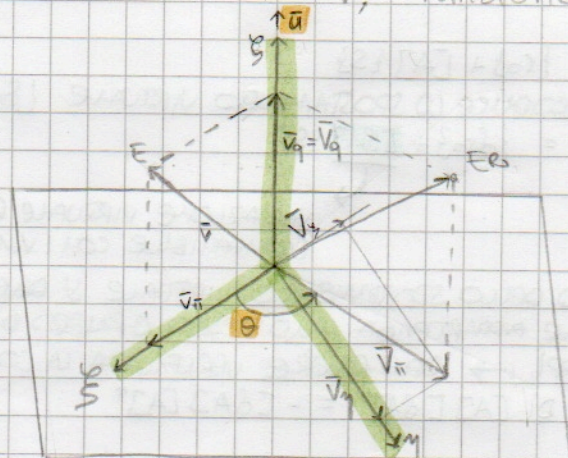


IL MULTIBODY

Ai fini del calcolo dei risultati, e per evitare configurazioni critiche, si ricorre ad una trattazione basata sulla **notazione asse-angolo**, una formulazione non minimale dove si esprime la matrice di assetto in funzione di 4 parametri anziché 3. Si lavora in $SO(3)$: tutto si muove come se fosse un moto sferico attorno l'origine. Si vuole stabilire la posizione di un sistema di riferimento ruotato rispetto un sistema fisso dando la direzione dell'asse di rotazione $\{u\}$ e l'angolo di rotazione θ .

Si suppone di avere un generico corpo che ruota di un angolo θ attorno un asse passante per l'origine. Si fissa un sistema di riferimento $\{u\}$, dove u è lungo la direzione di rotazione e u è orientato in modo che il vettore $\bar{v}$ che unisce il generico punto P appartenente al corpo all'origine O sia nel piano $u\bar{v}$. A seguito della rotazione, il punto P si è spostato in P' , ed è indicato con $\bar{v}'$. Si vuole la matrice di assetto $[A]$ che permette di passare da $\bar{v}$ a $\bar{v}'$, in funzione di θ e u .



$$\begin{aligned}\bar{v}' &= \bar{v}_q + \bar{v}_\pi \\ \bar{v}_q &= (\bar{v} \cdot \bar{u}) \bar{u} \\ \bar{v}_\pi &= \bar{v} - \bar{v}_q = -\bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_q &= \bar{v}_q \\ \bar{v}_\pi &= \bar{v}_g + \bar{v}_n \\ \bar{v}_g &= \cos \theta \bar{v}_\pi \\ \bar{v}_n &= \sin \theta (\bar{u} \times \bar{v})\end{aligned}$$

Si scrive il vettore $\bar{v}'$ come somma vettoriale dei termini: $\bar{v}' = (\bar{v} \cdot \bar{u}) \bar{u} - \cos \theta \bar{u} \times (\bar{u} \times \bar{v}) + \sin \theta (\bar{u} \times \bar{v})$. Si ottiene la formula di Rodrigues. Questa viene espressa in termini matriciali e si riarrangia fino ad avere l'espressione $\{\bar{v}'\} = [A(\bar{u}, \theta)] \{\bar{v}\}$. Quindi si è trovata un'espressione (seppur complessa) della matrice di assetto che permette di esprimere la nuova posizione che il generico vettore $\bar{v}$ assume dopo una rotazione di un angolo θ attorno una linea u definita dal vettore $\bar{u}$.

Si perviene ad una notazione più compatta ed elegante della matrice di assetto in notazione asse-angolo introducendo i parametri di Eulero:

$$e_0 = \frac{\cos \theta}{2} \quad e_1 = \frac{u_1 \sin \theta}{2} \quad e_2 = \frac{u_2 \sin \theta}{2} \quad e_3 = \frac{u_3 \sin \theta}{2}$$

La condizione sui parametri è $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$.

Introducendo il vettore $\{e\} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}^T$, si ottiene la forma compatta di $[A]$:

$$[A] = [(2e_0^2 - 1)[I] + 2\{e\}\{e\}^T + 2e_3[\tilde{e}]]$$

Ci sono più modi attraverso cui calcolare i parametri di Eulero che sono dipendenti fra loro: si sceglie quello che dà il risultato più preciso.

Definiti i parametri di Eulero, si vuole svolgere un'analisi cinematica (e poi dinamica) attraverso questi parametri.

