HO UN MOMENTO DOVUTO ALL'ATTRITO

MOMENTI DELLE REAZ. VINCOLARI IN CUI VA CONSIDERATO ANCHE ATTRITO

FORZE ESTERNE → SE INFATTI SONO NULLE → NON CI SONO MOMENTI VINCOLARI/ATTRITO

RIPRENDENDO L'ESERCIZIO DI PRIMA SI POTREBBERO PRENDERE COME ASSI CENTRALI ANCHE:



RISCRIVO I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

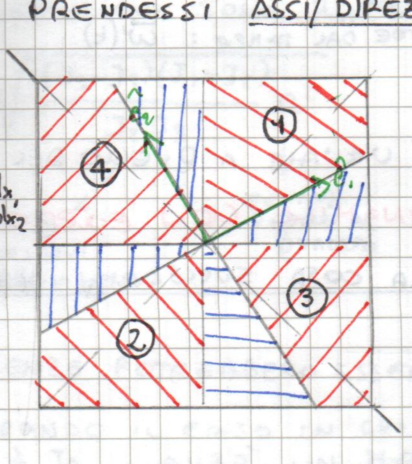
QUINDI:

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \cos\frac{\pi}{4} \\ -\omega\cos\frac{\pi}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\underline{\omega}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COME PRIMA SI HA $J_1 = J_2$ E $J_3 = 2J_1 = 2J_2$

$$\begin{cases} M_1^G = 0 \\ M_2^G = 0 \\ M_3^G = 0 \end{cases}$$

SE PERÒ PRENDESSI ASSI/DIREZIONI CHE NON SONO DI SIMMETRIA, es:



$$J_{12} = \iint_S \rho\, x_1 x_2\, dx_1 dx_2$$

NE CALCOLO IL PRODOTTO DI INERZIA J_{12}

SI POSSONO INDIVIDUARE 2 PARTIZIONI DEL DOMINIO SI HANNO 4 TRIANGOLI E 4 QUADRILATERI.

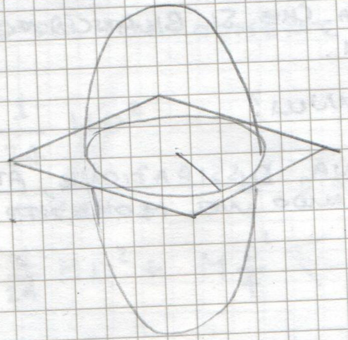
SI CREANO 2 GRUPPI I CUI CONTRIBUTI SI ANNULLANO

es. 1 QUADRILATERO HA x_1 E x_2 POSITIVE INVECE 2 HA LE COORDINATE NEGATIVE LO STESSO PER 3 E 4.

SI SCOPRE CHE IL QUADRILATERO È INGLOBATO ALL'INTERNO DI UN ELLISSOIDE ROTONDO.

QUINDI POSTI ARBITRARIAMENTE GLI ASSI NEL CENTRO DEL QUADRATO COMPORTERÀ CHE SI AVRANNO SEMPRE ASSI CENTRALI.

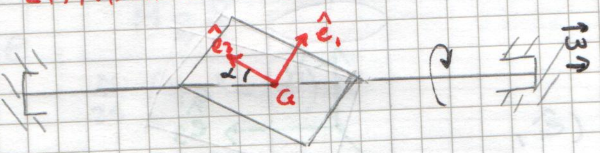
ELLISSOIDE ROTONDO



STESSO DISCORSO SAREBBE QUELLO CHE SI POTREBBE FARE PER UNA LAMINA CIRCOLARE.

MA NON SEMPRE È COSÌ FACILE.

LAMINA RETTANGOLARE



GLI ASSI CENTRALI NON SARANNO PIÙ LUNGO LE DIAGONALI.

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega \sin\alpha \\ -\omega \cos\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$J_{11} \neq J_{22} \quad \text{MA} \quad J_{33} = 2 J_{11} = 2 J_{22}$$

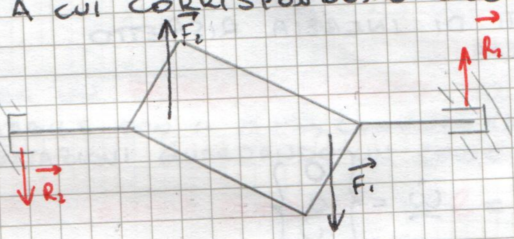
USANDO SEMPRE EULERO

$$\begin{cases} 0 = M_1^G \\ 0 = M_2^G \\ \omega^2 \cos\alpha \sin\alpha (J_2 - J_1) = M_3^G \end{cases}$$

IL MOTO È LO STESSO MA È UN RETTANGOLO. BASTA LA NON SIMMETRIA DELLA DISTRIBUZIONE CHE SI HA UN MOMENTO VINCOLARE NON NULLO QUINDI UN CERTO STATO DI SOLLECITAZIONE DIVERSO DA 0.

PER GARANTIRE CHE $\vec{\omega} = COST$, SI DEVE AVERE UN MOMENTO ORTOGONALE AL FOGLIO ALTRIMENTI SI AVREBBE UN'ACCEL. ANGOLARE.

SI HA QUINDI UN MOMENTO ORTOGONALE AL PIANO CHE QUINDI RUOTA CON LA L
SIGNIFICA CHE NASCE COPPIA DI FORZE NECESSARIE A MANTENERE $\omega = COST$
A CUI CORRISPONDONO DUE REAZIONI (MOMENTO DI REAZIONE) DI VERSO OPPOS

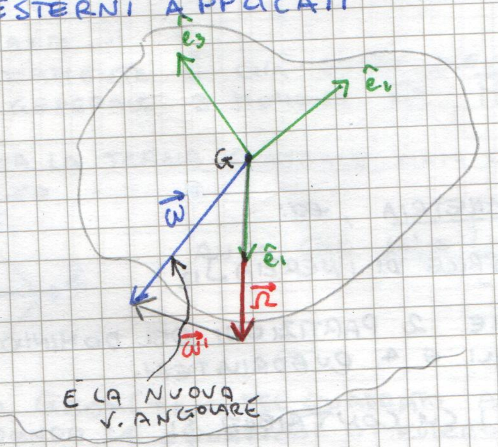


TUTTO CIÒ VALE NEL MONDO REALE MA DEVO ANCHE CONSIDERARE

$$M_1^G = -M_1^{ATTRITO}$$ LUNGO L'ASSE DI ROTAZIONE

RUOTERANNO ANCHE LE REAZIONI.

APPENDICE - MOTO ATTORNO AD UN ASSE CENTRALE IN ASSENZA DI MOMENTI ESTERNI APPLICATI



PRENDO IN QUALCHE MODO GLI ASSI CENTRALI SO CHE $\vec{\omega} = COST$ INTORNO AD UN ASSE CENTRALE MA IN ASSENZA DI MOMENTI EST
È IL CASO DI UN MOTO LIBERO.

EQUILIBRIO DINAMICO

VOGLIO SAPERE COSA SUCCEDE SE PERTURBO IL SISTEMA.
IPOTIZZO DI PERTURBARE IL SISTEMA CON $\vec{\omega}'$

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}'$$

$\vec{\Omega}$: NON DIPENDE DAL TEMPO

$\vec{\omega}'$ → DIPENDE DAL TEMPO : $\vec{\omega}'(t)$

IL RAGIONAMENTO È UGUALE A QUELLO DEL P
MATERIALE.

PROBLEMA DI EQ. DINAMICA CON EULERO

SE $|\vec{\omega}'| << |\vec{\Omega}|$ → HO PICCOLA PERTURBAZIONE, MA COSA SUCCEDE AL MOT
È STABILE O NO?

AVRÒ $\underline{\Omega} = \begin{Bmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \Omega + \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{\dot{\omega}} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_1' \\ \dot{\omega}_2' \\ \dot{\omega}_3' \end{Bmatrix}$$

$$J_{11}\dot{\omega}_1 + (J_{33}-J_{22})\omega_3\omega_2 = 0$$
$$J_{22}\dot{\omega}_2 + (J_{11}-J_{33})\omega_1\omega_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} J_{11}\dot{\omega}_1' + (J_{33}-J_{22})\omega_2'\omega_3' = 0 \\ J_{22}\dot{\omega}_2' + (J_{11}-J_{33})(\Omega+\omega_1')\omega_3' = 0 \\ J_{33}\dot{\omega}_3' + (J_{22}-J_{11})(\Omega+\omega_1')\omega_2' = 0 \end{cases}$$
$$J_{33}\dot{\omega}_3 + (J_{22}-J_{11})\omega_2\omega_1 = 0$$

PRIMA SI TROVANO PUNTI DI EQUILIBRIO, POI SI LINEARIZZA INTORNO AI PUNTI DI EQUILIBRIO SE EQUAZIONE È NON LINEARE. IN QUESTO CASO LA NON LINEARITÀ STA NELLE ω' PICCOLE.

$\omega_2'\omega_3'$ SONO NON LINEARITÀ DI ORDINE 2 MA SE $\|\vec{\omega}'\| \ll \|\vec{\Omega}\|$ POSSO TRASCURARE I TERMINI DI ORDINE 2 E ω_1' DENTRO LA PARENTESI. OTTENGO:

$$\begin{cases} J_{11}\dot{\omega}_1' = 0 \\ J_{22}\dot{\omega}_2' + (J_{11}-J_{33})\Omega\omega_3' = 0 \\ J_{33}\dot{\omega}_3' + (J_{22}-J_{11})\Omega\omega_2' = 0 \end{cases}$$

STUDIANDO QUESTE CAPIREMO LA STABILITÀ DEL SISTEMA

PORTANDO $\dot{\omega}_k'$ A SINISTRA SI HA E CAMBIANDO SEGNO

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1' = 0 \\ \dot{\omega}_2' = \dfrac{(J_{33}-J_{11})}{J_{22}}\Omega\omega_3' \\ \dot{\omega}_3' = \dfrac{(J_{11}-J_{22})}{J_{33}}\Omega\omega_2' \end{cases}$$

CHE POSSO RISCRIVERE COME $\boxed{\underline{\dot{\omega}}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{\omega}'}$

DOVE A È LA MATRICE
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(J_3-J_1)}{J_2}\Omega \\ 0 & \frac{(J_1-J_2)}{J_3}\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA SARÀ QUINDI $\boxed{\underline{\omega}' = \sum_k \underline{z}_k e^{\lambda_k t}}$ CLASSE FUNZIONALE

IN BASE A λ AVRÒ ANDAMENTI DIVERSI. SOSTITUENDO OTTENGO:

$$e^{\lambda t}\lambda\underline{z} = \underline{\underline{A}}\,\underline{z}\,e^{\lambda t} \rightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})\underline{z} = 0$$

QUINDI LA VELOCITÀ DI $\underline{\omega}'$ CI DICE SARÀ UGUALE AD $\underline{z}e^{\lambda t}$.
SI CERCANO QUINDI GLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI:

$$\det[\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}] = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{(J_3-J_1)}{J_2}\Omega \\ 0 & \frac{J_1-J_2}{J_3}\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda\left[\lambda^2 - \frac{(J_3-J_1)}{J_2}\frac{(J_1-J_2)}{J_3}\Omega^2\right] = 0$$

QUINDI LE SOLUZIONI SONO $\lambda_1 = 0$ E

$$\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{(J_3-J_1)(J_1-J_2)}{J_2J_3}\Omega^2}$$

SI DEVE STUDIARE DI CHE NATURA SIANO LE RADICI, SE REALI, IMMAGINARIE, ECC.

J_2 E J_3 SONO POSITIVI PER DEFINIZIONE

POSITIVO PERCHÈ AL QUADRATO

LE DIFFERENZE POTREBBERO ESSERE PERÒ NEGATIVE.

CONSIDERANDO IL CASO IN CUI HO UN CORPO RIGIDO GENERICO, QUINDI HO $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ AVRÒ UN MOMENTO DI INERZIA GRANDE, UNO PICCOLO E UNO MEDIO. IL CORPO RUOTA INTORNO AD $\hat{e}_1$.

IMMAGINANDO CHE $J_1 > J_2$ E $J_1 > J_3$ E COSÌ SI AVREBBE UNA RADICE COMPLESSA)

CASI

- SE $J_1 = MAX \rightarrow \lambda_{2/3}$ IMMAGINARI CONIUGATI

  L'ANDAMENTO DEL TEMPO DI $\underline{\omega}'$ È OSCILLATORIO MA COSTANTE $\rightarrow$ SISTEMA STABILE

- SE $J_1 = MIN \rightarrow \lambda_{2/3}$ IMMAGINARI CONIUGATI

  L'ANDAMENTO È SEMPRE OSCILLATORIO COME SOPRA. $\rightarrow$ SISTEMA STABILE

- SE J_1 È INTERMEDIO IL SEGNO DELLE DIFFERENZE SARÀ UGUALE (O TUTTE E DUE + O −)
  QUINDI SI AVREBBERO $\lambda_{2/3}$ RADICI REALI E DISTINTI $\rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

QUANDO LANCIAMO UN FRISBEE LO FACCIAMO RUOTARE, MENTRE RUOTA TRASLA. IL MOMENTO DI INERZIA È IL MAX POSSIBILE

È ANCHE IL MOTIVO PER CUI IL PALLONE DA FOOTBALL AMERICANO È AFFUSOLATO IN MODO TALE CHE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALL'ASSE LONGITUDINALE È IL PIÙ BASSO TRA I TRE.

ANCHE NEI CANNONI CI SONO SCANALATURE (RIGATURA) CHE IMPONGONO ROTAZIONE AL PROIETTILE INTORNO AL SUO ASSE.

TUTTO CIÒ È IL CONCETTO DI STABILITÀ DEL MOTO GIROSCOPICO

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

QUINDI DA $\underline{h}_0 = \underline{h}'_0 + \underline{g}_0$ SI È GIUNTI A DEFINIRE

$\underline{h}'_0 = \underline{\underline{J}}_0 \, \underline{\omega}$ CHE È LEGAME TRA LA QUANTITÀ DI MOTO ASSOCIATA AL CORPO E LA ROTAZIONE $\underline{\omega}$. QUINDI DIPENDE DALLA ROTAZIONE DEL CORPO.

NEL CASO SPECIFICO, UNA COMPONENTE DI $\underline{h}_0$ È:

$$h'_{0K} = J_{0K1}\omega_1 + J_{0K2}\omega_2 + J_{0K3}\omega_3$$

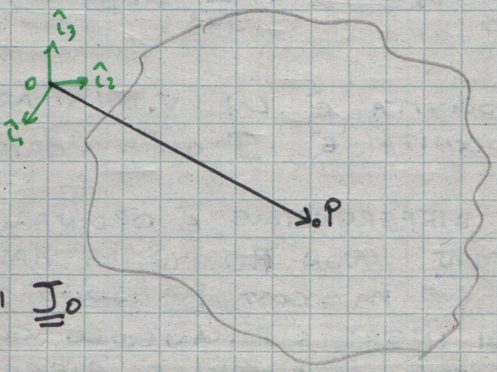
QUINDI NEL MOMENTO IN CUI VADO A SCRIVERE L'EQ. DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO $\underline{h}_0$, SI FA UNA DERIVATA DEL TERMINE $\underline{h}'_0$ CIOÈ:

$$\frac{d h'_{0K}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{J=1}^{3} J_{0KJ}\,\omega_J$$

DOVE SIA J_{0KJ} CHE ω_J DIPENDONO DAL TEMPO

DOVE SI È VISTO CHE IL TERMINE J_{0KJ} È:

$$J_{0KJ} = \iiint_V \rho\left[r^2\delta_{KJ} - r_K r_J\right] dV$$



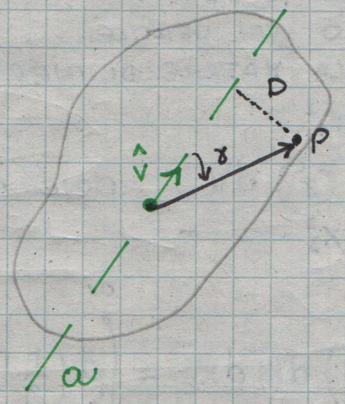
SCELTO UN SDR ASSOLUTO, SCELGO UN POLO O (PUÒ ESSERE OVUNQUE), $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

CALCOLANDO I TERMINI SULLA DIAGONALE DI $\underline{\underline{J}}_0$ (OSSIA I MOMENTI DI INERZIA)

$$J_{0_{11}} = \iiint_V \rho\left[r^2 - r_1^2\right] dV = \iiint_V \rho\left[r_2^2 + r_3^2\right] dV$$

DOVE $r_2^2 + r_3^2$ È LA DISTANZA AL QUADRATO DALL'ASSE ORTOGONALE AL PIANO DEFINITO DA r_2 E r_3 E PASSANTE PER P

DEFINIZIONE MIGLIORE DI D È TRAMITE ALTRA RELAZIONE DI MOMENTO DI INERZIA:



$$\iiint_V \rho\left|\hat{v} \times \vec{x}\right|^2 dV \qquad \gamma < 180°$$

$$\downarrow$$

$$\hat{v} \times \vec{x} = \|\hat{v}\|\,\|\vec{x}\|\sin\gamma = x\sin\gamma = D$$

$$\downarrow$$

$$\iiint_V \rho D^2 dV = J^{a}$$

MOMENTO DI INERZIA DELLA DISTRIBUZIONE V RISPETTO ALL'ASSE a

PORTANDOCI FUORI LA DIAGONALE, QUINDI $\delta_{KJ} = 0$ ESSENDO $K \neq J$, CALCOLIAMO INVECE I PRODOTTI DI INERZIA I QUALI SONO A DUE A DUE UGUALI:

$\boxed{J_{0KJ} = J_{0JK}}$ CON $K \neq J$ → MATRICE $\underline{\underline{J}}_0$ È SIMMETRICA $= \underline{\underline{J}}_0^{T}$

RIPRENDENDO L'EQUAZIONE DELLA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO, SE SCEGLIAMO COME POLO IL CENTRO DI MASSA, SI AVRÀ CHE:

$$\frac{d\vec{h}_G}{dt} = \vec{m}_G$$

MA OTTERREMO LA STESSA RELAZIONE SE PRENDESSIMO UN POLO FISSO

$$* \quad \frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{m}_o$$

FORMALMENTE SONO IDENTICHE MA MENTRE O È FISSO, G VARIA CON IL MOTO.