Serve introdurre:

- Il vettore di 4 elementi $\{p\}$, corredato dalla condizione di normalizzazione:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix}, \quad \{p\}\{p\}^T = e_0^2 + \{e\}\{e\}^T = 1$$

- Le matrici $[E]$ e $[G]$:

$$[E] = [-\{e\} \quad \{e'\} + e_0[I]] \quad [E] = [3 \times 4]$$

$$[G] = [-\{e\} \quad -[\tilde{e}] + e_3[I]] \quad [G] = [3 \times 4]$$

Tali che $[A] = [E][G]^T \rightarrow [E]$ e $[G]$ sono opportunamente scelte per restituire $[A]$.

che legano $[E]$, $[G]$ e $\{p\}$
hanno proprietà che
sono verificate per
calcolo diretto

I PARAMETRI DI EULERO SONO FUNZIONE DEL TEMPO.

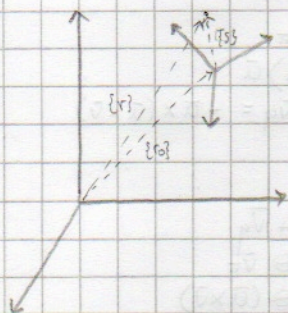
LE DERIVATE DI $\{u\}$ E θ SONO ASSOCIATE ALLA DERIVATA DI $[A]$ E DERIVANDO $\{u\}$ SI CONOSCE LA POSIZIONE SUCCESSIVA DEL RIFERIMENTO.

DALLE DERIVATE DI $\{p\}$, $[E]$ E $[G]$ SI RICAIVANO RELAZIONI CHE FORMULANO $\{\dot{u}\}$ E $\{\dot{w}\}$: SI CORRIPA LA VARIAZIONE DI $\{u\}$ E θ (E QUINDI UNA VARIAZIONE DEI PARAMETRI DI EULERO) A $\dot{u}$.

IN PARTICOLARE SI OTTIENE $\{\dot{u}\}$ FUNZIONE SOLO DI $[G]$ E DELLA SUA DERIVATA E QUESTO E' IL PUNTO DI PARTENZA PER OTTENERE $\{p\}$: NOTA $\{\dot{u}\}$ SI RICAIV $\{\dot{w}\}$ LEGATA A $[G]$ E $\{p\}$ QUINDI SE SI CONOSCE LA POSIZIONE, SI CONOSCONO I PARAMETRI DI EULERO, QUINDI $[G]$ E QUINDI DERIVANDO, LA VELOCITA' ANGOLARE DEL CORPO J-PRIMO. LA VELOCITA' ANGOLARE PUO' ESSERE ESPRESSA ANCHE NEL RIFERIMENTO FISSO. IN QUESTO CASO SI USA $[E]$ AL POSTO DI $[G]$.

NELL'ESPRESSIONE DI $\{\dot{w}\}$. DERIVANDO $\{\dot{w}\}$ SI OTTIENE L'ACCELERAZIONE ANGOLARE ESPRESSA NEL RIFERIMENTO MOBILE O NEL RIFERIMENTO FISSO. ALLA FINE SI VANNO SEMPLICEMENTE A LEGARE LE DERIVATE SECONDE DEI PARAMETRI DI EULERO ALL'ACCELERAZIONE ANGOLARE.

ANALISI DINAMICA - CENNI INTRODUTTIVI



$$\{r\} = \{r_0\} + [A] \{s\}$$

SI INTRODUCO LO SPOSTAMENTO VIRTUALE $\{\delta r\}$:

$$\{\delta r\} = \{\delta r_0\} + \underbrace{[\delta A]}_{\text{VARIAZIONE VIRTUALE DELLA MATRICE DI ASSETO (COMPATIBILE CON I VINCOLI)}} \{s\}$$

VARIAZIONE VIRTUALE DELLA MATRICE DI ASSETO (COMPATIBILE CON I VINCOLI)

A SEGUITO DELLO SPOSTAMENTO VIRTUALE SI DEVE OTTENERE UNA MATRICE $[\delta A]$ CHE APPARTENGA ALLO STESSO GRUPPO DI $[A]$ PER LA TEORIA DEI GRUPPI $\rightarrow$ DEVE ESSERE VERIFICATA LA CONDIZIONE DI ORTOGONALITA', OVEIRO DI $[A][\delta A]^T = -[\delta A][A]^T$

SI DEFINISCE LA MATRICE DI ROTAZIONE VIRTUALE $[\delta \theta] = [\delta A][A]^T$. DI CONSEGUENZA:

$$\{\delta r\} = \{\delta r_0\} + [\delta \theta][A] \{s\} = \{\delta r_0\} + [\delta \theta] \{s\} \quad (\text{NEL RIFERIMENTO FISSO})$$