DERIVANDO LA * SI OTTIENE:

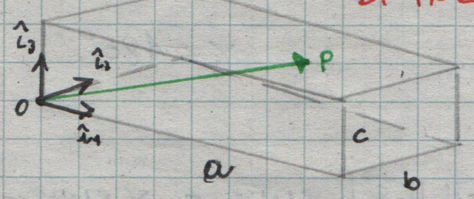
$$\frac{dh_{oK}}{dt} = \sum_{J=1}^{3} \dot{J}_{oKJ}\,\omega_J + \sum_{J=1}^{3} J_{oKJ}\,\dot{\omega}_J = m_{oK} \rightsquigarrow \text{MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO O.}$$

- SE L'INCOGNITA È ω V. ANGOLARE, È EQ. DEL 1° ORDINE.
- SE L'INCOGNITA È J OSSIA L'ORIENTAMENTO NELLO SPAZIO ALLORA 2° ORDINE.

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È ORDINARIA (DIPENDE SOLO DAL TEMPO) MA SE DERIVO $q = m\vec{v}$ NON HO PIÙ LA MASSA COSTANTE, ALMENO SE NON IPOTIZZIAMO, COME SI FARÀ CHE $m = \text{cost}$, MA CI SONO TERMINI CHE RIMANGONO A PRESCINDERE. I TERMINI DI INERZIA RIMANGONO COMUNQUE POICHÉ PERCHÉ VARIA LA DISTANZA RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO. QUINDI I COEFFICIENTI DELLA EQ. DIFF. NON SONO COSTANTI (I MOMENTI DI INERZIA SONO I COEFFICIENTI)

QUINDI SI USERÀ IL TEOREMA SPETTRALE SULLA MATRICE SIMMETRICA J PER TROVARE UN ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO TRAMITE CUI LA MATRICE È DIAGONALE E D È INDIPENDENTE DAL TEMPO, COSÌ L'EQUAZIONE DIVENTERÀ A COEFF. COSTANTI.

ESEMPIO: MOMENTI E PRODOTTI DI INERZIA



PER SEMPLICITÀ, APPLICO IL SDR NEL VERTICE. POSIZIONE IL POLO O NEL VERTICE. VOGLIO CALCOLARE LA MATRICE DI INERZIA

$$J_{11}^{o} = \int_0^a\int_0^b\int_0^c \rho\,\underbrace{(r_2^2 + r_3^2)}_{x_2^2 + x_3^2}\,dV \qquad \text{DOVE } dV = dx_1\,dx_2\,dx_3$$

($r^2 - r_1^2$)

$$= \int_0^a\int_0^b \rho\left(r_2^2 r_3 + \tfrac{1}{3} r_3^3\right)\Big|_0^c dx_1\,dx_2 = \int_0^a\int_0^b \rho\left(r_2^2 c + \frac{c^3}{3}\right)dx_1\,dx_2 = \int_0^a \rho\left(\frac{1}{3} r_2^3 c + r_2\frac{c^3}{3}\right)\Big|_0^b dx_1$$

$$= \int_0^a \rho\left(\frac{1}{3} b^3 c + b\frac{c^3}{3}\right)dx_1 = \rho a\left(\frac{1}{3}b^3 c + b\frac{c^3}{3}\right) = \rho abc\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\rho V(b^2 + c^2) = \frac{m}{3}(b^2+c^2) = J_{11}^{o}$$

MENTRE PER LA SIMMETRIA DELLA MATRICE, J_{22}^{o} E J_{33}^{o} HANNO LA STESSA FORMA

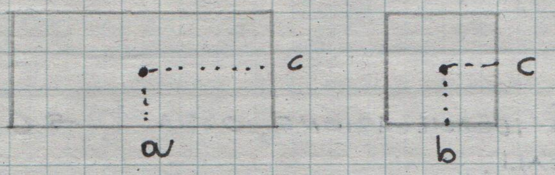
$J_{22}^o = \frac{m}{3}(a^2+c^2)$ E $J_{33}^o = \frac{m}{3}(a^2+b^2)$

CALCOLO ORA IL PRODOTTO DI INERZIA J_{12}^o :

$$J_{12}^o = \int_0^a\int_0^b\int_0^c \rho(-r_1 r_2)\,dx_1 dx_2 dx_3 = -\rho\left[\frac{r_1^2}{2}\right]_0^a\left[\frac{r_2^2}{2}\right]_0^b c = -\rho\frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2}c$$

$$= -\rho abc\frac{1}{4}ab = -\rho V\frac{1}{4}ab = -\frac{m}{4}ab = J_{12}^o = J_{21}^o$$

SE PER ESEMPIO CAMBIASSI IL POLO PER CALCOLARE NUOVAMENTE IL PRODOTTO DI INERZIA, ESEMPIO PONGO IL POLO NEL CENTRO DI FIGURA:



$$J_{12}^o = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} -\rho(r_1 r_2)\,dx_1 dx_2 dx_3 = -\rho\int_{-a/2}^{a/2} r_1\int_{-b/2}^{b/2} r_2\int_{-c/2}^{c/2} 1\;dx_1 dx_2 dx_3 = 0 = J_{21}^o$$

SI È QUINDI SCOPERTO CHE SI HANNO PRODOTTI DI INERZIA NULLI
QUINDI SI HA MATRICE DIAGONALE.
L'IMPORTANTE NON È LA SIMMETRIA DELL'OGGETTO MA DELLA MATRICE.

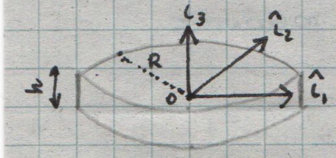
SE QUINDI SI TROVA UN POLO PER CUI $J_{OKJ} = 0$ PER $K \neq J$
ALLORA SI HA CHE:

$$\underline{h_O'} = \underline{\underline{J}}^o\,\underline{\omega} \Rightarrow \boxed{h'_{OK} = J^o_{OKK}\,\omega_K}$$

CON PRODOTTI DI INERZIA NULLI
AVENDO SCELTO UN POLO GIUSTO

UN QUALSIASI CORPO, CON FORMA GENERICA, AVRÀ SEMPRE UN POLO PER CUI I PRODOTTI DI INERZIA SONO NULLI → MATRICE DIAGONALE

ESEMPIO - CALCOLO MOMENTI E PRODOTTI DI INERZIA CILINDRO



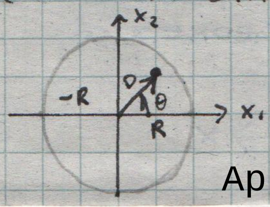
VOGLIO CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AL TERZO ASSE.

$$J_{33}^o = \iiint_V \rho(x_1^2+x_2^2)\,dV$$

SE USASSI GLI ASSI SCELTI SOPRA AVREI:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-R}^{R}\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \rho(x_1^2+x_2^2)\,dx_2 dx_1 dx_3$$

PERÒ QUELLO CHE STIAMO INTEGRANDO È LA DISTANZA DAL PUNTO AL TERZO ASSE:

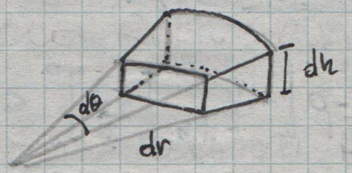


$$\rightarrow \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^2\,dV = \int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^3\,dr\,d\theta\,dh$$

DOVE PASSANDO DAL SISTEMA CARTESIANO A QUELLO CILINDRICO VA CONSIDERATO

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dh$$

↑ METRICA



QUINDI:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^3\,dr\,d\theta\,dh = \rho\, 2\pi \frac{R^4}{4} h = \frac{m}{2}R^2$$

QUINDI SI È RISCRITTO L'INTEGRALE COME INTEGRALE DI SUPERFICIE + INTEGRALE DI LINEA

LAMINA: OGGETTO CON SPESSORE NULLO, È IDEALIZZAZIONE, OSSIA $h \to 0$. SERVE PER DESCRIVERE DINAMICA DI OGGETTI REALI.
SE $h \to 0$ SI AVRÀ CHE:

$$\lim_{h\to 0} J^{o}_{33} = \int_{-h/2}^{h/2}\int_S \rho(r,\theta)\, r^3\, d\theta\, dr\, dh$$

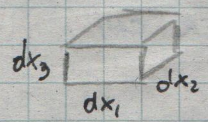
$$\downarrow$$

$$\int_S \hat{\rho}(r,\theta)\, r^3\, d\theta\, dr\, dh$$

SI È INTRODOTTA LA DENSITÀ SUPERFICIALE $\hat{\rho}$ DEFINITA COME

$$\hat{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(r,\theta)\, dh = \rho h$$

RAPPRESENTA QUANTO PESA ELEMENTINO SPESSO a. QUINDI NEL CASO IN CUI SI HANNO OGGETTI CON 2 DIMENSIONI MAGGIORE (MOLTO MAGGIORE) DELLA TERZA ALLORA SI USA $\hat{\rho}$.

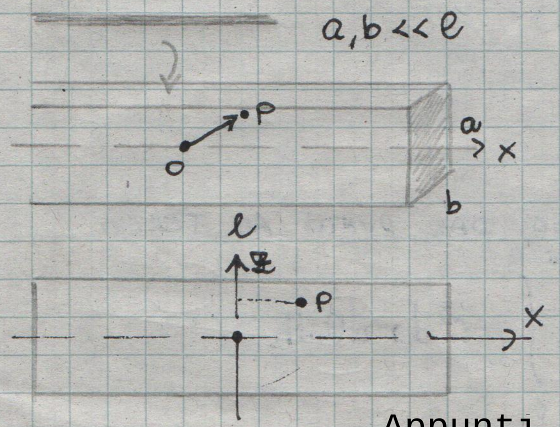


$$dm = \underbrace{\rho}_{\text{DENSITÀ VOLUMETRICA}}\, \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{dV} \rightarrow \underbrace{dx_1 dx_2}_{\text{ELEMENTINO DI SUPERFICIE}}\, \underbrace{\rho\, dx_3}_{\text{DENSITÀ SUPERFICIALE}}$$

→ TROVATA MOLTIPLICANDO PER LA DIMENSIONE ORTOGONALE

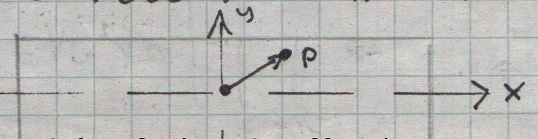
SBARRA: È OGGETTO CHE HA UNA DIMENSIONE MOLTO MAGGIORE DELLE ALTRE DUE. SI INTRODUCE QUINDI LA DENSITÀ LINEARE $\hat{\hat{\rho}}$

$a, b << \ell$



LA DENSITÀ LINEARE $\hat{\hat{\rho}}$ INDICA CHE LUNGO IL PIANO DEFINITO DA a E b, LA DENSITÀ NON VARIA (COSTANTE). VARIA LUNGO ℓ.

CALCOLO IL MOMENTO DI INERZIA J^{o}_{33} DI UN PUNTO GENERICO P PRENDENDO COME POLO IL CENTRO GEOMETRICO.



IPOTIZZANDO DI CONOSCERE LA GEOMETRIA SI AVRÀ CHE:

- $J^0_{33} = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz = \rho a \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} dy =$

$r^2 - r_3^2$

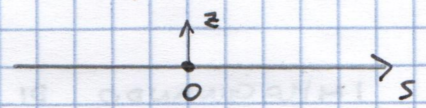
$= \rho a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{\ell^3}{12} + y^2 \ell\right) dy = \rho a \left[\frac{\ell^3}{12} y + \frac{y^3}{3} \ell\right]_{-\frac{b}{2}}^{b/2} = \frac{\ell^3 b}{12} \rho a + \frac{b^3}{3} \ell \rho a$

$= \rho a b \ell \left[\frac{\ell^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right]$ *

IN CUI ABBIAMO DETTO CHE $a, b \ll \ell$ MA COMUNQUE LI STIAMO ANCORA IPOTIZZANDO FINITI TALI DA INFLUENZARE IL CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA.

SI FA ORA ALTRA CONSIDERAZIONE: SE $a, b \ll \ell$ ALLORA POSSO SCRIVERE

- $J^0_{33} = \hat{\hat{\rho}} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\ell/2} s^2\, ds = \hat{\hat{\rho}} \frac{\ell^3}{12}$



SBARRA

QUINDI RIPRENDENDO * CHE SUCCEDE SE $a, b \to 0$?

$$\lim_{a,b \to 0} \rho a b \ell \left[\frac{\ell^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right] = \rho\, ds\, \ell \left(\frac{\ell^2}{12}\right) = \rho\, ds \left(\frac{\ell^3}{12}\right)$$

ADESSO SI ESPRIME IL LEGAME TRA ρ E $\hat{\hat{\rho}}$:

1

2

3 $\boxed{\rho = \frac{dm}{dV}} = \frac{dm}{ds\,d\ell} = \frac{\hat{\hat{\rho}}}{ds} \longrightarrow$ 4 $\boxed{\hat{\hat{\rho}} = \rho\, ds}$ RELAZIONE $\hat{\hat{\rho}}$ E ρ

DENSITÀ VOLUMETRICA

5 $\boxed{\hat{\rho} = \rho\, d\ell}$ RELAZIONE $\hat{\rho}$ E ρ

QUINDI DAL MOMENTO CHE HO SBARRA $(a, b \ll \ell)$ POSSO CONSIDERARE CHE LA DENSITÀ ρ = COSTANTE.

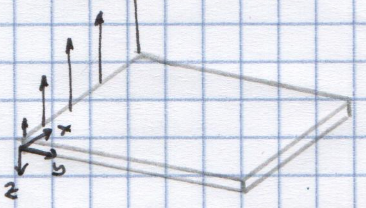
ES. IN UN ESAME VENIVA DATO ρ MA NON $\hat{\rho}$. SI DOVEVA USARE LA RELAZIONE 5 SAPENDO CHE $a, b \ll \ell$ DA CUI

$\hat{\rho} = \rho \cdot a$ OPPURE $\hat{\rho} = \rho \cdot b$ MENTRE $\hat{\hat{\rho}} = \rho \overbrace{ab}^{ds}$

SE CI FOSSE STATA SOLO UNA DIMENSIONE MOLTO MINORE, ES. a:

$\hat{\rho} = \rho \cdot a$

ALTRO ESERCIZIO D'ESAME DAVA LAMINA CON UNA DIMENSIONE PICCOLA. VENIVA DATO UN CAMPO DI FORZE. LA DENSITÀ NELL'ESERCIZIO VARIAVA SOLO LUNGO y. QUINDI LUNGO x E z HO SEMPRE STESSO VALORE (IL DISEGNO NON RENDE L'IDEA.