LA STESSA RELAZIONE SI PUO' SCRIVERE ANCHE NEL RIFERIMENTO MOBILE

$$\{\delta r\} = \{\delta r_0\} + [A] ([\delta \theta]) \{s\}$$

IN ALTERNATIVA ALLA NOTAZIONE MATRICIALE, SI PUO' USARE LA NOTAZIONE CON QUATERNIONI, SEMPRE DEFINITI A PARTIRE DAI PARAMETRI DI EULERO. UN QUATERNIONE E' COMPOSTO DA PARTE REALE E PARTE IMMAGINARIA:

$$q = e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k$$

PARTI REALE

PARTI IMMAGINARIA

PERCHIE I QUATERNIONI SERVANO A SERVIRE USARE LE MATRICE $[E]$ E $[G]$, HANNO ASSOCIATA UNA NOTAZIONE ARTIFICIOSA E UNA MATEMATICA DEDICATA.

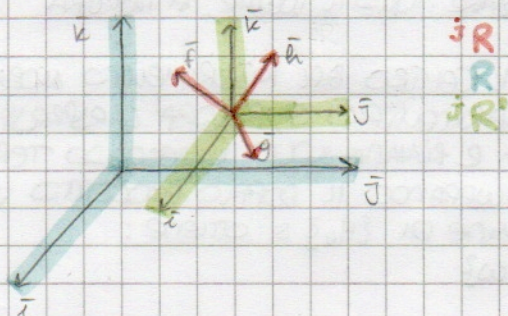
* NOTA LA POSIZIONE SI RICAIVANO I PARAMETRI DI EULERO E DI CONSEGUENZA SI PUO' SCRIVERE LA MATRICE $[G]$ CON $[G]$ E $\{\dot{u}\}$ SI CALCOLA $\{\dot{w}\}$ PERCHIE $\{\dot{w}\} \propto [G][\dot{u}]$. NOTA $\{\dot{w}\}$ E CALCOLA IL VETTORE $\{\dot{w}\}$ CHE INVECE E' $\propto [G]$ E $\{p\}$ QUINDI INVERTENDO LA RELAZIONE SI TROVA $\{p\}$ (DERIVATA DEL VETTORE DEI PARAMETRI DI EULERO). DERIVANDO $\{\dot{w}\}$ SI OTTIENE L'ACCELERAZIONE ANGOLARE, LEGATA A $\{p\}$

EQUAZIONI DI NEWTON - EULERO PER LA DINAMICA DEL MULTIBODY

INANZITUTTO SI RICORDANO LE EQUAZIONI CARDINALI ESPRESSE IN FORMA VETTORIALE:

$$\begin{cases} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} + \vec{v}_O \times \vec{p} \quad (\vec{v}_O \times \vec{p} = 0 \text{ se si sceglie accuratamente il POLO}) \end{cases}$$

SI CONSIDERA UN SISTEMA RIGIDO DI MASSE LOCALIZZATE (LA DISTANZA FRA MASSE È FISSA). SI STUDIA IL SINGOLO CORPO J-ESIMO E SI DEFINISCONO I SISTEMI DI RIFERIMENTO **FISSO** E **MOBILE** (SOLDALE AL CORPO J-ESIMO) E **VIRTUALE** (CASPER).



SI SCRIVE LA PRIMA EQUAZIONE CARDINALE IN NOTAZIONE MATRICIALE:

$$\{F\} = \{\dot{p}\} = [M] \{\ddot{r}_G\}$$

DOVE

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T$$

$$\{p\} = M \{ \dot{r}_{xG} \ \dot{r}_{yG} \ \dot{r}_{zG} \}^T \text{ vettore qdvm}$$

$$\{r_G\} = \{r_{xG} \ r_{yG} \ r_{zG}\}^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \text{ matrice delle masse}$$

PER LA SECONDA EQUAZIONE OCCORRE LAVORARE DI PIÙ.

SI CALCOLA IL TEOREMA DEL TRASPORTO DEI MOMENTI RISPETTO UN GENERICO POLO A:

$$\vec{H}_A = \sum_i A \vec{p}_i \times \vec{v}_i \equiv \{H_A\} = \sum_i m_i [\vec{r}_{Ai}] \{\dot{r}_i\}$$

$$\text{DOVE } \vec{r}_{Ai} = \vec{r}_{AG} + \vec{r}_{Gi} \equiv \{r_{Ai}\} = \{r_{AG}\} + \{r_{Gi}\} \text{ PER } i = \{1, \dots, N\}$$

SOSTITUENDO QUEST'ESPRESSIONE DI $\{r_{Ai}\}$ IN $\{H_A\}$ SI OTTENE CHE IL MOMENTO TOTALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO È SUDDIVISO IN DUE ADDENDI:

$$\vec{H}_A = \sum_i m_i \vec{r}_{AG} \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times \vec{v}_i \equiv \{H_A\} = \sum_i m_i [\vec{r}_{AG}] \{\dot{r}_i\} + \sum_i m_i [\vec{r}_{Gi}] \{\dot{r}_i\}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{AG} \times \vec{v}_i = \vec{r}_{AG} \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i =$$

$$= M \vec{r}_{AG} \times \vec{v}_G \text{ PER LA DEFINIZIONE STESSA DI BARICENTRO. QUINDI ALLA FINE IL TERMINE È: } M [\vec{r}_{AG}] \{\dot{r}_G\}$$

È IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO CALCOLATO RISPETTO AL BARICENTRO G, QUINDI $\{H_G\}$

$$R = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \rightarrow R \sum m_i = \sum m_i r_i$$

$$\text{SI OTTENE } \{H_A\} = \{H_G\} + M [\vec{r}_{AG}] \{\dot{r}_G\}$$

SE INVECE SI CALCOLA IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO L'ORIGINE DEL RIFERIMENTO MOBILE:

$$\vec{H}_O = \sum_i m_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{v}_i \equiv \{H_O\} = \sum_i m_i [\vec{r}_{Oi}] \{\dot{r}_i\}$$

$$\text{DOVE } \vec{r}_{Oi} \equiv \vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{Gi} \quad (i = 1, \dots, N) \text{ CHE DERIVATA DA } \vec{v}_i = \vec{v}_O + \omega \times \vec{r}_{Gi}$$

QUINDI $\vec{H}_O$ DIVENTA:

$$\vec{H}_O = \sum_i m_i (\vec{r}_{Gi} \times \vec{v}_O) + \sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times (\omega \times \vec{r}_{Gi})$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_{Gi} = \sum_i m_i [A] \{s_i\} =$$

$$= [A] \sum_i m_i s_i = [A] M \{s_G\} =$$

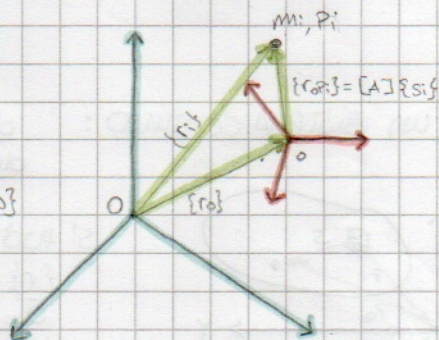
$$= M \vec{r}_{OG}$$

QUINDI:

$$\sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times \vec{v}_O = M \vec{r}_{OG} \times \vec{v}_O \equiv$$

$$M [\vec{r}_{OG}] \{v_O\}$$

SI SVILUPPA APPLICANDO LE REGOLE DEL DOPIO PRODOTTO VETTORIALE E SI OTTENE ALLA FINE $\sum_i m_i \vec{r}_{Gi} \times (\omega \times \vec{r}_{Gi}) = [A] [J_G] \{\dot{\omega}\}$



SI STUDIA NEI RIFERIMENTI LOCALI PERCHÉ QUANDO SI ANALIZZANO I SINGOLI CORPI, PRIMA DI COMPARLI ASSIEME, I SINGOLI PEZZI SI POSSONO STUDIARE SOLO NEL RIFERIMENTO LOCALE.

QUINDI L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO L'ORIGINE DEL SISTEMA MOBILE È:

$$\{H_O\} = M [\vec{r}_{OG}] \{v_O\} + [A] [J_G] \{\dot{\omega}\}$$

SE SI SCEGLIE L'ORIGINE DEL RIFERIMENTO FISSO AFFINCHÉ COINCIDA CON IL BARICENTRO, IL PRIMO TERMINE È NULLO PERCHÉ $\{r_{GG}\} = \{0\}$

LA STESSA TRATTAZIONE (CON IL RAGGIUNGIMENTO DEGLI STESSI RISULTATI) SI PUÒ OTTENERE ANCHE PER UN SISTEMA CHE ADOTTA LA SCHEMATIZZAZIONE DI MASSA DISTRIBUITA INVECE DI LOCALIZZATA.