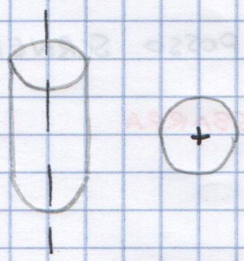


$\vec{h}'_o$, VETTORE INVARIANTE CHE INDICA IL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO, È PERÒ UN VETTORE VARIANTE NEL MOMENTO IN CUI LO RAPPRESENTO IN UN DATO SDR LO RENDE VARIANTE

$$\underline{h}'_o = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

CASO BIDIMENSIONALE

OGGETTO 3D HA MOTO PIANO QUANDO NON CI SONO GRANDEZZE CINEMATICHE LUNGO Z.



SI AVRÀ $\vec{\omega} \rightarrow \underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}$ NEL SDR SCELTO

IMMAGINANDO DI AVER DIAGONALIZZATO IL TENSORE DI INERZIA SI AVRÀ:

6 GDL $\rightarrow$ 6 − (2 ROTATORI + 1 TRASL) = 3 GDL

$$\underline{h}'_o = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{33} \end{Bmatrix} *$$

QUINDI L'UNICA COMPONENTE DEL MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO È LA 3°

MA SE NON AVESSI UNA MATRICE DIAGONALE CON $\underline{\omega} = \{0; 0; \omega_3\}$ AVREI:

$$\underline{h}'_o = \begin{bmatrix} J_{13} \\ J_{23} \\ J_{33} \end{bmatrix} \omega_3$$

$\rightarrow$ HO UN VETTORE CON 3 COMPONENTI E NON PIÙ UNA COME *

QUINDI DEVO CONSIDERARE L'INTERA <u>EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MOMENTO DELLA Q.TÀ DI MOTO</u>.

$\dfrac{d\vec{h}_o}{dt} \rightarrow$ NON HO PIÙ 1 SOLA EQUAZIONE SCALARE MA 3

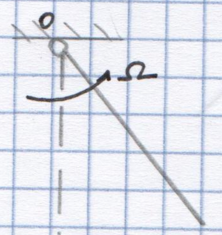
SE SI HA UN OGGETTO BIDIMENSIONALE O TRIDIMENSIONALE MA CON UNA DIMENSIONE << DELLE ALTRE, I PRODOTTI DI INERZIA RISPETTO L'ASSE DELLA DIMENSIONE MOLTO MINORE SONO NULLI.

es. RISPETTO Z:

$$\begin{bmatrix} \checkmark & \checkmark & \times \\ \checkmark & \checkmark & \times \\ \times & \times & \checkmark \end{bmatrix}$$

AVENDO SOLO ω_3 RIOTTENGO UNA SOLA EQUAZIONE SCALARE

ESERCIZIO - PENDOLO COMPOSTO

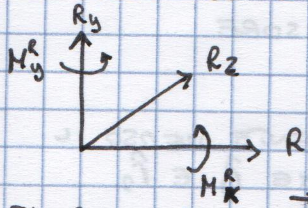


HO UNA SBARRA (PENDOLO COMPOSTO IN ROTAZIONE). VOGLIO SAPERE SE CI SONO PUNTI DI EQUILIBRIO NEL RIFERIMENTO ROTANTE.
SE MI METTO SULLA CERNIERA (FISSA) CON UN SDR SOLIDALE POSSO VEDERE CHE LA SBARRA È DEFINITA DA 1 GDL (θ).
VOGLIO CAPIRE QUANDO È FERMA NEL SDR SOLIDALE.

DATI: $\hat{\rho}$, L, $\Omega = cost$

ANCHE SE È PROBLEMA A 6 GDL, TRAMITE LA CERNIERA E SDL SOLIDALE PASSO AD 1.

CERNIERA È OGGETTO 3D CHE ELIMINA 5 GDL E NE LASCIA 1 (ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE)
INIBISCE LE 3 TRASLAZIONI E 2 SU 3 MOMENTI RISPETTO AGLI ASSI.



NEL NOSTRO ESERCIZIO, AVENDO SOLO COME FORZA ATTIVA IL PESO, NON FAREBBE NASCERE TUTTI QUESTI MOMENTI DI REAZIONE. OVVIAMENTE VANNO ANCHE VISTE LE F. APPARENTI.

SI ANALIZZA $\vec{a}^A$:

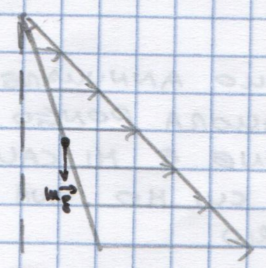
$$\vec{a}^A = \vec{a}^R + \vec{a}^{TR} + \vec{a}^C = \vec{a}^R + \cancel{\vec{a}_0} + \cancel{\dot{\vec{\Omega}} \times y} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{y} + \cancel{2\vec{\Omega} \times \vec{y}}$$

PARTENDO DALL'EQ. DI CONS. DELLA Q.TÀ DI MOTO:

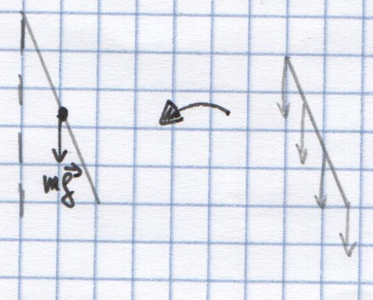
$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0^E - m\vec{v}_0 \times \vec{v}_G \qquad \text{POICHÉ } \vec{v}_0 = \vec{0} \text{ ALLORA}$$

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0^E \rightarrow \text{PROIETTANDO RIMANE SOLO IL MOMENTO LUNGO } \hat{k}$$

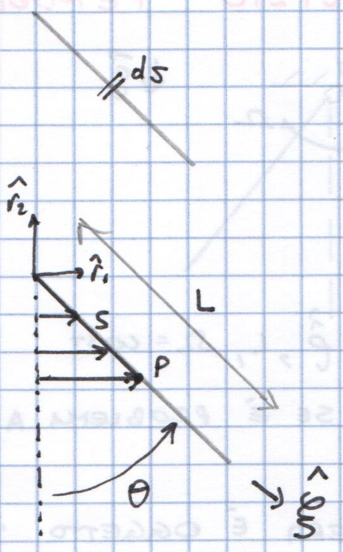
LA F. CENTRIFUGA DIPENDE DALLA DISTANZA DELL'ASSE



NEL CASO DELLA FORZA PESO, POSSO PENSARE $m\vec{g}$ APPLICATA AL CM:



RIPRENDENDO IL CASO DELLA FORZA CENTRIFUGA
SE CONSIDERO UN ELEMENTINO GENERICO DI SBARRA, DA CUI:



$$dm = \hat{\rho}\, dS$$

AVREI SU QUELL'ELEMENTINO UNA F. CENTRIFUGA:

$$d\vec{F}_{CENTR} = dm\, \Omega^2\, s \sin\theta\, \hat{r}_1$$

DA CUI $\longrightarrow \int_0^L d\vec{F}_{CENTR} = \vec{F}_{CENTR}$

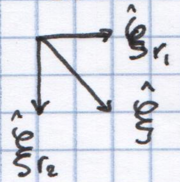
QUINDI CONSIDERANDO IL MOMENTO INFINITESIMO:

$$d\vec{M}^O = \vec{OP} \times d\vec{F}_{CENTR} \rightarrow \int_0^L d\vec{M}^O = \vec{M}^O$$

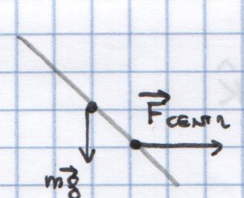
SE PER ESEMPIO ESPRIMESSI $\vec{OP} = s\hat{\xi}$ CON NUOVO VERSORE
RIAPPLICANDO LA FORMULA DEL MOMENTO:

$$d\vec{M}^O = s\hat{\xi} \times \Omega^2 \sin\theta\, dm\, \hat{r}_1$$

MA CONTA SOLO IL COMPONENTE VERSO IL BASSO DI $\hat{\xi}$ ESPRESSO COME $\hat{r}_1$ E $\hat{r}_2$



SE ORA VOLESSI TROVARE L'EQUIVALENTE DEL CM PER $m\vec{g}$ MA NEL CASO DELLA F. CENTRIFUGA, CERCO UN QUALCOSA DEL TIPO:



PER CUI $\vec{M}^O_{CENTR} = \vec{OQ} \times \vec{F}_{CENTR}$

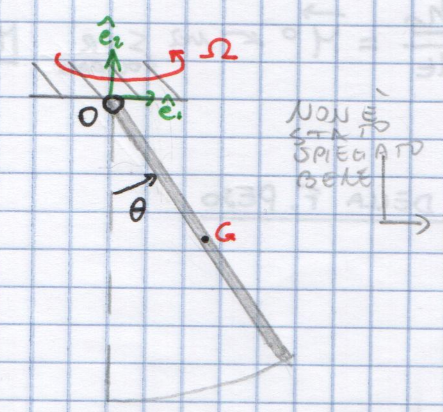
IL PUNTO Q SI TROVERÀ A $\frac{2}{3}$ DALL'ORIGINE DELLA SBARRA.

QUINDI ORA POSSO CONCLUDERE L'ESERCIZIO E SCRIVO

$$\hat{r}_3)\ \frac{dh_{O_3}}{dt} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + F_{CENTR}\frac{2}{3}L\cos\theta$$

$\rightarrow$ POICHÉ VOGLIO ANNULLARE $J_{33}\omega_3$ ALLORA PONGO A 0 L'EQUAZIONE E MI CALCOLO IL θ PER CUI HO UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO

PENDOLO COMPOSTO: È UN PENDOLO COSTITUITO DA UNA SBARRA OMOGENEA, IN ROTAZIONE. OSSERVIAMO IL MOTO VISTO DA UN SDR SOLIDALE AL PENDOLO. (9)



SI IPOTIZZA AD $\frac{\ell}{2}$ IL CENTRO DI MASSA G E UN CERTO ANGOLO θ.
LA CERNIERA SOTTRAE IN QUESTO CASO 3 GDL POICHÉ IL CORPO PUÒ RUOTARE INTORNO AD UN ASSE E TRASLARE IN 2 DIREZIONI (RUOTA LUNGO $\hat{e}_3$ + TUTTO IL PIANO RUOTA INTORNO $\hat{e}_2$). SERVONO 3 PARAMETRI PER INDICARE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE (es. ANGOLO E UN PUNTO INDICATO CON GLI ALTRI 2 PARAMETRI) POICHÈ HO PUNTO FISSO ALLA CERNIERA MI BASTA 1 GDL.

SI PARTE CON EQ. DELLA CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO:

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{M}_o$$

IN CUI SI È SCELTO COME POLO IL PUNTO DELLA CERNIERA CHE È FERMO. DEFINISCO UN SDR SOLIDALE CHE ABBIA COME ORIGINE IL P.TO DI CERNIERA CON DIREZIONI COME IN FIGURA.

LA MATRICE DI INERZIA, NEL CASO DI QUESTO PROBLEMA, AVRÀ UNA STRUTTURA DEL TIPO (CON QUESTO SDR):

$$\underline{J}^o = \begin{bmatrix} J_{11}(t) & J_{12}(t) & 0 \\ J_{21}(t) & J_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix}$$

DISTANZA DI UN GENERICO PUNTO RISPETTO AGLI ASSI VARIA NEL TEMPO
NEL CASO DI J_{33} LA DISTANZA NON VARIA POICHÈ LA D È FISSA $\forall t$

NEL CASO DEI PRODOTTI DI INERZIA SOPRAVVIVONO SOLO J_{12} E J_{21} PERCHÈ L'ESTENSIONE DELLA MASSA LUNGO $\hat{e}_3$ È NULLA. QUINDI I TERMINI PER CUI SI DEVE INTEGRARE LUNGO $\hat{e}_3$ È 0.

CE NE È SOLO UNO DI TERMINE INDIPENDENTE DAL TEMPO.

SI VUOLE SCRIVERE L'EQ. CHE GOVERNA IL MOTO DEL PENDOLO OSSERVATO.
SI PUÒ TRATTARE OGNI ELEMENTINO COME SE FOSSE UN PUNTO MATERIALE OPPURE SI CONSIDERA CHE:

$$\vec{\omega}^A = \vec{\omega}^R + \vec{\omega}^{TR}$$

VALIDA PER L'INTERO CORPO PER GIUNGERE ALL'EQ. DI GOVERNO.

CHI È $\vec{\omega}^{TR}$? È $\vec{\Omega}$ MENTRE $\vec{\omega}^R = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$ NON SI CONOSCE $\dot{\theta}$ MA COMUNQUE SAPPIAMO CHE SARÀ DOVUTO AL VARIARE DI θ

QUINDI SIAMO PARTITI DA

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{M}^o \rightarrow \underline{h}_o = \underline{J}^o \underbrace{\underline{\omega}^R}_{\text{RELATIVA}} = \underline{J}^o \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}\hat{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{33}\dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

QUINDI

$$\frac{d\underline{h}_o}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{33}\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

È IL CASO IN CUI $\underline{J}^o$ DIPENDE DAL TEMPO MA FORTUNATAMENTE RIMANE SOLO IL TERMINE NON DIPENDENTE DAL TEMPO PER VIA DEL MOTO PIANO. J_{33} È L'UNICO CHE CONTRIBUISCE ALLA Q.TÀ DI MOTO

GLI ALTRI TERMINI SONO FILTRATI PROPRIO DAL FATTO CHE IL MOTO È BIDIMENSIONALE.

SCRIVIAMO PER COMPONENTI DEL SDR SOLIDALE: $\frac{dh_o}{dt} = \vec{M}^o$ ← NEL SDR SOLIDALE $\underline{M^o}$

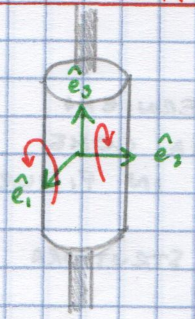
$\hat{e}_1)\quad 0 = \vec{M}^o \cdot \hat{e}_1$

CHI C'È DENTRO $\vec{M}^o$? C'È SICURAMENTE IL MOMENTO DELLA F. PESO

* $\vec{M}^o_G = \vec{y}_G \times m\vec{g}$ DOVE $\vec{y}_G = \overrightarrow{OG}$

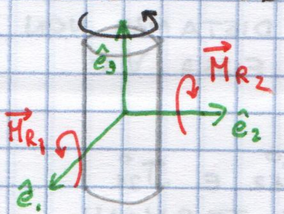
COSA ALTRO AGISCE?

CERNIERA È UN VINCOLO TRIDIMENSIONALE. È DISPOSITIVO COSTITUITO DA PIÙ CILINDRI COASSIALI CHE SERVONO AD IMPEDIRE TRASLAZIONI LUNGO $\hat{e}_1$ E $\hat{e}_2$ (IN REALTÀ PER NOI ANCHE $\hat{e}_3$)
SI AVRÀ QUINDI 3 REAZIONI VINCOLARI



$$\underline{r} = \begin{cases} r_1 \neq 0 \\ r_2 \neq 0 \\ r_3 \end{cases} \qquad r_3 \neq 0 \text{ CERNIERA IN SENSO STRETTO (ES. PORTE)} \qquad r_3 = 0 \text{ COLLARI CILINDRICI}$$

OLTRE ALLE 3 (O 2) REAZIONI VINCOLARI, FA INSORGERE ALTRE 2 REAZIONI COSÌ DA IMPEDIRE LE ROTAZIONI LUNGO $\hat{e}_1$ E $\hat{e}_2$.



FINORA SI È RAGIONATO COME SE FOSSIMO CON PENDOLO BIDIMENSIONALE NEL MOTO PIANO RELATIVO OSSERVATO LA CERNIERA TOGLIE 5 GDL → DA CUI PENDOLO HA SOLO 1 GDL. PERÒ HO CORPO CHE RUOTA INTORNO AD UN PIANO (NON HO PIÙ PALLINA VINCOLATA AD UNA CURVA DA CUI AVEVO $\vec{R}^n$ E $\vec{R}^b$). QUINDI IN QUESTO CASO VANNO CONSIDERATI ANCHE I MOMENTI DI REAZIONE $\vec{M}_{R_1}$ E $\vec{M}_{R_2}$. SONO MOMENTI PURI: NON C'È UNA FORZA CHE VA PREMOLTIPLICATA VETTORIALMENTE DA UN $\vec{y}$.