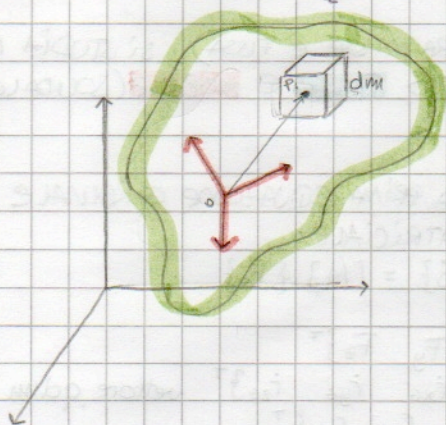
SI DEFINISCE IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO CON POLO IN G ESPRESSO NEL RIFERIMENTO J-PRIMO:

$$\{^j H_G\} = \int_V [\hat{S}] \{^j \dot{r}\} dm$$

↳ vettore espresso nel riferimento locale j il cui polo è in o

ESSENDO $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{Gi}$ E QUINDI $\{^j \dot{r}_i\} = \{^o \dot{r}_G\} + [^o \vec{\omega}] \{^j s_i\}$ RISULTA:

$$\{^o H_G\} = - \{^o \dot{r}_G\} \int_V [\hat{S}] dm + \int_V [\hat{S}] [^o \vec{\omega}] \{^j s_i\} dm$$



SI CONSIDERA UN ELEMENTO dm POSIZIONATO IN P_i , QUINDI SI PUÒ DEFINIRE UN VETTORE $\{^j s_i\}$ NEL RIFERIMENTO LOCALE POICHÉ SI DEVE SPAZIARE TUTTO IL VOLUME, SI INTEGRA

SE SI SUPPONE CHE IL CENTRO DEL RIFERIMENTO MOBILE O COINCIDA CON IL BARICENTRO G, ALLORA L'ESPRESSIONE DI $\{H_G\}$ SI SEMPLIFICA E RIMANE SOLO IL SECONDO TERMINE PERCHÉ $\int_V [\hat{S}] dm = 0$. SVILUPPANDO IL DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE DEL SECONDO TERMINE DI $\{H_G\}$ SI OTTIENE:

$$\{^j H_G\} = [^o J_G] [^o \vec{\omega}]$$

SCRIVENDO IL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO UN GENERICO POLO A, SI OTTIENE:

$$\{^j H_A\} = \{^j H_G\} + M [^o \vec{r}_{AG}] \{^j \dot{r}_G\}$$

DOVE I VETTORI SONO TUTTI INTERPRETATI NEL RIFERIMENTO LOCALE J-PRIMO AVERE POLO IN O A PARTIRE DA QUEST'ESPRESSIONE, SOSTITUENDO $\{^j H_G\}$ E RICORDANDO IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER, SI OTTIENE:

$$\{^j H_A\} = M [^o \vec{r}_{AG}] \{^j \dot{r}_A\} + [^o J_A] [^o \vec{\omega}]$$

QUESTO MOMENTO RISULTANTE DELLA QUANTITÀ DI MOTO SI PUÒ CALCOLARE IN UN QUALSIASI ALTRO RIFERIMENTO SFRUTTANDO LE MATRICI DI TRASFORMAZIONE.

A QUESTO PUNTO SI ESPRIME LA SECONDA EQUAZIONE CARDINALE: LA DERIVATA TEMPORALE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO UN GENERICO POLO O È PARI ALLA SOMMA DEI MOMENTI APPLICATI AL SISTEMA E CALCOLATI RISPETTO LO STESSO POLO.

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

↳ nullo perché $\vec{v}_i \parallel \vec{p}_i$

QUINDI

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{M}_O$$

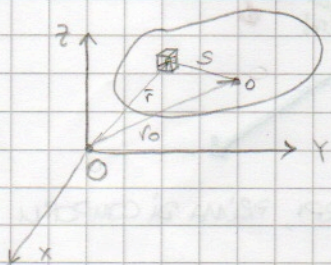
↳ nullo perché i momenti delle forze interne si bilanciano

SI OTTIENE CHE LA DERIVATA DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO IL POLO O È PARI AL SOLO CONTRIBUTO DELLE FORZE ESTERNE INDICATO CON $\vec{M}_O$: PER UN SISTEMA DI MASSE LOCALIZZATE VALE:

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

PER UN SISTEMA CONTINUO: $\frac{d\{H_O\}}{dt} = \int_V [\hat{r}] \{^j \dot{r}\} dm$

NOTABILE: SI CALCOLA $\{H_O\}$ RISPETTO IL CENTRO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO O (non o)



SI PUÒ SCRIVERE:

$$\{^j \dot{r}\} = \{^o \dot{r}_G\} + [^o \vec{\omega}] \{^j s\} = \{^o \dot{r}_G\} + \{^j \dot{r}_G\}$$

$$\vec{r}_G = \vec{r}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P)$$

$$\{^j \dot{r}\} = \{^j \dot{r}_G\} + [^j \vec{\alpha}] \{^j r_{GP}\} + [^j \vec{\omega}] [^j \vec{\omega}] \{^j r_{GP}\}$$

SOSTITUENDO IN $\frac{d\{H_O\}}{dt}$ SI OTTIENE:

$$\frac{d\{H_O\}}{dt} = \int_V ([^o \vec{r}_G] + [^j \vec{r}_{GP}]) (\{^j \dot{r}_G\} + [^j \vec{\alpha}] \{^j r_{GP}\} + [^j \vec{\omega}] [^j \vec{\omega}] \{^j r_{GP}\}) dm$$

SI OTTIENE UN'ESPRESSIONE CON 6 ADDENDI, OGNUNO DEI QUALI VIENE SVILUPPATO SEPARATAMENTE E SEMPLIFICATO

SI CALCOLA IL MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO O:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_i \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum_i \vec{r}_O \times m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} + \sum_i \vec{r}_{O P_k} \times \vec{F}_k = \vec{r}_O \times \sum_i m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} + \vec{M}_O = \\ &= \vec{r}_O \times M \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + \vec{M}_O \end{aligned}$$

OVVERO: $\{M_O\} = M [\vec{r}_O] \{\ddot{\vec{r}}_O\} + \{M_O\}$

↑ MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO O, ORIGINE DEL RIFERIMENTO LOCALE

SI EGUAGLIAMO LE ESPRESSIONI DI $\frac{d}{dt} \{H_O\}$ E $\{M_O\}$

SE SI SUPPONE CHE $O \equiv G$, SI SEMPLIFICA L'EGUAGLIANZA FRA $\frac{d}{dt} \{H_O\}$ E $\{M_O\}$ OTTENENDO:

$$\{M_O\} = [J_O] \{\ddot{\alpha}\} + [\dot{\omega}] [J_O] \{\omega\} \quad (O \text{ non } O)$$

OVVERO L'EQUAZIONE DI EULERO PER MOTI ROTAZIONALI

QUEST'ESPRESSIONE SI PUO' SCRIVERE ANCHE NEL RIFERIMENTO DEL CORPO I-ESIMO.

L'EQUAZIONE DI EULERO (E LA SECONDA EQUAZIONE CARDINALE) VIENE SCRITTA PER TUTTI I CORPI CHE COMpongono IL SISTEMA E LA SI PUO' SCRIVERE NELLE SUE 3 COMPONENTI

OVVERO OTTENERE 3 EQUAZIONI SCALARI PER M_x, M_y, M_z

COMPONENDO LE DUE EQUAZIONI CARDINALI, SI OTTIENE UN UNICO GRANDE SISTEMA:

$$\begin{bmatrix} M[I] & 0 \\ 0 & [J_O] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\vec{r}}_O\} \\ \{\ddot{\alpha}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{M_O\} - [\dot{\omega}] [J_O] \{\omega\} \end{Bmatrix}$$

EQUAZIONI DI NEWTON-EULERO IN FORMA COMPATTA

J_O : matrice di inerzia

LA SIMULAZIONE DINAMICA NEL MULTIBODY

SI STUDIA IL PROBLEMA ATTRAVERSO L'APPROCCIO BASATO SUI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE. A CUI SI DEVE AGGIUNGERE L'EQUAZIONE DI VINCOLO. SI HANNO 3 POSSIBILI FORMULAZIONI:

- INDICE DIFFERENZIALE 3: $\{\psi(q, t)\} = 0$
- INDICE DIFFERENZIALE 2: $[\psi_q] \{\dot{q}\} + \{\psi_t\} = \{0\}$ CHE SI OTTENE DERIVANDO L'EQUAZIONE DI VINCOLO $\{\psi(q, t)\} = 0$
- INDICE DIFFERENZIALE 1: $[\psi_q] \{\ddot{q}\} = \{\ddot{x}\}$, RICONDUCE A UNA ODE (ordinary differential equation) CON $[A] \{x\} = \{b\}$

LE EQUAZIONI DI VINCOLO SONO SEMPRE AGGIUNTE AL SISTEMA DI EQUAZIONI DELLA DINAMICA:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\psi_q]^T \{\lambda\} = \{F\}$$

QUINDI POSTIZZANDO UN APPROCCIO CON INDICE DIFFERENZIALE 1 SI OTTENE:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\psi_q]^T \{\lambda\} = \{F\}$$

$$[\psi_q] \{\dot{q}\} = \{\dot{x}\}$$

$$\Rightarrow \text{ode: } [A] \{x\} = \{b\}$$

DOVE:

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & [\psi_q]^T \\ [\psi_q] & [0] \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{\lambda\} \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{\dot{x}\} \end{bmatrix}$$

USARE DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

SI RAGIONA NELLO SPAZIO USANDO I PARAMETRI DI EULERO (QUANDO DETTO SOPRA VALE PER LO SPAZIO SE(2)).