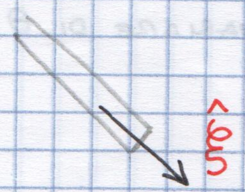
RIPRENDENDO * AVRÒ CHE:

$$\vec{M}^o = \vec{y}_G \times m\vec{g} + \vec{m}_R + \text{MOMENTI DELLE FORZE APPARENTI}$$

DOVE NEL CASO DELLE F. APPARENTI DEVO APPLICARE AD OGNI ELEMENTINO,

$$\int_0^L \hat{e}\, \vec{y}(\xi) \times \left(\vec{a}^{tr}(\xi) + \vec{a}^c(\xi)\right] d\xi$$

DOVE ξ È UNA VARIABILE CHE DEFINISCE L'ASCISSA AUSILIARIA LUNGO LA DIREZIONE OCCUPATA ISTANTE PER ISTANTE DALLA SBARRA



IL DISCORSO SU DOVE È DIRETTO CORIOLIS NON L'HO CAPITO

QUINDI ABBIAMO TUTTO:

$\hat{e}_1)\quad 0 = \vec{M}_o \cdot \hat{e}_1$

NEL CASO DELLA $\vec{a}^{tr}$ RIMANE SOLO LA ACCEL. CENTRIPETA DA CUI ACCEL. CENTRIFUGA

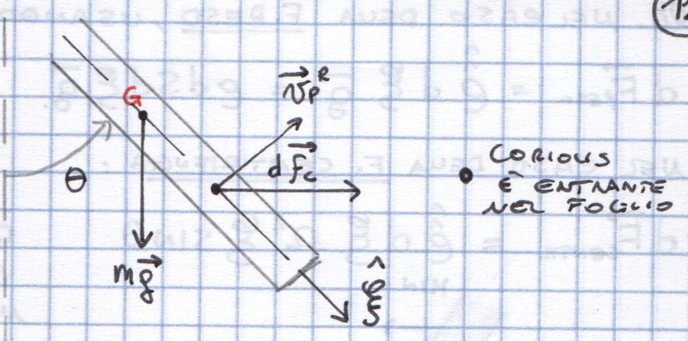
$d\vec{f}_c = dm\,\Omega^2\,\xi\,\sin\theta$

$2(\vec{\omega}^{TR} \times \vec{v}_P^{\,R})$

$d\vec{f}_{COR} = dm\, 2\,\vec{\Omega}^{TL} \times \vec{v}_P^{\,R}$

↓ ESCE DAL PIANO DEL FOGLIO — ↓ VETTORE CHE GIACE NEL PIANO

SONO FORZE CHE VANNO INTEGRATE E POI POSTMOLTIPLICATE PER IL VETTORE POSIZIONE



QUINDI LA CERNIERA DOVRÀ APPLICARE UN MOMENTO DI REAZIONE PER EVITARE CHE IL PENDOLO ESCA DAL PIANO IN CUI STA OSCILLANDO.

QUINDI LUNGO $\hat{e}_1$) $0 = \underset{\text{MOM. DI REAZ.}}{\vec{m}^R} \cdot \hat{e}_1 + m_{CORIOLIS} \cdot \hat{e}_1 + m_{F.PESO} \cdot \hat{e}_1 + m_{CEN} \cdot \hat{e}_1$

LUNGO $\hat{e}_2$)

$\hat{e}_2$) $0 = \vec{M}^O \cdot \hat{e}_2 = \vec{m}^R \cdot \hat{e}_2 + \vec{m}_{CORIOLIS} \cdot \hat{e}_2$

MENTRE LUNGO $\hat{e}_3$:

$\hat{e}_3$) $J_{33}\ddot{\theta} = \vec{m}_{F.PESO} \cdot \hat{e}_3 + \vec{m}_{CENTR} \cdot \hat{e}_3$

HO QUINDI TROVATO LE 3 EQUAZIONI SCALARI

ORA CALCOLO I MOMENTI RISPETTIVI DELLE VARIE FORZE ATTIVE O APPARENTI.

MOMENTO DELLA FORZA PESO

$\vec{m}_{F.PESO} \cdot \hat{e}_3 = (\vec{OG} \times m\vec{g}) \cdot \hat{e}_3 = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$

MOMENTO DELLA FORZA CENTRIFUGA

$\vec{m}_{CENTRIFUGA}$ VA PRIMA CALCOLATA:

~~$\hat{\rho}\, \xi\, d\xi = dm$~~ SBAGLIATO → INOLTRE VA PRIMA FATTO INTEGRALE DI $d\vec{f}_c$ E PO FARE P. VETTORIALE

$$\int_0^L \vec{y}_P(\xi) \times d\vec{f}_c = \Big(\int_0^L \underbrace{\hat{\rho}\,\xi}_{dm}\, \Omega^2\, \xi \sin\theta\cos\theta\, d\xi\Big)\hat{e}_3 = \Big(\int_0^L \hat{\rho}\,\xi^2 \sin\theta\cos\theta\,\Omega^2\, d\xi\Big)\hat{e}_3$$

$$= \hat{\rho}\frac{L^3}{3}\Omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_3 = m\frac{L^2}{3}\Omega^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_3 \qquad \to \hat{\rho} = \rho ds \to \hat{\rho}L = \rho d s \ell = m$$

DA CUI:

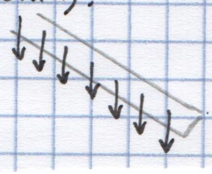
$$J_{33}\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta + m\frac{L^2}{3}\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

L'INCOGNITA È $\theta(t)$, EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE A COEFF. COSTANTI (J_{33} NON DIPENDE DAL TEMPO) MA È NON LINEARE

LA PRESENZA DELLA F. CENTRIFUGA AUMENTA LA NON LINEARITÀ.

ADESSO MI CHIEDE SE ESISTE UN PUNTO, COME NEL CASO DELLA F. PESO, IN CUI POSSO APPLICARE LA F. CENTRIFUGA.

NEL CASO DELLA FORZA PESO AVEVO UN ANDAMENTO DEL GENERE, PER CUI OGNI ELEMENTINO È SOGGETTO A STESSA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ (IPOTIZZANDO CHE NON VARI).

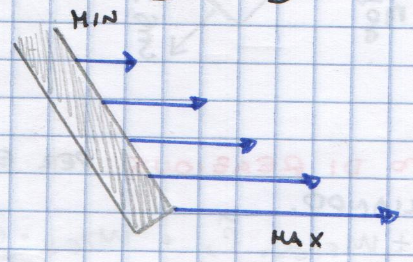


es. NEL CASO DELLA F. PESO, USANDO L'ASCISSA AUSILIARIA, SI AVRÀ:

$$d\vec{F}_{peso} = \hat{\rho}\, d\xi\, \vec{g} = \rho\, dS\, d\xi\, \vec{g}$$

NEL CASO DELLA F. CENTRIFUGA:

$$dF_{centr} = \hat{\rho}\, d\xi\, \Omega^2 \xi \sin\theta$$



QUINDI AVRÀ UN VALORE MINIMO E MASSIMO IN BASE A $\sin\theta$.
NON SI PUÒ CONSIDERARE COME UNIFORME (È COMUNQUE INERZIALE)

SI ERA CALCOLATO PRIMA IL MOMENTO RISULTANTE DELLA F. CENTRIFUGA:

$$\vec{m}_{centr} = \frac{m}{3} L^2 \Omega^2 \sin\theta\cos\theta\, \hat{e}_3$$

ESISTE UN PUNTO "C" TALE CHE $\boxed{\vec{y}_c \times \vec{F}_c = \vec{m}_c}$

PUNTO

SI INIZIA A CALCOLARE LA RISULTANTE DELLA FORZA CENTRIFUGA.

$$\vec{F}_c = \left[\int_0^L \hat{\rho}\, d\xi\, \Omega^2 \xi \sin\theta\right]\hat{e}_1 = \Omega^2 \frac{L^2}{2}\hat{\rho}\sin\theta\, \hat{e}_1 = \frac{m}{2}\Omega^2 L \sin\theta\, \hat{e}_1$$

$$\vec{y}_c \times \left(\frac{m}{2}\Omega^2 L \sin\theta\, \hat{e}_1\right) = \frac{m}{3} L^2 \Omega^2 \sin\theta\cos\theta\, \hat{e}_3$$

MA

$$\vec{y}_c = \xi_{centr}\left(\sin\theta\, \hat{e}_1 - \cos\theta\, \hat{e}_2\right) \uparrow \text{SOSTITUENDO}$$

$$\xi_c \frac{m}{2} L \Omega^2 \sin\theta\cos\theta\, \hat{e}_3 = \frac{m}{3} L^2 \Omega^2 \sin\theta\cos\theta\, \hat{e}_3 \rightarrow \boxed{\xi_c = \frac{2}{3} L}$$

QUINDI SE PRENDO UNA SOLA FORZA CHE È LA RISULTANTE DELLA FORZA CENTRIFUGA E LA APPLICO IN C HO OTTENUTO UNA SOLLECITAZIONE EQUIVALENTE AL CAMPO DI FORZA CENTRIFUGA.

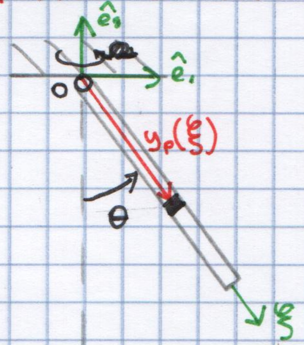
QUANDO SI DICE "STATO DI SOLLECITAZIONE EQUIVALENTE" SI INTENDE CHE EQUIVALENZA SIGNIFICA CHE HA STESSO VALORE RISPETTO A QUALCHE FENOMENO. È COMUNQUE CONCETTO RELATIVO $\neq$ UGUAGLIANZA.
AFFERMARE DI VOLERE UNO STATO DI SOLLECITAZIONE EQUIVALENTE SIGNIFICA CHE RISULTANTE DELLE FORZE E MOMENTI SONO UGUALI. DEVE AVERE STESSO EFFETTO DINAMICO. OSSIA SE INSERIAMO QUESTI RISULTATI NELLE EQUAZIONI CARDINALI OTTENGO STESSO RISULTATO.

$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}$ E $\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{M}^o$

EQUIVALENZA SIGNIFICA CHE SOLUZIONI DEVONO ESSERE UGUALI.

CI SONO CASI IN CUI NON È POSSIBILE FARE QUESTA SOSTITUZIONE (ANCHE CON LA FORZA PESO).

ALTRO ESEMPIO - PENDOLO COMPOSTO



CONTINUO DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE.
CALCOLARE ESPLICITAMENTE LA FORZA DI CORIOLIS

$$\vec{f}_{CORIOLIS} = -2m\,\vec{\omega}^{TR} \times \vec{v}^{R}$$

PRENDENDO UNA MASSA INFINITESIMA SI AVRÀ:

$$d\vec{f}_{CORIOLIS} = -2\,\underset{\hat{\hat{e}}\,d\xi}{\underbrace{dm}}\;\vec{\omega}^{TR} \times \vec{v}^{R}$$

ξ È LA VARIABILE DI INTEGRAZIONE, θ È IL GDL PONENDOCI NEL SDR SOLIDALE.
VANNO QUINDI ESPRESSI $\vec{\omega}^{TR}$ E $\vec{v}^{R}$ IN TERMINI DI QUESTE GRANDEZZE.

$$\vec{F}_{CORIOLIS} = \int_0^L -2\hat{\hat{e}}\,d\xi\,\Omega\,\hat{e}_2 \times \frac{d\vec{y}(\xi)}{dt} \rightarrow \dot{\vec{y}}(\xi)$$

QUANDO SI SVOLGONO GLI INTEGRALI, SI POSSONO ESPRIMERE IN QUALSIASI SDR, POICHÉ SONO INVARIANTI DALL'SDR

ESPRIMO $\vec{y}_P(\xi) = -\xi\cos\theta\,\hat{e}_2 + \xi\sin\theta\,\hat{e}_1$
DA CUI DERIVANDO:

$$\dot{\vec{y}}_P(\xi) = \frac{d\vec{y}_P(\xi)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\xi(\sin\theta\,\hat{e}_1 - \cos\theta\,\hat{e}_2)\right]$$

IN CUI ξ NON DIPENDE DAL TEMPO DURANTE IL MOTO.

$$= \xi\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 + \xi\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{e}_2 = \xi(\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{e}_2)$$

SI POSSONO ANCHE APPLICARE LE FORMULE DI POISSON

$$\frac{d\vec{y}(\xi)}{dt} = \underset{\text{RELATIVA}}{\vec{\omega}^{R}} \times \vec{y}(\xi)$$

QUINDI:

$$d\vec{f}_{CORIOLIS} \Rightarrow \vec{F}_{COR} = \int_0^L -2\hat{\hat{e}}\,d\xi\,\Omega\,\hat{e}_2 \times \left[\xi\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{e}_1 + \sin\theta\,\hat{e}_2)\right]$$

RISCRITTO MEGLIO:

$$\vec{F}_{CORIOLIS} = -2\int_0^L \hat{\hat{e}}\,\xi\,\Omega\,\hat{e}_2 \times (\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{e}_2)\,d\xi$$

SE $\hat{\hat{e}}$ È UNIFORME ALLORA SI AVRÀ:

$$\vec{F}_{CORIOLIS} = 2m\Omega\dot{\theta}\cos\theta\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^L = mL^2\Omega\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{e}_3$$

CORRISPONDE AL VALORE CHE LA REAZIONE DELLA CERNIERA OPPONE.

DIAGONALIZZAZIONE / CONTINUO T. KOENIG

LEZIONE IN CUI SONO MANCATO

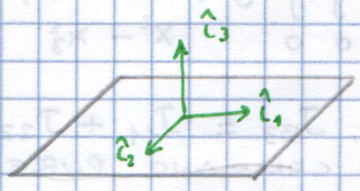
CONTINUO TEOREMA DI KOENIG

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \underline{\omega}^T \underbrace{\underline{\underline{J}}^G \underline{\omega}}_{h_G} = \frac{1}{2} M v_G^2 + \underline{\omega}^T \underline{h}_G = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \omega_k h_{G_k}$$

$$= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{h}_G$$

RIPRENDENDO IL CASO 2D VISTO IN PRECEDENZA:

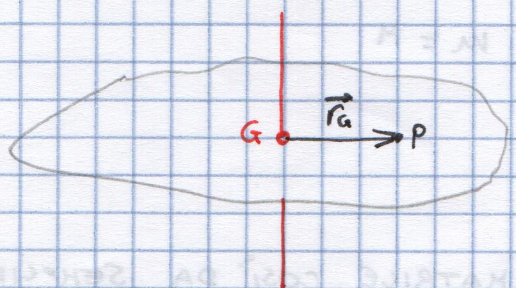
$$\underline{\omega}^T \underline{\underline{J}}^G \underline{\omega} = \{0; 0; \omega_3\} \begin{Bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = J_{33}\, \omega_3$$



QUINDI:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \omega J_G \omega = \frac{1}{2} M v_G^2 + J^G \omega^2$$

↳ MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AD UN ASSE, CON POLO NEL C.M., ORTOGONALE AL PIANO DEL MOTO



QUINDI CALCOLANDO IL MOMENTO DI INERZIA:

$$\frac{1}{2}\int_D \hat{\rho} |v|^2 \, dD = \frac{1}{2}\int_D \hat{\rho} |\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 dD \Rightarrow T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2}\int_D \hat{\rho} \underbrace{|\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2}_{} dD +$$

$$+ 2\int_D \hat{\rho} \,\cancel{(\vec{v}_G) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)}\, dD$$

PER $\perp$

$|\omega r \sin\theta \ldots|^2$

DOVE $\sin\theta = 1$

$\theta = 90°$

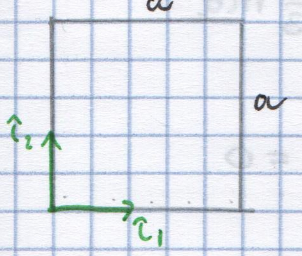
$|\omega^2 r_G^2|$

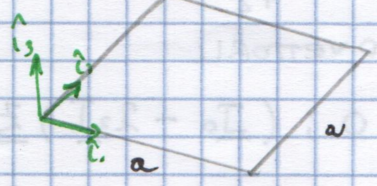
QUINDI:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{r^2 = J_{33} = J_G}$$

CALCOLO MATRICE DI INERZIA E DIAGONALIZZAZIONE





$$J_{11} = \iint_S \hat{e}\,(x^2 - x_1^2)\,dS = \iint_S \hat{e}\,(x_2^2 + \cancel{x_3^2})\,dx_1 dx_2 = \int_0^a\!\!\int_0^a \hat{e}\,x_2^2\,dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^a \hat{e}\left[\frac{x_2^3}{3}\right]_0^a dx_1 = \int_0^a \hat{e}\,\frac{a^3}{3}\,dx_1 = \hat{e}\,\frac{a^3}{3}\left[x\right]_0^a = \hat{e}\,\frac{a^4}{3} = J_{11} \Rightarrow$$