COME PRIMA COSA SI ESPRIME L'EQUAZIONE DI VINCOLO: SI HANNO I CORPI i E j CHE COSTITUISCONO UNA COPPIA CINEMATICA. SI VOGLIE ESPRIMERE UN'EQUAZIONE DI VINCOLO CHE DIPENDE DAL TIPO DI COPPIA E CHE E' COMPOSTA DI TANTE EQUAZIONI SCALARI QUANTI SONO I GRADI DI VINCOLO CHE FORNISCE LA COPPIA STESSA. LA GENERICA CONDIZIONE DI VINCOLO E':

$$\{\psi\}(\{r_i\}, [A_i], \{r_j\}, [A_j]) = \{0\}$$

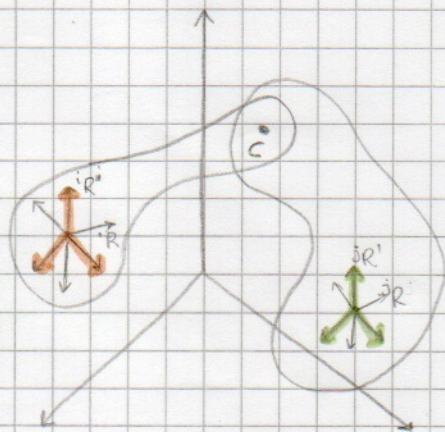
SI DIFFERENZIA L'EQUAZIONE:

$$[\psi_r] \{\dot{r}\} + [\psi_\theta] \{\dot{\theta}\} = \{0\}$$

SI OTTENE LO JACOBIANO DI $\{\psi\}$ RISPETTO LE r E PER COMPLETARE L'EQUILIBRIO SI INSERISCE ANCHE UNA MATRICE RELATIVA ALLA ROTAZIONE DEL CORPO ($\Rightarrow [\psi_\theta]$ CHE NON E' UNO JACOBIANO, NON SONO DERIVATE PARZIALI RISPETTO $\dot{\theta}$).

$\{\dot{\theta}\}$ SI OTTENE A PARTIRE DALLA MATRICE DEGLI SPOSTAMENTI VIRTUALI $[\delta\theta] = [\delta A] [A]^T$ (OBTENUTA SFRUTTANDO LE PROPRIETA' DI $[E]$ E $[G]$). QUESTA MATRICE (OBTENUTA NEL JACOBIANO) SI PUO' ESPRIMERE NEL RIFERIMENTO FISSO OPPURE NEL RIFERIMENTO SOLIDALE AL CORPO. LA MATRICE $[\delta\theta]$ E' L'ANTISIMMETRICA ASSOCIATA AL VETTORE $\{\delta\theta\}$: $[i] \{\delta\theta\} = [\delta\theta] \Rightarrow$ SI RICAVALA $\{\delta\theta\}$ BISOGNA ORA LEGARE $\{\delta\theta\}$ ALLE VARIAZIONI VIRTUALI DEI PARAMETRI DI EULERO: SI SFRUTTANO LE RELAZIONI FRA $\{p\}$, $[G]$ E $[E]$.

SI CONSIDERA UNA COPPIA SFERICA E UN PUNTO C COMUNE AI DUE CORPI:



$$\{r_c\} = \{r_i\} + [A_i] \{s_c\}$$

$$\{r_c\} = \{r_j\} + [A_j] \{s_c\}$$

DA CUI SI RICAVALA L'EQUAZIONE DI VINCOLO:

$$\{\psi\} = \{r_i\} + [A_i] \{s_c\} - \{r_j\} - [A_j] \{s_c\} = \{0\}$$

CHE CORRISPONDE ALLA GENERICA:

$$\{\psi\}([A_i], \{r_i\}, [A_j], \{r_j\}) = \{0\}$$

SI DIFFERENZIA OTTENENDO:

$$[\psi_r] \{\dot{r}\} + [\psi_\theta] \{\dot{\theta}\} = \{0\}$$

DA CUI SI RICAVALA $\{\dot{\theta}\}$ COME:

$$[\psi_r] \{\dot{r}\} + [\psi_\theta] \{\dot{\theta}\} = \{0\} \Rightarrow [\psi_\theta] \{\dot{\theta}\} = -[\psi_r] \{\dot{r}\}$$

PER UNA COPPIA SFERICA:

$$\{\dot{\theta}\}_i = 2 [G] \{p\}_i$$

$$\{\dot{\theta}\}_j = 2 [G] \{p\}_j$$

SI SOSTITUISCE NELL'EQ DI VINCOLO DIFFERENZIALA

SI INTRODUCONO LE MATRICI $[\psi_{r_i}]$ E $[\psi_{r_j}]$ E SI ARRIVA A UNA FORMA COMPATTA PER LE EQUAZIONI DI VINCOLO ($[\psi_{r_i}]$ E $[\psi_{r_j}]$ SONO RELATIVE A $[\psi_{\theta_i}]$ E $[\psi_{\theta_j}]$):

$$[\psi_{r_i}] \{\dot{r}\} + [\psi_{r_j}] \{\dot{r}\} = \{0\}$$

$\{p\}$ = VETTORE DERIVATO DEI PARAMETRI DI EULERO

POICHE' INTERESSANO LE ACCELERAZIONI, SI DERIVA ULTERIORMENTE:

$$[\psi_{r_i}] \{\ddot{r}\} + [\psi_{\theta_i}] \{\ddot{\theta}\} + [\psi_{r_j}] \{\ddot{r}\} + [\psi_{\theta_j}] \{\ddot{\theta}\} = \{0\}$$

raggruppo tutto cio che non e' derivato da $\ddot{r}$ e $\ddot{\theta}$

Si vogliono eliminare le $\{\omega\}$ quindi si sfruttano ancora le relazioni che legano $\{\omega\}$ a $\{G\}$ e $\{p\}$ per ottenere:

$$[\Psi_r] \{\ddot{r}\} + [\Psi_p] \{\ddot{p}\} = \{\ddot{r}\}$$

A questo punto si considera la prima equazione della dinamica:

$$\{F_i^a\} + \{F_i^v\} = [M_i] \{\ddot{q}_i\} \rightarrow \text{in notazione condensata} \rightarrow \{F^a\} + \{F^v\} = [M] \{\ddot{r}\}$$

$$\{F^v\} = -[\Psi_r]^T \{\lambda\}$$

Quindi: $[M] \{\ddot{r}\} + [\Psi_r]^T \{\lambda\} = \{F^a\}$

Si scrive la seconda equazione della dinamica: $\{M_{oi}\} = [J_{oi}] \{\alpha_i\} + [C_{oi}] [J_{oi}] \{\omega_i\}$
Dove il momento $\{M_{oi}\}$ si partiziona in momento dato dalle forze attive e momento legato alle **Forze vincolari**

$$\{M_{oi}^v\} = -[\Psi_{oi}]^T \{\lambda_i\}$$

Questa espressione del momento viene manipolata per far comparire i parametri di eulero

Oltre le equazioni cardinali, serve il vincolo di normalizzazione associato all'uso dei parametri di eulero:

$$\{p\}^T \{p\} = 1 \rightarrow \{p\}^T \{p\} - 1 = 0 \rightarrow \text{si introduce } \{\Phi^p(p)\} = \begin{cases} \{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1\} \\ \vdots \\ \{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{\Phi^p(p)\} = \{0\}$$

che viene derivato 2 volte per ottenere un vincolo espresso in funzione delle accelerazioni:

$$\{\Phi^p(p)\} = \{0\} \rightarrow [\Phi^p(p)] \{\dot{p}\} = \{0\} \rightarrow [\Phi^p(p)] \{\dot{p}\} + ([\Phi^p(p)] \{\dot{p}\})_p \{p\} = \{0\}$$

$$\text{che si esprime anche come } [\Phi^p(p)] \{\dot{p}\} = -\{g^p\}$$

A questo punto si assemblano le equazioni cardinali, il vincolo sui parametri di eulero e l'equazione di vincolo in un unico sistema avendo come incognite: $\{p\}, \{\ddot{r}\}, \{\lambda\}, \{\lambda^0\}$
Il sistema condensato è:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [\Psi_r]^T \{\lambda\} = \{F\}$$

$$[\Psi_p]^T \{\ddot{q}\} = \{\ddot{r}\}$$

con $\{\lambda\}$ vettore dei moltiplicatori di Lagrange (lineari λ e rotazionali λ^0)

$\{\ddot{r}\}$ vettore delle accelerazioni centripetali

$\{F\}$ vettore delle forze generalizzate

$\{q\}$ vettore delle coordinate lagrangiane

NOTA:

I parametri di eulero aumentano all'aumentare del n° di corpi: $\{p\}$ è per il singolo corpo i -esimo $\Rightarrow$ si hanno tanti vettori $\{p\}$ quanti sono i corpi
 $\Rightarrow$ servono altrettanti vincoli di normalizzazione