ESSENDO POI $m = \hat{e}\,a^2$

$m = \rho\, a \cdot a$

ALLORA $J_{11} = m\dfrac{a^2}{3}$

CALCOLO ORA J_{33}:

$$J_{33} = \int_0^a\!\!\int_0^a \hat{e}\,(\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{x^2 - x_3^2})\,dx_1 dx_2 = \underbrace{\int_0^a\!\!\int_0^a \hat{e}\,x_1^2\,dx_1 dx_2}_{J_{22}} + \underbrace{\int_0^a\!\!\int_0^a \hat{e}\,x_2^2\,dx_1 dx_2}_{J_{11}}$$

QUINDI $J_{33} = J_{11} + J_{22}$

POI SI CALCOLANO PURE I PRODOTTI DI INERZIA E ALLA FINE ESCE FUORI:

$$\underline{\underline{J}}^{\circ} = \begin{bmatrix} m\frac{a^2}{3} & -m\frac{a^2}{4} & 0 \\ -m\frac{a^2}{4} & m\frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -ma^2\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$m = M$

CERCO QUINDI UNA FORMA DIAGONALE DELLA MATRICE COSÌ DA SEMPLIFICARE LE EQUAZIONI.

$$(\underline{\underline{J}}^{\circ} - \lambda\,\underline{\underline{I}})\,\underline{z} = 0$$

$$ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = 0$$

SVOLGENDO IL DET $[\overset{J^{\circ}}{A} - \lambda I] = 0$

$$\frac{1}{27}\left[(1-3\lambda)^2(2-3\lambda)\right] - \frac{1}{48}(2-3\lambda) = 0$$

SVOLGENDO I CALCOLI: $\lambda_1 = \dfrac{ma^2}{12}$ $\quad \lambda_2 = \dfrac{7}{12}ma^2$ $\quad \lambda_3 = \dfrac{2}{3}ma^2$

A QUESTO PUNTO SI TROVANO GLI AUTOVETTORI:

$$(\underline{J}_0 - \lambda_1 \underline{I})\,\underline{z}^{(1)} = 0\ ;\ (\underline{J}_0 - \lambda_2 \underline{I})\,\underline{z}^{(2)} = 0\ ;\ (\underline{J}_0 - \lambda_3 \underline{I})\,\underline{z}^{(3)} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{ma^2}{12} \to \underline{z}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{7}{12} ma^2 \to \underline{z}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3} ma^2 \to \underline{z}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$ $\Rightarrow$ GIÀ VEDO CHE È ORTOGONALE SU $\hat{i}_1$ E $\hat{i}_2$

PER VERIFICARE ORTOGONALITÀ

$$\underline{z}^{(i)T} \underline{z}^{(j)} = 2\,\delta_{ij} \quad ?$$

PER ORTONORMALITÀ

$$\underline{z}^{(1)T} \underline{z}^{(j)} = \delta_{ij} \quad ?$$

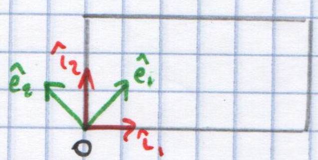
es.

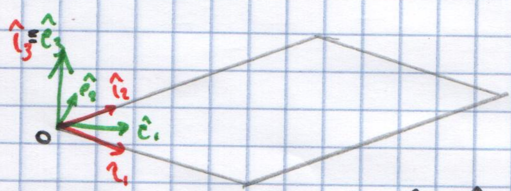
$$\underline{z}^{(1)T} \underline{z}^{(2)} = \{1;\ 1;\ 0\} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

VANNO NORMALIZZATI

$$\underset{\downarrow\ \hat{e}_1}{\underline{z}^{(1)}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \underset{\downarrow\ \hat{e}_2}{\underline{z}^{(2)}} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underset{\downarrow\ \hat{e}_3}{\underline{z}^{(3)}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

QUINDI SULLA LASTRA DI PRIMA





SCEGLIENDO QUINDI IL SDR $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ HO LA MATRICE DI INERZIA DIAGONALE:

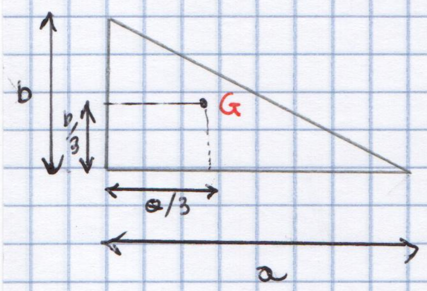
$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{z}}^T \underline{\underline{J}}^o \underline{\underline{z}} \to \underline{\underline{z}} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$ MATRICE DEL CAMBIAMENTO

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos/\sin(45°)$ QUINDI SIGNIFICA CHE ABBIAMO RUOTATO

IN QUESTO CASO GLI ASSI TROVATI DEFINISCONO UN NUOVO SDR
DIREZIONI PRINCIPALI DEL CORPO RISPETTO AL POLO O
SE FOSSE STATO SCELTO IL CM COME POLO SI SAREBBERO CHIAMATI DIREZIONI CENTRALI.
GLI AUTOVALORI SONO I MOMENTI CENTRALI (O PRINCIPALI)

CENTRI GEOMETRICI

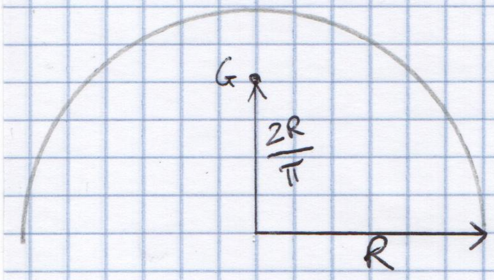
NEL NOSTRO STUDIO, CONSIDERANDO ρ COSTANTE E g COSTANTE E UNIFORME, IL CENTRO GEOMETRICO CORRISPONDE AL CENTRO DI MASSA E BARICENTRO OSSIA DOVE APPLICHIAMO LA FORZA PESO.



TRIANGOLO OMOGENEO

SI TROVA A (DATI a, b I CATETI)

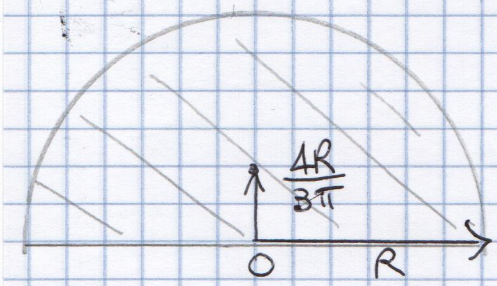
$\frac{a}{3}$ E $\frac{b}{3}$



SEMICIRCONFERENZA OMOGENEA

DATO IL RAGGIO R SI TROVA A:

$\frac{2R}{\pi}$ DALL'ORIGINE



SEMICERCHIO OMOGENEO

DATO IL RAGGIO R SI TROVA A:

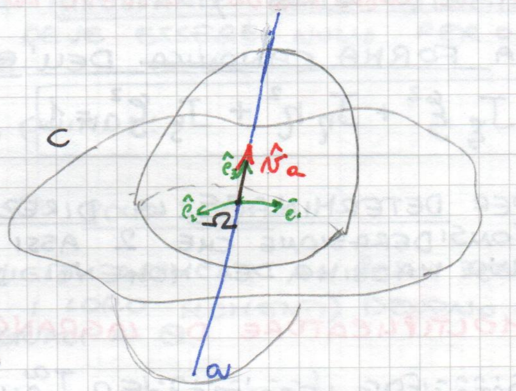
$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ DALL'ORIGINE

ELLISSOIDE DI INERZIA

DIMOSTRAZIONE DA APPENDICE

LA DIMOSTRAZIONE DELL'ELLISSOIDE DI INERZIA SERVE AL CALCOLO DEGLI ASSI CENTRALI DI UN DATO CORPO (CI SI ERA ARRIVATI TRAMITE LA DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE DI INERZIA). ANCHE QUI SI ARRIVERÀ ALLA DEFINIZIONE DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI.

SI CONSIDERA UN CORPO RIGIDO C ED UN RIFERIMENTO $R(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ SOLIDALE.
SI DEFINISCE a LA RETTA PASSANTE PER Ω (UNA TRA LE TANTE).



SI INDIVIDUA LA DIREZIONE DELLA RETTA TRAMITE I COSENI DIRETTORI α, β, γ:

$$\hat{\nu}_a = \alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \gamma\hat{e}_3$$

SI DEFINISCE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO ALLA DIREZIONE a.

$$J^a = \iiint_V \rho\,|\hat{\nu}_a \times \vec{x}|^2 dV = \iiint \rho D^2 dV$$

DOVE D È LA DISTANZA TRA IL GENERICO PUNTO E L'ASSE a.

SI CALCOLA ESPLICITAMENTE D:

$\vec{x}$ È GENERICO PUNTO: $\vec{x} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$

$$\hat{\nu}_a \times \vec{x} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\beta z - \gamma y)\hat{e}_1 - (\alpha z - \gamma x)\hat{e}_2 + (\alpha y - \beta x)\hat{e}_3$$

$$(\beta z - \gamma y)\hat{e}_1 + (\gamma x - \alpha z)\hat{e}_2 + (\alpha y - \beta x)\hat{e}_3$$

NON CI INTERESSA LA DIREZIONE MA IL MODULO, QUINDI PRENDO:

$$D^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 = |\hat{\nu}_a \times \vec{x}|^2$$

$$D^2 = \beta^2 z^2 + \gamma^2 y^2 - 2\beta z\gamma y + \gamma^2 x^2 + \alpha^2 z^2 - 2\gamma x\alpha z + \alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 - 2\alpha y\beta x$$

RAGGRUPPANDO I TERMINI SENZA IL 2 PER α, β, γ:

$$D^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta z\gamma y - 2\gamma x\alpha z - 2\alpha y\beta x$$

SOSTITUENDO QUESTO RISULTATO IN J^a OTTERREI

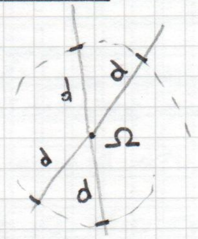
$$J^a = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\beta\gamma J_{yz} - 2\alpha\gamma J_{xz} - 2\alpha\beta J_{yx} \quad *$$

QUINDI NOTI I 6 TERMINI (MOMENTI E PRODOTTI DI INERZIA) CHE DEFINISCONO LA DISTRIBUZIONE DI MASSA ATTORNO AD Ω SI PUÒ QUINDI CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO A QUALUNQUE ASSE PASSANTE PER Ω.

SULLA STELLA DI RETTE SI INDIVIDUANO I PUNTI A DISTANZA:

$$d = \sqrt{\frac{1}{J^a}}$$

QUINDI LE INFINITE RETTE PASSANTI PER Ω AVRANNO DUE PUNTI CIASCUNA A DISTANZA d



MOMENTO DI INERZIA DELLA RETTA a

IL GENERICO PUNTO (CIOÈ I DUE PUNTI) DEFINITI SU a SARANNO DELLA FORMA:

$$\vec{x}^a = d\alpha\hat{e}_1 + d\beta\hat{e}_2 + d\gamma\hat{e}_3 = d(\alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2 + \gamma\hat{e}_3)$$

CON α, β, γ COSENI DIRETTORI DEFINITI PRIMA

L'INSIEME DEI PUNTI COSÌ DEFINITI FORMERÀ UN LUOGO NELLO SPAZIO TALE CHE:

$$\alpha = \frac{x}{d} \leftrightarrow d\alpha = x \; ; \; \beta = \frac{y}{d} \leftrightarrow d\beta = y \; ; \; \gamma = \frac{z}{d} \leftrightarrow d\gamma = z$$

SOSTITUENDO QUESTE RELAZIONI IN $*$:

$$\frac{x^2}{d^2}J_x + \frac{y^2}{d^2}J_y + \frac{z^2}{d^2}J_z - 2\frac{yz}{d^2}J_{yz} - 2\frac{xz}{d^2}J_{xz} - 2\frac{xy}{d^2} = J^a$$

PORTANDO AL SECONDO MEMBRO IL d^2 E RICORDANDO CHE $d = \sqrt{\frac{1}{J^{\alpha}}}$ SI OTTIENE:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2 J_{xy} xy - 2 J_{xz} xz - 2 J_{yz} yz = 1 \quad *$$

CHE DEFINISCE UN ELLISSOIDE DI CENTRO Ω, CARATTERIZZATO DA ASSI PRINCIPALI DI C (CORPO RIGIDO) RISPETTO AD Ω. SE $\Omega \equiv G$ ALLORA SI HANNO ASSI CENTRALI.

LA FORMA CANONICA DELL'ELLISSOIDE È: (CON G)

$$\boxed{J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = 1}$$

PER DETERMINARE LA DIREZIONE DEGLI ASSI PRINCIPALI (O CENTRALI QUINDI) SI PARTE DALLA CONSIDERAZIONE CHE 2 ASSI DEVONO ESSERE RISPETTIVAMENTE UNO MINIMO E UNO MASSIMO DEI MOMENTI DI INERZIA.

MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

RIPRENDO L'EQUAZIONE $J^{\alpha} = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2 J_{xy} \alpha\beta - 2 J_{xz} \alpha\gamma - 2 J_{yz} \beta\gamma$

E RICORDANDO CHE PER DEFINIZIONE DI COSENO DIRETTORE VALE:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad \text{(È IL VINCOLO)}$$

$$\begin{cases} f_\alpha = \lambda g_\alpha \\ f_\beta = \lambda g_\beta \\ f_\gamma = \lambda g_\gamma \\ f_\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha J_x - 2 J_{xy} \beta - 2 J_{xz} \gamma = 2\alpha\lambda \\ 2\beta J_y - 2 J_{xy} \alpha - 2 J_{yz} \gamma = 2\beta\lambda \\ 2\gamma J_z - 2 J_{xz} \alpha - 2 J_{yz} \beta = 2\gamma\lambda \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

SEMPLIFICANDO IL DUE (2)

SE SI ESPRIME $\underline{w} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix}$ SI NOTA CHE IL SISTEMA PUÒ ESSERE RISCRITTO COME:

$$\boxed{\underline{\underline{J}}^{\Omega} \underline{w} = \lambda \underline{w}}$$

RAPPRESENTA UN PROBLEMA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI E LA SOLUZIONE ESISTE IN QUANTO LA MATRICE $\underline{\underline{J}}^{\Omega}$ È SIMMETRICA.

TROVATI GLI AUTOVALORI λ CHE SARANNO DEL TIPO:

$\alpha^1, \beta^1, \gamma^1 \rightarrow$ SOSTITUENDOLI IN J^{α} PER TROVARE L'AUTOVETTORE RELATIVO ALL'AUTOVALORE

* USANDO L'EQ. DI SOPRA OTTENGO

SVOLGIMENTO NON CONCLUSO

ELEMENTI DI STATICA DEL CORPO RIGIDO

INDICANDO CON $\vec{X}_E$ UNA POSIZIONE SPAZIALE DEL CORPO RIGIDO PER CUI SI HA EQUILIBRIO STATICO, ALLORA SIGNIFICA CHE:

$$\vec{F}(\vec{X},\vec{V},t)\Big|_{EQ} = \vec{F}(\vec{X}_E,\vec{0},t) = \vec{0} \quad \forall t$$

LA RISULTANTE DELLE SOLLECITAZIONI DEVE ESSERE NULLA PER OGNI t

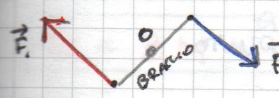
LO STESSO VALE PER IL MOMENTO RISULTANTE, QUINDI:

$$\vec{M}^{o}(\vec{X},\vec{V},t)\Big|_{EQ} = \vec{M}^{o}(\vec{X}_E,\vec{0},t) = \vec{0} \quad \forall t \ \text{e} \ \forall O \ \text{POLO SCELTO}$$

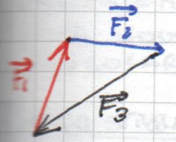
QUESTE SONO LE EQUAZIONI CARDINALI DEI CORPI RIGIDI APPLICATI AL CASO DELLA STATICA: FORZE ATTIVE, VINCOLARI E APPARENTI (QUINDI I LORO MOMENTI) DEVONO ESSERE TALI CHE LE RISPETTIVE RISULTANTI SIANO UGUALI A 0.

METODO GRAFICO DI ANALISI STATICA

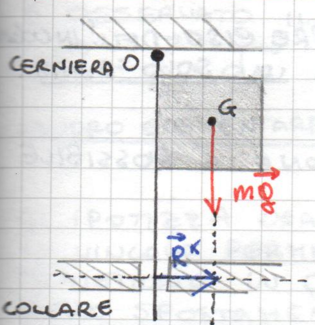
(a) 2 FORZE: È IL CASO PIÙ SEMPLICE. BASTA CHE IL BRACCIO DELLA COPPIA DI FORZE SIA NULLO



(b) 3 FORZE: LE FORZE DEVONO APPARTENERE A STESSO PIANO. LE FORZE DEVONO FORMARE UN TRIANGOLO CHIUSO, QUINDI BASTA TRASLARE OPPORTUNAMENTE I VETTORI CHE RAPPRESENTANO LE SOLLECITAZIONI.
I VETTORI (LE RETTE DI AZIONE) DEVONO PRESENTARE UN PUNTO IN COMUNE

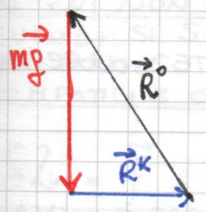


(c) VINCOLI SENZA ATTRITO - LISCI



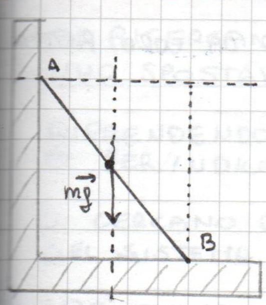
HO LAMINA OMOGENEA FISSATA SU CERNIERA CON ASSE DI CERNIERA ORTOGONALE AL FOGLIO QUINDI INIBISCE MOTO DI TRASLAZIONE RISPETTO GLI ALTRI ASSI.
AGISCE LA FORZA PESO APPLICATA AL CM.
IL COLLARE BLOCCA L'UNICO GDL DELLA CERNIERA.
VOGLIO DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI IN CASO IDEALE (NO ATTRITO)

LA RETTA DI AZIONE DELLA F. PESO LA SI CONOSCE, COME ANCHE LA REAZIONE DEL COLLARE, QUINDI PER DETERMINARE GRAFICAMENTE LA REAZIONE DELLA CERNIERA BASTA CHIUDERE IL TRIANGOLO.



$$m\vec{g} + \vec{R}^{o} + \vec{R}^{K} = \vec{0}$$

(d) VINCOLI CON ATTRITO - SCABRI



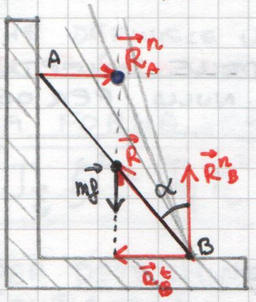
NO ATTRITO
NO EQUILIBRIO

HO SBARRA OMOGENEA, APPLICO LA FORZA PESO NEL CENTRO DI MASSA.
SE IPOTIZZASSIMO IL CASO DI NO ATTRITO IN A E B, NON AVREMMO UN PUNTO IN COMUNE TRA I 3 VETTORI, QUINDI LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO NON È SODDISFATTA

REAZIONE IN B

SE SI HA ATTRITO ALLORA VA CONSIDERATO ATTRITO STATICO:

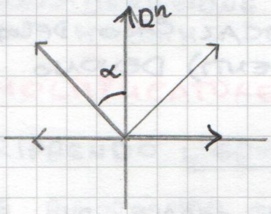
$R^t \le R^n \phi_s \rightarrow \boxed{\phi_s \ge \frac{R^t}{R^n}}$ DEVE VALERE QUESTA CONDIZIONE



$\phi_s \ge \tan(\alpha) \rightarrow \arctan(\phi_s) \ge \alpha$

SI È TROVATO UN VALORE LIMITE

SUPERATO QUEL DATO VALORE DI R^t SI ENTRA NELL'ATTRITO DINAMICO QUINDI FORMO IN 2D UN TRIANGOLO (3D UN CONO) PER CUI SONO NEL CASO STATICO.

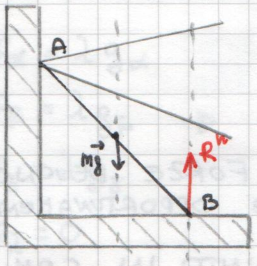


FINCHÉ REAZIONE COMPLESSIVA FORMA UN ANGOLO $\le \arctan \phi_s$ ALLORA VA BENE.

ESISTE QUINDI UN PUNTO IN CUI SI HA INTERSEZIONI TRA LE 3 RETTE D'AZIONE.

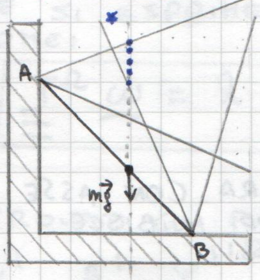
IN REALTÀ MODIFICANDO α HO INFINITE POSIZIONI DI EQUILIBRIO POICHÉ VARIA ANCHE L'INCLINAZIONE DELLA SBARRA.

REAZIONE IN A



NEL CASO DI UNA REAZIONE CON ATTRITO IN A NON C'È EQUILIBRIO POICHÉ NON C'È ALCUN PUNTO IN COMUNE TRA LE 3 RETTE D'AZIONE.

REAZIONE IN A E B

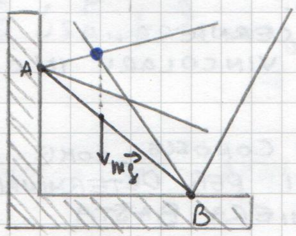


SI HANNO DUE CONI CON REGIONE IN COMUNE, IL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE FORZE DEVE CADERE NELL'AREA IN COMUNE.

HO QUINDI TROVATO UN INSIEME DI PUNTI CHE SODDISFANO

* L'EQUAZIONE DELLA STATICA.

NON È PERÒ POSSIBILE TROVARE IL PUNTO PRECISO DELL'INCOGNITA LO SI PUÒ RISOLVERE SOLO QUANDO SI HA UN SOLO PUNTO.



QUINDI AVENDO 1 SOLO PUNTO DI INTERSEZIONE È POSSIBILE TROVARE LE REAZIONI VINCOLARI.

RIPRENDENDO IL DISCORSO SU $\vec{F}$ E $\vec{M}^o$, SI POSSONO SOSTITUIRE QUESTE SOLLECITAZIONI CON DELLE SOLLECITAZIONI EQUIVALENTI MEDIANTE LE OPERAZIONI DI:

- AGGIUNTA DI UNA COPPIA DI BRACCIO NULLO
- SOSTITUZIONE DI PIÙ FORZE APPLICATE IN UN MEDESIMO PUNTO CON LA LORO SOMMA APPLICATA NELLO STESSO PUNTO.
- SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DI UNA O PIÙ FORZE LUNGO LA LORO RETTA DI AZIONE.

INOLTRE PER TRINOMIO INVARIANTE SI INTENDE:

$\vec{M}^o \cdot \vec{F}$ Q.TÀ SCALARE CHE NON VARIA MODIFICANDO IL POLO

MECCANICA LAGRANGIANA

È NUOVO APPROCCIO ALLO STUDIO DELLA MECCANICA.

COSA C'È DIETRO ALL'APPROCCIO LAGRANGIANO?
IPOTIZZO DI AVERE UN P.TO MATERIALE, UN CORPO RIGIDO, UN SISTEMA DI N-P.TI MATERIALI O UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI A CUI ASSOCIAMO N GRADI DI LIBERTÀ E P VINCOLI CHE QUINDI SOTTRAGGONO/INIBISCONO P GDL.

HO QUINDI M $\frac{\text{CORPI}}{\text{PUNTI}}$, N GDL E P VINCOLI (GDL SOTTRATTI DAI VINCOLI)
AD OGNI GDL SOTTRATTO NASCE UNA INCOGNITA AUSILIARIA

P.TI $3 \cdot M$ CORPI $6 \cdot M$

CON L'APPROCCIO NORMALE (NEWTONIANO) SI PARTIVA CON IL CALCOLO DELL'EQUAZIONE DEL MOTO E POI SI PASSAVA A CALCOLARE LE REAZIONI VINCOLARI

NEL CASO DEL PENDOLO SI LINEARIZZAVA L'EQ. SCALARE LUNGO IL GDL E POI CONOSCENDO $\theta(t)$ SI SOSTITUIVA LUNGO L'ALTRA EQ. SCALARE DELLA REAZIONE.

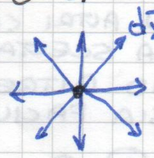
IL PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO AFFERMA CHE SE IL MIO PUNTO (SISTEMA, CORPO, ECC) SI MUOVE SOLO LUNGO GLI N GDL RESIDUI OSSIA

$\boxed{N = 3M - P}$ CASO DEL S. DI PUNTI $\boxed{N = 6M - P}$ CASO CORPI

PERCHÈ NON SI FORMULA IL PROBLEMA COSÌ DA AVERE N EQUAZIONI CHE FORNISCONO LA LEGGE DEL MOTO FILTRANDO LE INCOGNITE AUSILIARIE?
PER L'INGEGNERIA QUESTO NON È BUONO, LE REAZIONI VANNO CALCOLATE.
SI IMPOSTA PERÒ IL PROBLEMA IN QUESTO MODO IN MODO TALE DA TROVARE PIÙ SEMPLICEMENTE L'EQUAZIONE DEL MOTO.
UNA VOLTA TROVATA L'EQ. DEL MOTO SI TORNA INDIETRO CALCOLANDO LE REAZIONI VINCOLARI.

1 COME SI SVOLGE QUESTO APPROCCIO?

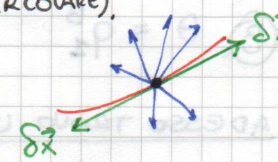
IPOTIZZANDO UN P.TO MATERIALE (È ESTENDIBILE A CORPI RIGIDI).
QUANDO SI È STUDIATA LA DINAMICA SI È PARTITI DALLA I EQ. CARDINALE E SI È OSSERVATO IL FENOMENO INTRODUCENDO:



$d\mathcal{L} = \vec{f} \cdot d\vec{x}$ IN CUI $d\vec{x}$ È UN GENERICO SPOSTAMENTO, QUALSIASI.

LAVORO ELEMENTARE $\vec{f}$ RISULTANTE F. ATTIVE

SI IPOTIZZA ORA CHE IL P.TO MATERIALE È VINCOLATO (ES. GUIDA CIRCOLARE).
IL VINCOLO PERMETTE AL P.TO DI SPOSTARSI SOLO LUNGO LA TRAIETTORIA. IN QUESTO CASO L'ARBITRARIETÀ DELLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO PUÒ ESSERE RISTRETTA ALL'ARBITRARIETÀ DELLO SPOSTAMENTO STESSO ELIMINANDO TUTTE QUELLE DIREZIONI IN CUI NON PUÒ SPOSTARSI



QUINDI SI SPOSTA L'ATTENZIONE NON SU UN GENERICO SPOSTAMENTO INFINITESIMO MA SOLO SU QUELLO POSSIBILE, CHIAMATO SPOSTAMENTO VIRTUALE OSSIA QUELLO COMPATIBILE CON I VINCOLI, IN QUESTO CASO LA DIREZIONE VERDE.

$\boxed{\delta\mathcal{L} = \vec{f} \cdot \delta\vec{x}}$ LAVORO VIRTUALE ELEMENTARE

2 COME SI APPLICA QUESTO CONCETTO? VANNO RISCRITTE LE EQUAZIONI.
SI RICERCANO QUINDI I PARAMETRI INDIPENDENTI NECESSARI E SUFF. AD ESPRIMERE UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE.

RIPRENDENDO IL PENDOLO SI PROIETTAVA LUNGO $\hat{t}$ ED $\hat{n}$, BASTAVA IL PARAMETRO θ PER INDICARE UNIVOCAMENTE IL P.TO MATERIALE.

SI CERCANO QUINDI GLI N PARAMETRI INDIPENDENTI PER IDENTIFICARE LA CONFIG. DEL SISTEMA.

3 IDENTIFICATI I PARAMETRI, COME ESPRIMO IL LAVORO VIRTUALE? DIPENDE DALLA NATURA DEL VINCOLO

L'ELEMENTO VINCOLATO PUÒ ESSERE ESPRESSO COME:

$$\boxed{\vec{x}_K(t) = \vec{x}_K\left[q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)\right]} \qquad K = 1, \dots, N$$

EQ. DEL MOTO

SISTEMA DI N. P.TI MATERIALI

NOI CI CONCENTRIAMO SU VINCOLI OLONOMI, QUINDI CI SI RIFERISCE SEMPRE A SISTEMI OLONOMI, OSSIA SISTEMI NEI QUALI:

1) LE RELAZIONI $\vec{x}_K$ SONO FINITE (DI TIPO ALGEBRICO) $\left\{ \phi_{VINCOLO}(q_1, q_2, \dots q_N) \right)$

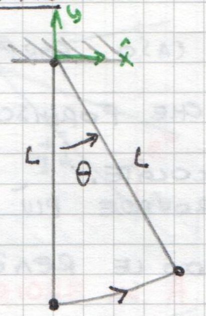
2) SE SONO RELAZIONI DIFFERENZIALI, DEVONO ESSERE INTEGRABILI

3) IL TEMPO È COME INDICATO, OVVERO NON C'È DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO MA SOLO TRAMITE PARAMETRI → VINCOLO SCLERONOMO

NON È DEFINIZIONE UNIVOCA, È LA NOSTRA PER QUESTO STUDIO. SU ALTRI LIBRI È DIVERSO.

CIÒ CHE NON È DENTRO QUESTE DEFINIZIONE È ANOLONOMO. È DIFFICILE CLASSIFICARE TUTTE LE TIPOLOGIE DI VINCOLO.

ESEMPIO:



HA 1 GDL, NECESSITA DI 1 PARAMETRO (θ o s) PER DESCRIVERLO.

TRA θ E s IN QUESTO CONTESTO NON C'È DIFFERENZA

$\boxed{s = R\theta}$ DOVE R = COSTANTE

OVVIAMENTE SCEGLIENDO s O θ LE EQUAZIONI SARANNO DIVERSE. LE DIMENSIONI FISICHE SONO DIVERSE (DIMENSIONE DELL'ASCISSA NON È UGUALE A QUELLA DI UN ANGOLO).

$$(A)\ \vec{x}(t) = \begin{cases} L\cos\left(\frac{s}{L}(t)\right) \\ -L\sin\left(\frac{s}{L}(t)\right) \end{cases} \qquad (B)\ \vec{x}(t) = \begin{cases} L\cos(\theta(t)) \\ -L\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

IN ALTRI CASI POTREI SCEGLIERE TRA MOLTI PIÙ PARAMETRI. LA SCELTA DEI PARAMETRI CI PORTA A DELLE EQUAZIONI, UN'ALTRA SCELTA CI PORTA AD ALTRE EQUAZIONI EQUIVALENTI MA FORMALMENTE DIVERSE E NON È DETTO CHE SIA FACILE CAPIRE IL LEGAME.

(A) $s = q_1^A$

VARIABILI LAGRANGIANE

(B) $\theta = q_1^B$

4) ADESSO TROVO LE EQUAZIONI: DIMOSTRAZIONE SU DISPENSA

LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DELLA K-ESIMA PARTICELLA È $\delta\vec{x}_K$ E VARIA IN BASE ALLA VARIAZIONE DEI PARAMETRI

$$\delta\vec{x}_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i}\delta q_i \ *$$

DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE: VARIAZIONE LUNGO IL PARAMETRO PER IL PARAMETRO STESSO

TROVO LA DEFINIZIONE DI LAVORO ELEMENTARE: PARTO DALL'EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO E MOLTIPLICO SCALARMENTE PER LO SPOSTAMENTO VIRTUALE INFINITESIMO

$$\left(\sum_{K=1}^{M} m_K\vec{a}_K - \vec{f}_K\right)\cdot\delta\vec{x}_K = \vec{0}$$

QUINDI SOSTITUENDO * NELL'EQ. DI NEWTON E PORTANDO UN TERMINE AL SECONDO MEMBRO:

$$\sum_{K=1}^{M} m_K\vec{a}_K \cdot \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{K=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\vec{f}_K\cdot\frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i}\delta q_i \rightarrow$$

PORTANDO FUORI LA SOMMATORIA PER i

EQUAZIONE DOPO

q_i NON DIPENDE DA INDICE K E $m_K\vec{a}_K$ NON DIPENDONO DA i

DATA L'ARBITRARIETÀ DELLO SPOSTAMENTO VIRTUALE POSSO RISCRIVERE IL TUTTO COME:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{M} m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{M} \vec{f}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}}_{\text{LAVORO ELEMENTARE}}\right)\delta q_i$$

DIVENTA CONSIDERANDO IL I-ESIMO SPOST. VIRTUALE

$$\sum_{k=1}^{M} m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} = \boxed{Q_i}$$

* FORZA GENERALIZZATA

DIMENSIONALMENTE È UN LAVORO

QUINDI:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{M} \vec{f}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \delta \mathcal{L} \leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} Q_i\, \delta q_i = \delta \mathcal{L}}$$

INVERSIONE DELLE SOMMATORIE

LAVORO TOTALE DI TUTTE LE FORZE ESTERNE

VARIAZIONE INFINITESIMA DEL PARAMETRO LAGRANGIANO

FORZA GENERALIZZATA È UN LAVORO, TOTALE DI TUTTE LE PARTICELLE, DI TUTTE LE FORZE, SOMMANDO UNA VARIAZIONE INFINITESIMA PER Q.

QUINDI:

$$\boxed{\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} Q_i\, \delta q_i}$$

Q_i LEGATO A $\vec{f}_k$, δq_i A $\frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}$

→ Q_i NON SONO LE FORZE ESTERNE MA È TERMINE CHE DIPENDE DALLE FORZE ESTERNE.

PER GIUNGERE ALLE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE ORA SI DEVE PASSARE A DEFINIRE L'ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA N-PARTICELLARE, COME:

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k}$$

DOVE SI DEFINISCE $\vec{v}_k$ COME:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{x}_k}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

↑ DERIVATA PARZIALE

↑ DIPENDONO SOLO DA t

PENSO CHE POI SI CONSIDERA UN SOLO i

↓ QUINDI

$$\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \xrightarrow[\dot{q}_i]{\text{PORTO AD UN MEMBRO}} \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}$$

QUINDI SI PASSA A DERIVARE L'ENERGIA CINETICA:

$$* \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{M} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}$$

SI EFFETTUANO DELLE DERIVATE DI PRODOTTI, ECCO COME SI LEVA IL 2

$$* \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{M} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k=1}^{M} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i}$$

QUINDI SI RIPRENDE L'EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA Q.TÀ DI MOTO (1° LEGGE CARDINALE), IN PARTICOLARE PRENDO IL MEMBRO CON IL CONTRIBUTO INERZIALE E NE FACCIO LO SCALARE PER. (CIOÈ RIPRENDO LA FORZA GENERALIZZATA *

$$\sum_{k=1}^{M} m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{M} m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{M} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_i}$$

SOMMO E SOTTRAGGO UNA Q.TÀ → E. CINETICA SENZA

ESPRIMO QUINDI UN TERMINE PORTANDO FUORI LA DERIVATA:

$$= \sum_{K=1}^{M} m_K \vec{a}_K \cdot \frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i} + \sum_{K=1}^{M} m_K \vec{v}_K \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i} - \sum_{K=1}^{M} m_K \vec{v}_K \cdot \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial q_i}$$

DOVE SI È USATO:

PENSO CHE SI MODIFICA E DIVIDE PER q_J

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i} = \sum_{J=1}^{N} \frac{\partial^2 \vec{x}_K}{\partial q_i \partial q_J} \dot{q}_J = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{x}_K}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial q_i}$$

A QUESTO PUNTO SI PROCEDE CON LA DEFINIZIONE DI DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{K=1}^{M} m_K \overset{*}{\vec{v}_K} \cdot \frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i} \right) - \sum_{K=1}^{M} m_K \overset{*}{\vec{v}_K} \cdot \frac{\partial \vec{v}_K}{\partial q_i}$$

QUINDI RICORDANDO LA * E * SI OTTIENE:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}$$

$i = 1, \dots, N$

* EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

SI OTTIENE PER L'INTERO SISTEMA:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, \dots, N$$

LE M EQUAZIONI DIFFERENZIALI FINALI SONO RISCRITTE TRAMITE L'ENERGIA CINETICA CI SONO QUINDI i- EQUAZIONI, PER OGNI PARAMETRO LAGRANGIANO.

FINORA NON SI È FATTA DIFFERENZA SULLA NATURA DELLE FORZE. SE LE F. SONO <u>CONSERVATIVE</u> POSSO PARLARE DI <u>ENERGIA POTENZIALE</u>.

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{K=1}^{M}\left(\vec{f}_K^{\,C} + \vec{f}_K^{\,NC}\right)\cdot\frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{K=1}^{M}\left(-\nabla U_K + \vec{f}_K^{\,NC}\right)\cdot\frac{\partial \vec{x}_K}{\partial q_i}\right)\delta q_i =$$

PER LA REGOLA DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N}\left[-\sum_{K=1}^{M}\frac{\partial U_K}{\partial q_i} + Q_i^{NC}\right]\delta q_i$$

RAPPRESENTANO LA DINAMICA DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

QUINDI L'ESPRESSIONE FINALE È:

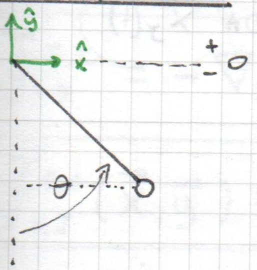
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^{NC}}$$

<u>EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE</u>

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q_i} = Q_i^{NC} \qquad \text{CON } \mathbb{L} = \mathcal{T} - U$$

FUNZIONE LAGRANGIANO

<u>ESEMPIO PENDOLO</u>



SI DECIDE IL PARAMETRO DA USARE $\rightarrow \theta(t)$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$$

ABBIAMO SOLO F. PESO CHE È F. CONSERVATIVA:

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{j} \quad \rightarrow U_{peso} = mgy \rightarrow -mgL\cos\theta = U_{peso}$$

DA CUI:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \longrightarrow \text{POI FACCIO } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta}$$

MENTRE

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = 0$$

E

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgL\sin\theta$$

QUINDI SI HA: $mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

ENERGIA MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI — APPENDICE A

SU UN SISTEMA N-PARTICELLARE AGISCONO FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE:

① $\vec{F}_K^E = \vec{F}_K^{E,C} + \vec{F}_K^{E,NC}$ FORZA K-ESIMA ESTERNA

② $\vec{F}_K^I = \sum_{J=1}^{N} \left(\vec{F}_{KJ}^{I,C} + \vec{F}_{KJ}^{I,NC} \right)$ FORZA K-ESIMA INTERNA

1° ENERGIA POTENZIALE RELATIVA A FORZE INTERNE ED ESTERNE CONSERVATIVE

I FORZE ESTERNE

NEL CASO DI FORZE ESTERNE CONSERVATIVE, FUNZIONI CHE DIPENDONO DALLA POSIZIONE OCCUPATA DALL'ELEMENTO STESSO:

① $\boxed{\vec{F}_K^{E,C} = -\nabla U_K^E(\vec{x})}$

DOVE $\vec{x} = \vec{x}_K(t)$ ED È POSIZIONE OCCUPATA DALLA K-ESIMA PARTICELLA ISTANTE PER ISTANTE.

ES. NEL CASO DI $\vec{F}_K^{E,C} = \vec{P}_K$ FORZA PESO AGENTE SU K-ESIMO ELEMENTO → SI AVRÀ CHE TUTTI I POTENZIALI SARANNO UGUALI TRA LORO.

II FORZE INTERNE

NEL CASO DI FORZE INTERNE CONSERVATIVE L'ENERGIA POTENZIALE DIPENDE DA 2 VARIABILI SPAZIALI:

$\vec{F}_{KJ}^I$ → DIPENDE DA $\vec{x}_K(t)$, PARTICELLA SU CUI AGISCE LA $\vec{F}_K$ E DA $\vec{x}_J(t)$ CHE AGISCE SUL K-ESIMO ELEMENTO

QUINDI

$$\vec{F}_{KJ}^I = \vec{F}_{KJ}^I(\vec{x}, \vec{y}) \quad \text{DOVE } \vec{x} = \vec{x}_K \text{ E } \vec{y} = \vec{x}_J$$

PERTANTO SI INTRODUCE:

② $\boxed{\vec{F}_{KJ}^I = -\nabla U_{KJ}^I(\vec{x}, \vec{y})}$ → DOVE ∇ È APPLICATO SU $\vec{x} = \vec{x}_K$ CIOÈ ∇_x IN QUANTO LA FORZA È APPLICATA SUL $\vec{x}_K$ ELEMENTO

↕ EQUIVALENTE A

DOVE AL POSTO DI $\vec{y} = \vec{x}_J(t)$

② $\boxed{\vec{F}_{KJ}^I = -\nabla U_{KJ}^I(\vec{x}, t)} \left(= -\nabla U_{KJ}^I(\vec{x}, \vec{x}_J(t)) = -\nabla U_{KJ}^I(\vec{x}, \vec{x}_J, t) \right)$

CHE INDICA CHE IL K-ESIMO ELEMENTO HA UNA ENERGIA POTENZIALE VARIABILE NEL TEMPO A CAUSA DEL MOTO DEL J-ESIMO ELEMENTO

2° LAVORO ESEGUITO DALLE FORZE ESTERNE ED INTERNE SU S

I FORZE ESTERNE

$$\mathcal{L}^E = \mathcal{L}_{1\to2}^{E,C} + \mathcal{L}_{1\to2}^{E,NC}$$

PER ARRIVARE ALL'ENUNCIATO CON L'EN. POTENZIALE SI DEVONO RIPRENDERE ALCUNE RELAZIONI

RICORDANDO CHE:

$$d\mathcal{L}^E = \sum_{K=1}^{N} \vec{f}_K^E \cdot d\vec{x}_K \longrightarrow d\mathcal{L}^E = \sum_{K=1}^{N} \left(\vec{f}_K^{E,C} + \vec{f}_K^{E,NC}\right) \cdot d\vec{x}_K$$

RICORDANDO CHE $\vec{f}_K^E = \vec{f}_K^{E,C} + \vec{f}_K^{E,NC}$

QUINDI SVOLGENDO LE SOMMATORIE E RICORDANDO CHE $\vec{f}_K^{E,C} = -\nabla U_K^E(\vec{x})$

$$\mathcal{L}^E = -\nabla U^E + \mathcal{L}^{E,NC}_{C(1\to2)} = U_1^E - U_2^E + \mathcal{L}^{E,NC}_{C(1\to2)}$$

II FORZE INTERNE

PER QUANTO RIGUARDA LE FORZE INTERNE VA RICORDATO CHE L'OPERATORE DIFFERENZIALE GRADIENTE ELEVA L'ORDINE DI UNA FUNZIONE SCALARE DEFINITA IN $\mathbb{R}^3$ IN UNA FUNZIONE VETTORIALE ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE DI ISOFUNZIONE, QUINDI CONSIDERANDO DUE POSIZIONI SPAZIALI $\vec{x}$ E $\vec{y}$ L'ENERGIA POTENZIALE, QUINDI IL POTENZIALE DEVE DIPENDERE DALLA DISTANZA TRA I DUE:

- $r(\vec{x},\vec{y})$ DISTANZA E • DIRETTA COME $\vec{x}_K - \vec{x}_J$

SI DEVE OSSERVARE POI CHE:

1) $\nabla_x U^I_{KJ} = -\nabla_y U^I_{KJ}$ $\qquad$ ∇_x GRADIENTE RISPETTO $\vec{x} = \vec{x}_K$

$\qquad\qquad$ ∇_y RISPETTO $\vec{y} = \vec{x}_J$

2) $U^I_{KJ}(\vec{x},\vec{y}) = U^I_{JK}(\vec{x},\vec{y})$

NE CONSEGUE CHE:

$$\boxed{\vec{f}^{I,C}_{KJ} = -\nabla_x U^I_{KJ} = \nabla_y U^I_{KJ} = \nabla_x U^I_{JK} = -\vec{f}^{I,C}_{JK}}$$

$$\boxed{\vec{f}^{I,C}_{KJ}(\vec{x},\vec{y}) = -\nabla U^I_{KJ}(r(\vec{x},\vec{y}))}$$

SI DEFINISCE ORA LA VARIAZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE RISPETTO A t ASSOCIATA ALLA $f^{I,C}_{KJ}$ DEL K-ESIMO ELEMENTO:

$$\boxed{U^I_{KJ}(t) = U^I_{JK}(\vec{x}_K(t), \vec{x}_J(t))} \quad 2) \qquad \frac{df}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

POICHÈ LA U È FUNZIONE COMPOSTA, DERIVANDOLA RISPETTO AL TEMPO:

- $$\frac{dU^I_{JK}}{dt} = \nabla_x U^I_{KJ} \cdot \frac{d\vec{x}_K}{dt} + \nabla_y U^I_{KJ} \cdot \frac{d\vec{x}_J}{dt} = -\vec{f}^I_{KJ} \cdot \vec{v}_K + \vec{f}^I_{KJ} \cdot \vec{v}_J = \vec{f}^I_{KJ}(\vec{v}_J - \vec{v}_K)$$

NE CONSEGUE

- $$dU^I_{JK} = f^I_{KJ}(\vec{v}_J - \vec{v}_K)\,dt \overset{f_{KJ} = -f_{JK}}{=} -\vec{f}^I_{JK} \cdot \vec{x}_J - \vec{f}^I_{KJ} \cdot \vec{x}_K = -\left(\vec{f}^I_{JK} \cdot \vec{x}_J + \vec{f}^I_{KJ} \cdot \vec{x}_K\right)$$

A QUESTO PUNTO RICORDANDO CHE:

$$\boxed{\mathcal{L}^I = \mathcal{L}^{I,C}_{C(1\to2)} + \mathcal{L}^{I,NC}_{C(1\to2)}}$$ IN CUI ESPRIMENDO $\mathcal{L}^{I,C}_{C(1\to2)}$ COME:

$$\mathcal{L}^{I,C}_{C(1\to2)} = \sum_{K=1}^{N} \int_C \vec{f}_K^I \cdot d\vec{x} = \sum_{K=1}^{N} \sum_{J=1}^{N} \int \vec{f}^I_{KJ} \cdot d\vec{x}$$ QUINDI SOSTITUENDO

$$\mathcal{L}^{I} = \mathcal{L}^{I,C}_{C(1\to 2)} + \mathcal{L}^{I,NC}_{C(1\to 2)} = \sum_{K=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}\int_{C(1\to 2)} \vec{f}^{I}_{KJ}\cdot d\vec{x} + \mathcal{L}^{I,NC}_{C(1\to 2)}$$

RICORDANDO POI CHE:

$$dU^{I}_{KJ} = -\left(\vec{f}^{I,C}_{KJ}\cdot d\vec{x}_K + \vec{f}^{I,C}_{JK}\cdot d\vec{x}_J\right)$$

ALLORA CAMBIANDO IL TERMINE DELLA SOMMATORIA SI OTTIENE

$$\boxed{\mathcal{L}^{I,C}_{C(1\to 2)} = -\sum_{K=1}^{N}\sum_{J=K+1}^{N}\int_{C(1\to 2)} dU^{I}_{KJ} = -\sum_{K=1}^{N}\sum_{J=K+1}^{N}\left(U^{I}_{KJ_2} - U^{I}_{KJ_1}\right) = U^{I}_{1} - U^{I}_{2}}$$

AVENDO MODIFICATO L'ESTREMO DELLA SOMMATORIA SI INTENDE PRENDERE COSÌ L'ENERGIA POTENZIALE DI UNA COPPIA DI FORZE SOLO UNA VOLTA.

DA CUI SI OTTIENE CHE LA ENERGIA MECCANICA DI UN SISTEMA S

$$\boxed{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}^{E,NC}_{C(1\to 2)} + \mathcal{L}^{I,NC}_{C(1\to 2)}}$$

DOVE:

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{T} + U^{E} + U^{I}}$$

3° POTENZA SVILUPPATA DALLE F. ESTERNE E F. INTERNE

RICORDANDO CHE:

(1) $$\frac{dU^{I}_{JK}}{dt} = \vec{f}^{I}_{KJ}\cdot(\vec{v}_J - \vec{v}_K) \quad \leftarrow \text{DIMOSTRATO PRIMA}$$

(2) $$\frac{dU^{E}_{K}}{dt} = \nabla U^{E}_{K}\cdot\frac{d\vec{x}_K}{dt} = -\vec{f}^{E,C}_{E}\cdot\vec{v}_K$$

COMBINANDO LE EQUAZIONI SVOLTE PRIMA SI OTTIENE:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = P^{E,NC} + P^{I,NC}$$

CONTINUO SU MECCANICA LAGRANGIANA

SI RIPARTE DA:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_K^{NC}$$

SI INTRODUCE LA FUNZIONE LAGRANGIANA $\mathbb{L}$

È MISURA DI QUANTA POSSIBILITÀ DI TRAVASO DI ENERGIA TRA I CAMPI CONSERVATIVI E È ATTO DI MODO SIA ANCORA POSSIBILE AVERE NELLE CONDIZIONI CHE SI STUDIANO. NON È L'ENERGIA MECCANICA.

$$\mathbb{L}=T-U$$

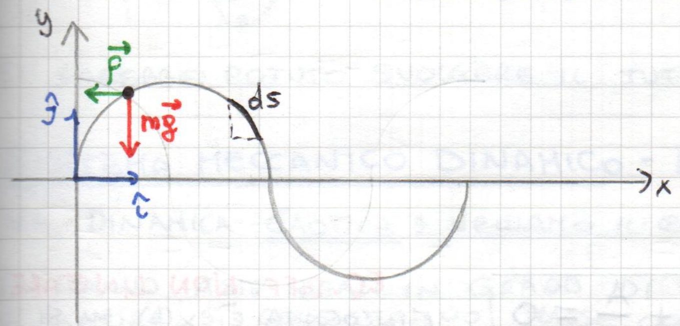
DA CUI:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q_i}=Q_i^{NC}}$$

ESEMPIO

GUIDA A FORMA DI SINX. PUNTO MATERIALE DEVE APPARTENERE A GUIDA ED È SOTTOPOSTO ALLA FORZA PESO. SI IMMAGINA ANCHE CHE AGISCE FORZA:

$\vec{F}=-\frac{A}{x^2}\hat{i}$ È QUALCOSA CHE ATTRAE A $x=0$ IL P.TO MATERIALE CON INTENSITÀ A CHE DIMINUISCE ALL'AUMENTARE DI x.
È UNA FORZA CONSERVATIVA.



$y(x)=\sin(x)$

SI DEVONO QUINDI SCEGLIERE LE VARIABILI LAGRANGIANE.
HO SOLO 1 GDL.

POTREI SCEGLIERE L'ASCISSA CURVILINEA S.

SI IMMAGINA DI PRENDERE ds LUNGO LA GUIDA E SE NE CALCOLA IL GENERICO INCREMENTO INFINITESIMO.

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

$$ds^2=dx^2+\left(\frac{dy}{dx}dx\right)^2=dx^2+\cos^2x\,dx^2=(1+\cos^2x)dx^2$$

POSSO FARE ALTRIMENTI? MI SERVE SOLO 1 VARIABILE LAGRANGIANA NECESSARIA A STABILIRE UNIVOCAMENTE LA POSIZIONE DEL PUNTO NEL MOTO.

POSSO USARE LA x:

$\vec{x}(t)=x\hat{i}+\sin(x)\hat{j}$

QUINDI:

$\dot{\vec{x}}=\dot{x}\hat{i}+\cos(x)\hat{j}$

ORA, IL VINCOLO È OLONOMO?

→ SE È POSSIBILE ESPRIMERE LA RELAZIONE DEL VINCOLO CON UNA RELAZIONE ALGEBRICA O DIFFERENZIALE MA INTEGRABILE

QUAL È L'ESPRESSIONE CHE CARATTERIZZA IL VINCOLO?

$y(x)=\sin(x)$

→ NON DIPENDA ESPLICITAMENTE DAL TEMPO

APPROCCIO LAGRANGIANO

CALCOLO L'ENERGIA CINETICA:

$$T = \frac{1}{2} m(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \cos^2 x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \cos^2 x)$$

CALCOLO L'ENERGIA POTENZIALE:

$$U_{peso} \Rightarrow -mg\hat{j} = mgy$$

$$U_{\text{FORZA AGG.}} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{A}{x^2}\hat{\imath} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{A}{x^2} \rightarrow U = \int \frac{A}{x^2} dx = -\frac{A}{x}$$

QUINDI L'ENERGIA POTENZIALE È:

$$U = mgy - \frac{A}{x} = mg\sin x - \frac{A}{x}$$

SI PONE LO 0 DELL'E. POTENZIALE A 0 DELL'ASSE y:
ADESSO POSSO APPLICARE L'EQUAZIONE DI LAGRANGE:
NON SI HANNO FORZE NON CONSERVATIVE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1+\cos^2 x) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}(1+\cos^2 x) - 2m\dot{x}\cos x \sin x$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = -m\dot{x}^2 \cos x \sin x$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial x} = mg\cos x + \frac{A}{x^2}$$

METTENDO TUTTO ASSIEME:

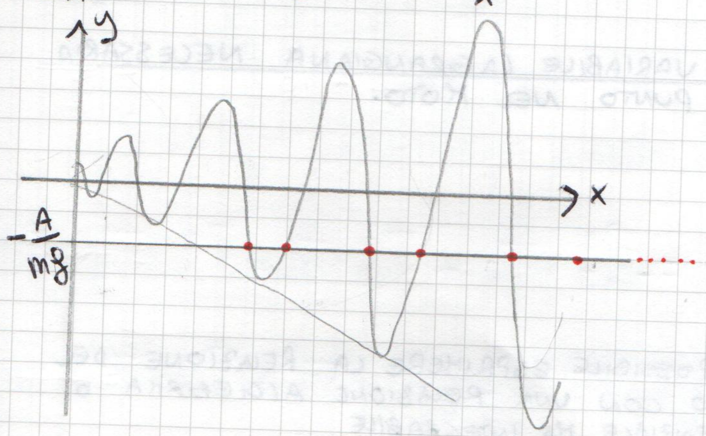
$$\boxed{m\ddot{x}(1+\cos^2 x) - \dot{x}^2 \cos x \sin x + mg\cos x + \frac{A}{x^2} = 0}$$

EQ. DIFF. NON LINEARE
L'INCOGNITA È $x(t)$ MA SI HANNO FUNZIONI TRASCENDENTI, POTENZE, PRODOTTI

POTREMMO PERÒ CERCARE DEI PUNTI DI EQUILIBRIO TRAMITE IL METODO ENERGETICO:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 = mg\cos x + \frac{A}{x^2} \rightarrow x^2 \cos x = -\frac{A}{mg}$$

A E mg SONO DEFINITI POSITIVI (A>0 NEL NOSTRO CASO)



TRAMITE UN MODELLO NUMERICO È POSSIBILE TROVARE LE RADICI DI QUESTA EQUAZIONE.

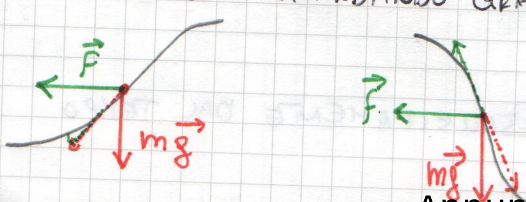
LA FUNZIONE È PERIODICA CON UN'AMPIEZZA CHE AUMENTA $x \rightarrow \infty$.

$\exists$ x T.C. DIPENDENTE DA $-\frac{A}{mg}$ IN CORRISPONDENZA AL QUALE A SINISTRA NON HO LA FUNZIONE MENTRE A DESTRA INFINITI.

PRIMA DI UNA CERTA X NON PUÒ ESSERCI EQUILIBRIO QUINDI.

PIÙ BASSO È A, PIÙ QUESTA SOGLIA SI AVVICINA A ZERO.

CIÒ LO SI VEDE GUARDANDO GRAFICAMENTE IL CASO:

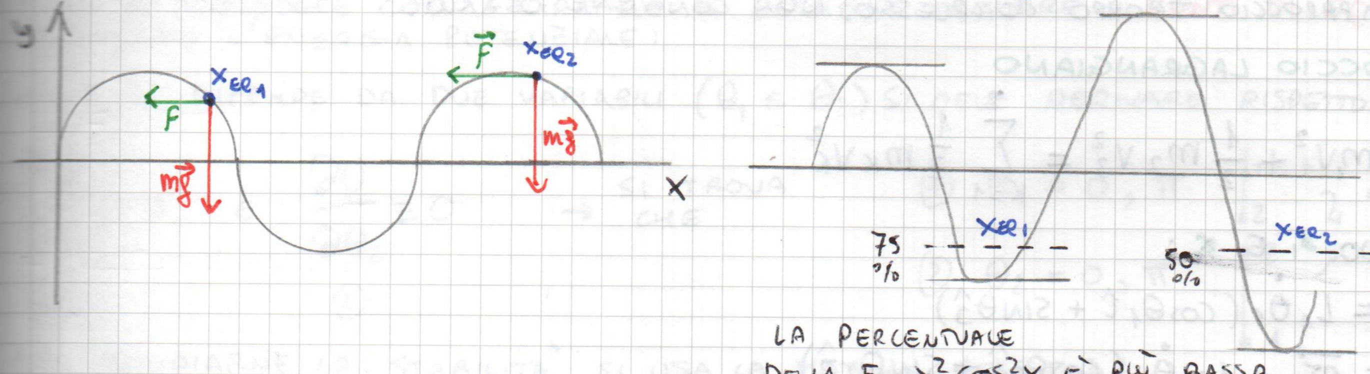


LE COMPONENTI SI BILANCIANO SOLO NEI TRATTI IN DISCESA.

SE A È MOLTO ALTA, SE LASCIO IL P.TO MATERIALE VICINO X, ESSA TORNA A 0 MA ALLONTANANDOLI LA FORZA DI ATTRAZIONE È BILANCIATA DALLA F. PESO

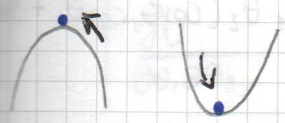
ORTOGONALMENTE ALLA GUIDA NON CI INTERESSA IL BILANCIO POICHÉ SI SUPPONE CHE LE $\vec{F}$ SI BILANCIANO.

AUMENTANDO L'AMPIEZZA PERÒ I PUNTI DI EQUILIBRIO NON SI TROVERANNO ALLO STESSO PUNTO DELLA CURVA.
HO DUE P.TI DI EQUILIBRIO x_{E1} E x_{E2} A CUI CORRISPONDONO QUINDI PUNTI DIVERSI DI X.



LA PERCENTUALE DELLA F. $x^2 \cos^2 x$ È PIÙ BASSA PER $x \to \infty$ FINO A CHE SI ARRIVERÀ A $\simeq 0\%$

QUANDO SUCCEDE QUESTO SIGNIFICA CHE IL P.TO DI INTERSEZIONE SARÀ INDISTINGUIBILE DAL VALORE 0 DEL COSENO OSSIA I P.TI DI EQUILIBRIO SI AVVICINANO AI VERTICI.



SI SAREBBE POTUTO SVOLGERE IL TUTTO CON L'APPROCCIO NEWTONIANO.

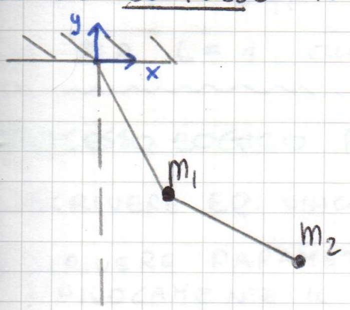
SISTEMA MECCANICO DINAMICO - DOPPIO PENDOLO

HA DINAMICA CAOTICA: VEDIAMO IL CASO DEL DOPPIO PENDOLO

SI HANNO ASTE IDEALI IN GRADO DI TRASMETTERE REAZIONI VINCOLARI LUNGO LA GIACITURA. SI CONSIDERANO MASSE COLLEGATE ALLE ASTE

AVENDO 2 MASSE HO 4 GDL MA I VINCOLI NE SOTTRAGGONO 2:

$\downarrow$



I VINCOLI IMPONGONO DISTANZE RELATIVE FISSE.

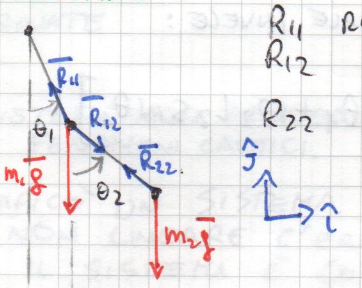
IL VINCOLO È OLONOMO? SI ANALIZZA IL PROBLEMA.
PRENDO UN SDR SEMPLICE

$|\vec{x}_1| = L_1 \quad |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| = L_2$ I VINCOLI SONO OLONOMI E SCLERONOMI

APPROCCIO NEWTONIANO

1) $m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{R}_{11} + \vec{R}_{12}$

2) $m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{R}_{22}$



R_{11} REAZIONE SU m_1 DI ASTA 1
R_{12} " " " " " 2
R_{22} " " m_2 " " 2

CON IL PENDOLO SEMPLICE CONOSCEVAMO LA TRAIETTORIA DA CUI SI DICEVA:

$S = R\theta$

SI IDENTIFICANO ORA LE TENSIONI $\overline{T}_1$ E $\overline{T}_2$
PROIETTANDO LE DUE EQUAZIONI SI OTTIENE:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 \\ m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin\theta \\ m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T_2 \cos\theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

HO 2 GDL $\to$ 2 INCOGNITE: θ_1 E θ_2 + 2 INC. AUSILIARIE T_1 E T_2

SE FOSSERO ASTE RIGIDE POTREBBERO CONTENERE $\overline{R}^N = \overline{R}^n + \overline{R}^t$ QUINDI 2 TERMINI IN PIÙ PER OGNI GRUPPO DI EQ.

DOVE POI:

$$\vec{x}_1(t) = L_1 \sin\theta_1 \hat{i} - L_1 \cos\theta_1 \hat{j} \quad *_1$$

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(t) + L_2 \sin\theta_2 \hat{i} - L_2 \cos\theta_2 \hat{j} \quad *_2$$

È UN APPROCCIO TROPPO COMPLESSO. NON CONVIENE USARLO.

APPROCCIO LAGRANGIANO

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \sum_{K=1}^{2} \frac{1}{2} m_K v_K^2$$

RIPRENDO $*_1$ E $*_2$:

$$\vec{v}_1(t) = L_1 \dot{\theta}_1 (\cos\theta_1 \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$$

$$\vec{v}_2(t) = \vec{v}_1 + L_2 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_2 \hat{i} + \sin\theta_2 \hat{j})$$

QUINDI

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad \text{E} \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

QUINDI L'ENERGIA CINETICA TOTALE È:

$$T = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

MENTRE PER L'ENERGIA POTENZIALE:

HO SOLO LA F. PESO $m\vec{g} = -mg\hat{j} \rightarrow U_{PESO} = mgy \rightarrow$ MA HO 2 MASSE

DOVE $\quad mgy = -g[m_1 L_1 \cos\theta_1 + m_2(L_2 \cos\theta_2 + L_1 \cos\theta_1)] = U_{TOTALE}$

ADESSO CALCOLO LE DERIVATE RISPETTO LE VARIABILI LAGRANGIANE:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

PER L'ENERGIA POTENZIALE INVECE:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = g[m_1 L_1 \sin\theta_1 + m_2 L_2 \sin\theta_1]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = g m_2 L_2 \sin\theta_2$$

TORNANDO ALL'E. CINETICA:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{CON SIN SOMMA}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

INFINE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_1}\right) = (m_1+m_2)L_1^2\ddot\theta_1 + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta_2}\right) = m_2 L_2^2\ddot\theta_2 - \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot\theta_1 \sin(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_2$$

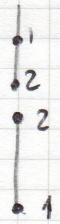
PRIMA DI PROCEDERE CON LAGRANGE È POSSIBILE TROVARE I PUNTI DI EQUILIBRIO SFRUTTANDO L'ENERGIA POTENZIALE:

POICHÉ U DIPENDE DA DUE VARIABILI (θ_1 E θ_2) SI DEVE DERIVARE RISPETTO ENTRAMBE:

$$\underset{①}{\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0} \quad E \quad \underset{②}{\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0} \quad \rightarrow \text{ SI TROVA CHE}$$

① $\theta_1 = 0, \pi$

② $\theta_2 = 0, \pi$



4 POSIZIONI DI EQUILIBRIO

PER STUDIARNE LA STABILITÀ SI USA LA MATRICE HESSIANA:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix}$$

È STABILE SE LA MATRICE È DEFINITA POSITIVA OSSIA TUTTI I MINORI > 0

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2}\right|_{EQ} > 0 \qquad \det H > 0$$

A QUESTO PUNTO SI SCRIVE L'EQ. DI EULERO-LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad \text{IN QUANDO } Q_i^{NC} = 0$$

SIA PER $i = 1$ CHE $i = 2$

PROCESSO LOGICO PER APPROCCIO LAGRANGIANO

1) SCRIVERE EQ. VINCOLO (VERIFICARE CHE SIA OLONOMO SCLERONOMO)

2) SCRIVERE PARAMETRI LAGRANGIANI INDIPENDENTI TRA LORO E CHE DESCRIVANO UNIVOCAMENTE IL MOTO DEL P.TO/CORPO.

3) CALCOLARE T E U E FARNE LE DERIVATE

PER SISTEMA CAOTICO SI INTENDE SISTEMA NON PREVEDIBILE. NON È POSSIBILE UTILIZZARE CAUSA-EFFETTO PER PREVEDERE FENOMENI CAOTICI.

FU IL METEOROLOGO LORENZ CHE GRAFICÒ UN SISTEMA CAOTICO, RENDENDOSI CONTO CHE ALLA BASE DEL FENOMENO NON LINEARE C'ERA COMUNQUE UN PRECISO SISTEMA CAUSA-EFFETTO MA IL SISTEMA È COMPLETAMENTE SENSIBILE ALLE CONDIZIONI INIZIALI.